EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
FOLHA C

FERNANDO FERREIRA

MARÇO DE 2017

(1) Fixe-se k um inteiro positivo. Suponha que todo o subgrafo finito do grafo (G, E) pode ser colorido com k cores. Mostre que (G, E) pode ser colorido com k cores. [Um grafo (G, E) consiste num conjunto G (de vértices) e num conjunto E (de arestas) de pares (não interessa a ordem) de elementos de G. (G, E) pode ser colorido com k cores se existe uma aplicação de G num conjunto de k elementos (as cores) tal que vértices adjacentes têm necessariamente cores diferentes. Para resolver o problema, associe uma letra proposicional a cada triplo constituído por dois vértices e uma côr, considere um conjunto adequado de fórmulas e use o teorema da compacidade.]

(2) Um conjunto de fórmulas Γ do cálculo proposicional diz-se *independente* se, para toda a fórmula $\phi \in \Gamma$, $\Gamma \setminus \{\phi\} \nvdash \phi$. Admita que o conjunto de letras proposicionais é numerável. Mostre que todo o conjunto de fórmulas Σ tem uma axiomatização Γ independente (i.e., Γ é independente e, para toda a fórmula ϕ, $\Gamma \vdash \phi$ sse $\Sigma \vdash \phi$). [Mostre que Σ tem uma axiomatização Π da forma $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$, possivelmente finita, mesmo possivelmente vazia, tal que $\nvdash \phi_0$ e, para cada n, $\vdash \phi_{n+1} \to \phi_n$ mas $\nvdash \phi_n \to \phi_{n+1}$. Considere o conjunto $\{\phi_0, \phi_0 \to \phi_1, \phi_1 \to \phi_2, \ldots\}$.]

(3) Dê exemplo duma fórmula ϕ do cálculo de predicados e de termos t e q tais que $(\phi^x_t)^y_q$ não é a mesma fórmula que $(\phi^y_q)^x_t$.

(4) Obtenha prenifixações das seguintes fórmulas (P e Q são símbolos relacionais binários):
  (a) $\forall x(\forall y P(x, y) \to \exists z Q(x, z))$;
  (b) $\neg\forall x \exists y(P(x, y) \wedge \forall y Q(x, y))$;
  (c) $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$.

(5) Seja ϕ uma fórmula fechada do cálculo de predicados da forma
$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \, \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$
onde ψ não tem quantificadores (diz-se uma fórmula Π_2). Suponha que a linguagem não contém símbolos funcionais. Mostre que ϕ é uma verdade lógica se, e somente se, ϕ é verdadeira em todas as interpretações com no máximo n elementos.

(6) Obtenha Skolemizações e Herbrandizações da fórmula
$$\forall x \exists y \forall z \forall w \exists u \, P(x, y, z, w, u),$$
onde P é um símbolo relacional de aridade cinco.

(7) A última fórmula do problema (4) é uma verdade lógica. Obtenha uma Herbrandização desta fórmula e termos que advêm do teorema de Herbrand.