SKOLEMIZAÇÃO E HERBRANDIZAÇÃO

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Seja* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *uma fórmula em forma prenexa. A* skolemização $\phi^S(x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *define-se indutivamente no seu número de quantificadores por:*

1. *Se* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *não tem quantificadores então* $\phi^S(x_1, \ldots, x_n)$ *é* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.
2. *Se* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *é* $\forall y\, \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, *então* $\phi^S(x_1, \ldots, x_n)$ *é* $\forall y\, \psi^S(x_1, \ldots, x_n, y)$.
3. *Se* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *é* $\exists y\, \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, *então* $\phi^S(x_1, \ldots, x_n)$ *é* $\psi^S(x_1, \ldots, x_n, f_\phi(x_1, \ldots, x_n))$, *onde* f_ϕ *é um novo símbolo funcional denominado de* função de Skolem *para* ϕ *(aqui, as variáveis* $x_1, \ldots, x_n$ *são exactamente as variáveis livres de* ϕ*).*

A skolemização duma fórmula em forma prenexa ϕ duma dada linguagem $\mathcal{L}$ é uma fórmula numa linguagem alargada $\mathcal{L}^S$ obtida pela adjunção de novos símbolos funcionais (abusivamente denominadas de funções de Skolem ou funções índice). Subentende-se que as funções índices da skolemização duma fórmula são diferentes de fórmula para fórmula. Note-se que ϕ^S é sempre uma fórmula universal. Por exemplo, considere-se a seguinte fórmula

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \cdots \exists x_n \forall y_n\, \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n).$$

A sua skolemização é:

$$\forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\, \psi(a, y_1, f_1(y_1), y_2, \ldots, f_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n),$$

onde a constante (função nulária) a e os símbolos funcionais $f_1, \ldots, f_n$ são novos símbolos funcionais: as já mencionadas funções de Skolem.

Note-se que as linguagens $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^S$ têm a mesma cardinalidade, pois a cada fórmula de $\mathcal{L}$ junta-se apenas um número finito de novos símbolos funcionais. Por vezes também falamos de skolemização de fórmulas que não estão em forma prenexa. Nestes casos, subentende-se que foi escolhida uma forma canónica de reduzir as fórmula a uma forma prenexa. Vê-se facilmente que $\models \phi^S \to \phi$. Também se tem:

Teorema 1. *Seja* $\mathfrak{M}$ *uma estrutura para uma linguagem* $\mathcal{L}$*. Então* $\mathfrak{M}$ *pode expandir-se a uma estrutura* $\mathfrak{M}^S$ *da linguagem de Skolem* $\mathcal{L}^S$ *de tal modo que, para toda a fórmula fechada* ϕ *de* $\mathcal{L}$ *em forma prenexa,* $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ *se, e somente se,* $\models_{\mathfrak{M}^S} \phi^S$.

Notação. *A estrutura (a definir)* $\mathfrak{M}^S$ *tem o mesmo domínio que* $\mathfrak{M}$ *e interpreta o vocabulário comum da mesma forma. Nestas circunstâncias, diz-se que* $\mathfrak{M}^S$ *é uma* expansão *de* $\mathfrak{M}$ *ou que* $\mathfrak{M}$ *é uma* redução *de* $\mathfrak{M}^S$.

Demonstração. Basta definir as interpretações dos símbolos de Skolem. Considere-se uma fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ da forma $\exists y\, \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, com ψ em forma prenexa. Temos que definir apropriadamente a função n-ária $(f_\phi)^{\mathfrak{M}^S}$: $|\mathfrak{M}|^n \mapsto |\mathfrak{M}|$. A definição é por indução no número de quantificadores existenciais em ϕ. Por hipótese de indução, admitimos que já se conhecem as interpretações dos símbolos de Skolem que ocorrem em ψ^S. Dados $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ consideramos dois casos. Se $\models_{\mathfrak{M}^S} \exists y\, \psi^S(x_1, \ldots, x_n, y)[a_1, \ldots, a_n]$, define-se $(f_\phi)^{\mathfrak{M}^S}(a_1, \ldots, a_n)$ como sendo um elemento b de $|\mathfrak{M}|$ tal que $\models_{\mathfrak{M}^S} \psi^S(x_1, \ldots, x_n, y)[a_1, \ldots, a_n, b]$. Caso contrário, define-se $(f_\phi)^{\mathfrak{M}^S}(a_1, \ldots, a_n)$ arbitrariamente.

Com estas definições demonstra-se a equivalência

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi(x_1, \ldots, x_n)\,[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \models_{\mathfrak{M}^S} \phi^S(x_1, \ldots, x_n)\,[a_1, \ldots, a_n],$$

para todos os elementos $a_1, \ldots, a_n$ do domínio de $\mathfrak{M}$. A demonstração é por indução no número de quantificadores de ϕ. Em particular, para fórmulas fechadas (em forma prenexa) ϕ, tem-se $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ sse $\models_{\mathfrak{M}^S} \phi^S$. $\square$

Corolário 1. *Seja ϕ uma fórmula fechada e ϕ^S a sua skolemização. Então, ϕ é satisfazível se, e somente se, ϕ^S é satisfazível. Mais geralmente, seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas em forma prenexa e Γ^S a sua skolemização. Então, Γ é satisfazível se, e somente se, Γ^S é satisfazível.*

Acima, se Γ é um conjunto de fórmulas fechadas em forma prenexa duma dada linguagem $\mathcal{L}$, a *skolemização* Γ^S de Γ é o conjunto de fórmulas (fechadas) da forma ϕ^S, com $\phi \in \Gamma$. Note-se que Γ^S é constituída somente por fórmulas universais (da linguagem expandida de Skolem $\mathcal{L}^S$).

Teorema da Compacidade do Cálculo de Predicados. *Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas duma dada linguagem do cálculo de predicados $\mathcal{L}$. Tem-se que Γ tem um modelo se, e somente se, todo o subconjunto finito de Γ tem um modelo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que Γ é constituído apenas por fórmulas em forma prenexa. Suponhamos que todo o subconjunto finito de Γ é satisfazível. Vamos ver que o conjunto de fórmulas do cálculo proposicional $\mathscr{H}(\Gamma^S)$ é finitamente satisfazível. Tome-se um conjunto finito arbitrário de fórmulas de $\mathscr{H}(\Gamma^S)$ da forma $\psi_i(t_{i,1}, \ldots, t_{i,k_i})$ $(1 \leq i \leq n)$ com

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{k_i} \psi_i(x_1, \ldots, x_{k_i}) \in \Gamma^S,$$

para $1 \leq i \leq n$. Ora, cada uma destas fórmulas é da forma ϕ_i^S, com $\phi_i \in \Gamma$. Por hipótese, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é satisfazível. Pelo corolário acima, vem que $\{\phi_1^S, \ldots, \phi_n^S\}$ é satisfazível. I.e., o conjunto finito de fórmulas da forma

$$\{\forall x_1 \cdots \forall x_{k_i} \psi_i(x_1, \ldots, x_{k_i}) : 1 \leq i \leq n\}$$

é satisfazível. Decorre imediatamente que o conjunto finito de fórmulas, sem quantificadores,

$$\{\psi_i(t_{i,1}, \ldots, t_{i,k_i}) : 1 \leq i \leq n\}$$

é satisfazível e, por conseguinte, proposicionalmente satisfazível. Pelo teorema da compacidade do cálculo proposicional, infere-se que $\mathscr{H}(\Gamma^S)$ é proposicionalmente satisfazível. Logo, por um teorema da secção anterior, Γ^S é satisfazível. Daqui sai que Γ é satisfazível. $\square$

Analogamente ao cálculo proposicional, tem-se:

Corolário 2. *Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas duma linguagem do cálculo de predicados e suponhamos que ϕ é uma fórmula fechada dessa linguagem tal que $\Gamma \models \phi$. Então existe um subconjunto finito Σ de Γ tal que $\Sigma \models \phi$.*

A noção de skolemização tem uma formulação dual que passamos a explicar. Seja dada uma fórmula ϕ em forma prenexa do cálculo de predicados:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi,$$

onde cada Q_i é um quantificador, $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis e ψ é uma fórmula sem quantificadores. Tome-se a sua negação na forma

$$\check{Q}_1 x_1 \cdots \check{Q}_n x_n \, \neg\psi,$$

onde $\check{Q}_i$ é o quantificador universal (respectivamente, existencial) se Q_i é o quantificador existencial (respectivamente, universal). Tome-se a skolemização desta negação, obtendo-se com isso uma certa fórmula universal $\forall_1 z_1 \cdots \forall_k z_k \, \theta$, onde θ não tem quantificadores, Finalmente, considere-se a negação desta skolemização na forma $\exists_1 z_1 \cdots \exists_k z_k \, \neg\theta$. A esta fórmula chama-se a *herbrandização* de ϕ, denotada por ϕ^H. Por exemplo, se começarmos com a fórmula $\exists x \forall u \exists y \forall v \phi(x, u, y, v)$, com ϕ sem quantificadores, a sua negação é

$$\forall x \exists u \forall y \exists v \neg\phi(x, u, y, v).$$

Por sua vez, a skolemização desta negação é $\forall x \forall y \neg\phi(x, f(x), y, g(x, y))$, onde f e g são funções de índice. A herbrandização da fórmula com que começámos é, pois, $\exists x \exists y \phi(x, f(x), y, g(x, y))$. Note-se que ϕ^H é sempre uma fórmula existencial e, por construção, é logicamente equivalente a $\neg(\neg\phi)^S$. Como corolário destas discussões, temos:

Corolário 3. *Seja ϕ uma fórmula fechada e ϕ^H a sua herbrandização. Então, ϕ é uma verdade lógica se, e somente se, ϕ^H é uma verdade lógica.*

Demonstração. A fórmula ϕ é uma verdade lógica se, e somente se, $\neg\phi$ não é satisfazível. Como sabemos, esta última condição equivale a dizer que $(\neg\phi)^S$ não é satisfazível, i.e., $\neg(\neg\phi)^S$ é uma verdade lógica. Ora, ϕ^H é equivalente a $\neg(\neg\phi)^S$. $\square$

Há uma interpretação assaz curiosa do teorema de Herbrand e da noção de herbrandização duma fórmula. Sem perda de generalidade, vamos discutir o exemplo acima. Suponhamos que a fórmula $\exists x \forall u \exists y \forall v \phi(x, u, y, v)$, com ϕ sem quantificadores, é uma verdade lógica duma linguagem com pelo menos uma constante. Então a sua herbrandização $\exists x \exists y \phi(x, f(x), y, g(x, y))$ também é uma verdade lógica, onde f e g são funções de índice. Pelo teorema de Herbrand, existem termos fechados, da linguagem de skolem (i.e., com funções de índice), $t_1, \ldots, t_n, q_1, \ldots, q_n$ tais que

$$\phi(t_1, f(t_1), q_1, g(t_1, q_1)) \vee \cdots \vee \phi(t_n, f(t_n), q_n, g(t_n, q_n))$$

é uma tautologia. Eis uma forma de interpretar esta tautologia. Suponhamos por um momento que, ao contrário do admitido, $\exists x \forall u \exists y \forall v \phi(x, u, y, z)$ não é uma verdade lógica, i.e., que é falsa sob uma certa interpretação. Então é possível estender essa interpretação às funções de Skolem f e g de tal modo que

$$\forall x \forall y \neg\phi(x, f(x), y, g(x, y))$$

é verdade (f e g são putativos "contra-exemplos" à verdade lógica inicial). Ora, a tautologia acima garante agora que se podem produzir elementos x's da forma $t_i(f, g)$ e y's da forma $q_i(f, g)$ que mostram que o contra-exemplo é incorrecto. Esta forma de encarar a situação é conhecida por *interpretação do não contra-exemplo* (devida a Georg Kreisel).