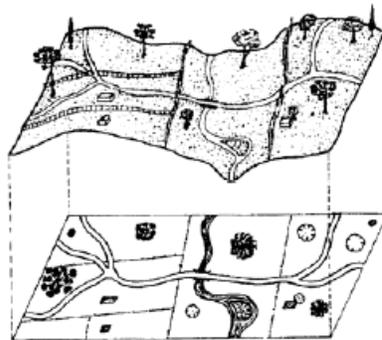


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A **topografia** é a ciência que permite representar graficamente uma parte suficientemente pequena da superfície terrestre para que esta possa ser substituída sem erro apreciável pelo **plano tangente** no centro da zona a representar (**em torno do ponto estação**).

Esta representação gráfica designa-se por **planta** ou **carta**, que se obtém projectando os pontos mais representativos do terreno sobre o plano horizontal considerado (normal à vertical do ponto estação).



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Prancheta com alidade

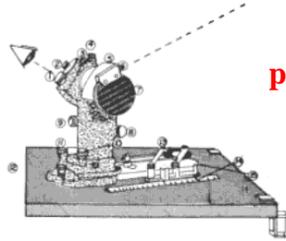
“plano horizontal” no ponto estação



O pormenor vai sendo desenhado no campo

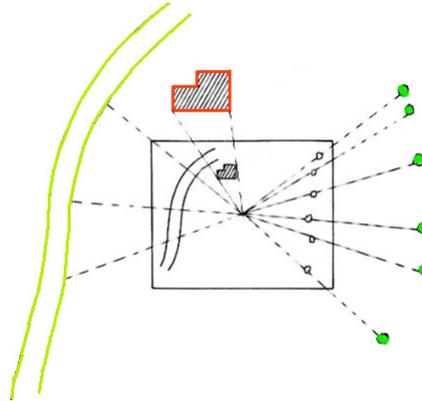
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**prancheta**



- COMPONENTES**
- 01. – Ocular para leitura da mira, dotado de regulador do retículo.
  - 02. – Ocular para leitura do limbo com regulador do retículo.
  - 03. – Janela para entrada de luz no limbo (leitura ângulos verticais).
  - 04. – Parafuso para ajuste do ângulo vertical.
  - 05. – Prisma do objetivo.
  - 06. – Colimador de tadas.

- 07. – Roda de movimento do ângulo vertical.
- 08. – Parafuso de ajuste do foco.
- 09. – Parafuso para o micrométrico vertical.
- 10. – Parafuso para a horizontalidade no sentido transversal.
- 11. – Parafuso para a horizontalidade no sentido longitudinal.
- 12. – Parafuso micrométrico de ajuste horizontal.
- 13. – Sistema pantográfico para o desenho.
- 14. – Régua graduada e escala.
- 15. – Medidor de pontos.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



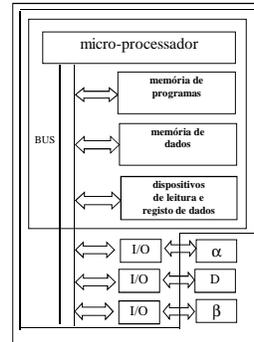
Utilização de pranchetas com alidade e mira, com as distâncias medidas por métodos taqueométricos

# LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

## Prisma reflector



**Estação total**  
Teodolito com  
distanciómetro  
infravermelho e  
prisma reflector



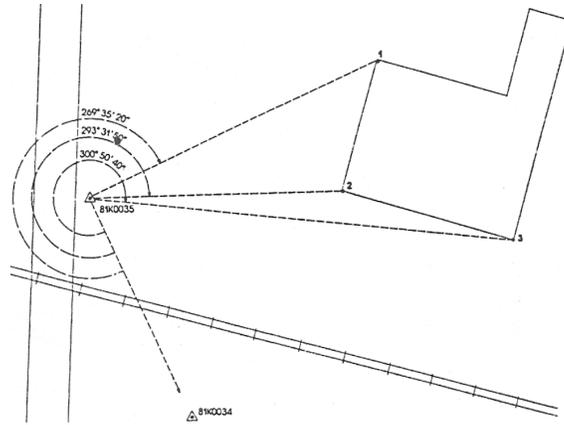
**Estação total**  
Teodolito com  
distanciómetro laser



# LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

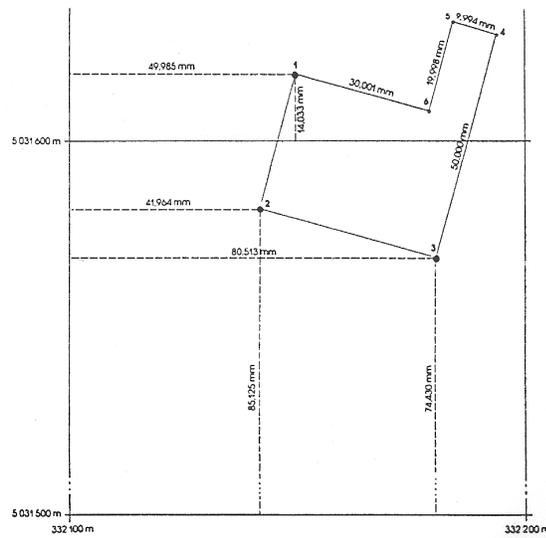


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



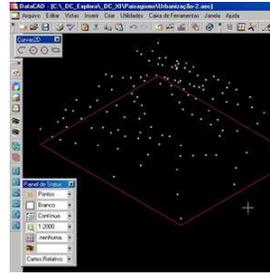
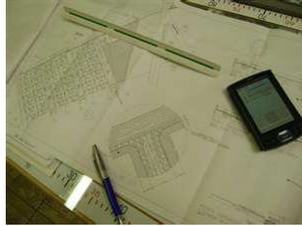
Trabalho de campo: **observações** (direcções + distâncias)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

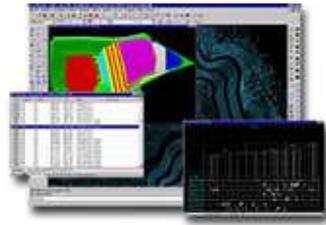


Trabalho de gabinete: cálculo de **coordenadas** + implantação

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

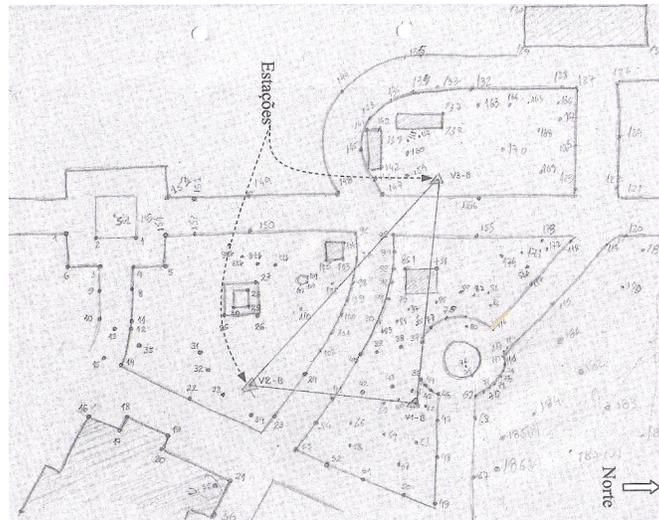


Nuvem de pontos



Cálculo, importação e implantação

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Esboço ou croquis

# LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Instituto Português de Cartografia e Cadastro

NOME DO FICHEIRO: 2006.X000

DIMENSÃO 2D

Código				Características gerais do elemento				Representação	Nome da célula	Observações
Ord	Sub	Fun	Un	Tipo	Nível	Extor	Extor/Extor	Extor	Extor	
<b>CONSTRUÇÕES</b>										
10	00	00	00	ÁREA	1	0	0	3		
<b>EDIFÍCIOS PÚBLICOS E OFICINAIS</b>										
<b>ADMINISTRAÇÃO CENTRAL</b>										
14	00	01	01	PARLAMENTO				10		
15	00	01	02	TRIBUNAL				11		
16	00	01	11	PRÉLIO				12		
17	00	01	12	POSTO-ESTADAL				13		
18	00	01	14	POSTO-FRONTAL				14		
<b>ADMINISTRAÇÃO REGIONAL</b>										
21	00	01	02	CÂMARA MUNICIPAL, SECRETARIA REGIONAL				10		
22	00	01	03	ASSEMBLEIA MUNICIPAL				11		
23	00	01	04	TRIBUNAL				12		
24	00	01	05	GOVERNO CIVIL				13		
<b>EDUCAÇÃO/INVESTIGAÇÃO</b>										
27	00	01	03	ESCOLA PRIMÁRIA				10		
28	00	01	03	ESCOLA PREPARATÓRIA E DO SECUNDÁRIA				11		
29	00	01	03	ESCOLA SUPERIOR				12		
<b>Saúde e Higiene</b>										
30	00	01	04	HOSPITAL				10		
31	00	01	04	SANATÓRIO				11		
32	00	01	04	MATERNIDADE				12		
<b>Outros</b>										
37	00	01	05	PLANETÁRIO				10		
38	00	01	05	OBSERVATÓRIO				11		
39	00	01	05	CENTRO CULTURAL				12		

Catálogo 1/10.000 do IGP

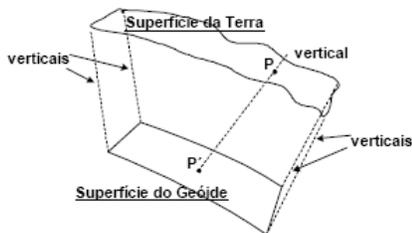
Catálogo de objectos

# LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



fcul

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

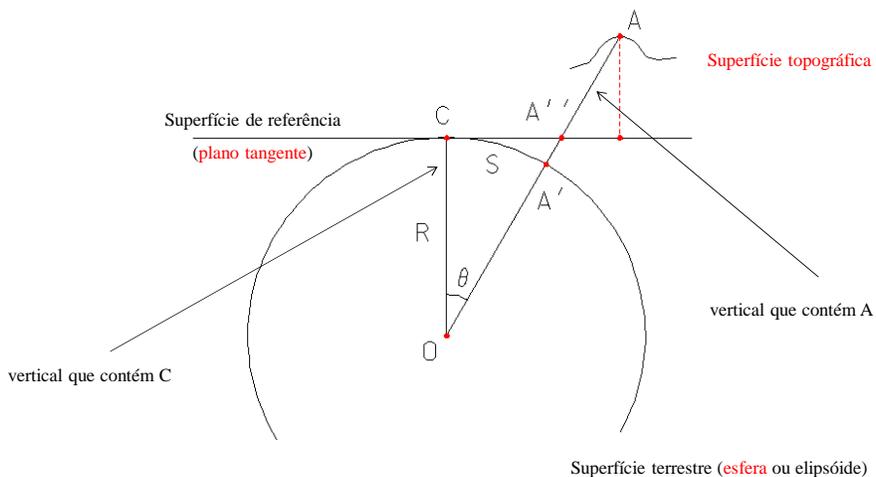


Quando se projeta verticalmente uma parte da superfície da Terra num **plano horizontal** supõe-se que todas as verticais (projetantes) são **paralelas**. Isto não é rigorosamente exacto pois na realidade as verticais são convergentes no centro da Terra.

Se a superfície a ser projectada for muito **extensa**, é necessário considerar a projectção não num plano horizontal mas numa superfície que seja sempre normal a qualquer vertical V contendo um ponto P qualquer da superfície considerada. Esta superfície ideal é o **geóide** (superfície de nível). Se a **Topografia**, para realizar seu objectivo, projecta os acidentes do terreno num plano, resta determinar **até onde isto é válido**, isto é, **até quando não se comete erro apreciável**.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Campo topográfico:** superfície terrestre em torno do ponto C (estação) onde a esfera pode ser aproximada pelo plano tangente nesse ponto.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Erro planimétrico (absoluto):  $\epsilon_p = CA'' - CA'$**

$$CA' = S = R\theta$$

$$\tan \theta = CA''/R \Rightarrow CA'' = R \tan \theta$$

$$\epsilon_p = R \tan \theta - R\theta = R(\tan \theta - \theta) \approx R(\theta + \theta^3/3 - \theta) = R\theta^3/3 = S^3/3R^2$$

Considerando  $R=6371$  km tem-se:

distância horizontal ao  
ponto estação

CA'' (m)	$\epsilon_p$ (mm)
1000	0.008
2000	0.066
3000	0.222
5000	1.027
10000	8.215

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Erro altimétrico (absoluto):  $\epsilon_A = A'A - A''A = A'A''$**

$$R^2 + CA''^2 = (R + \epsilon_A)^2$$

$$R^2 + CA''^2 = R^2 + \epsilon_A^2 + 2R\epsilon_A$$

$$\epsilon_A(\epsilon_A + 2R) = CA''^2$$

$$\epsilon_A = CA''^2 / (2R + \epsilon_A) \approx CA''^2 / 2R$$

Considerando  $R=6371$  km tem-se:

CA'' (m)	$\epsilon_A$ (m)
1000	0.078
2000	0.314
3000	0.706
5000	1.962
10000	7.848

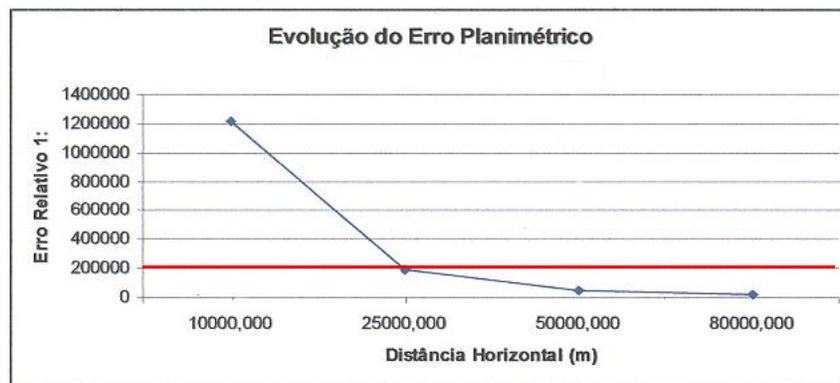
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os valores **absolutos** dos erros podem ter pouco significado. Interessa assim comparar o valor absoluto do erro com a distância respectiva, obtendo o **erro relativo**.

No caso do erro planimétrico relativo, tem-se:  $\frac{\epsilon_p}{S} = \frac{S^2}{3R^2}$ .

Distância horizontal (m)	Erro absoluto (m)	Distância curva (m)	Erro relativo (1/)
600.000	1.77441E-06	600.000	338140842
1000.000	8.21485E-06	1000.000	121730700
5000.000	0.001026858	4999.999	4869229
10000.000	0.008214842	9999.992	1217308
25000.000	0.128355917	24999.872	194770
50000.000	1.026818866	49998.973	48693
80000.000	4.205607561	79995.794	19021

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



O limite normalmente aceite para o erro relativo dos levantamentos topográficos planimétricos é igual a **1/200000**, o que se traduz numa distância máxima do ponto estação de **25 km**.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No caso do erro altimétrico relativo, tem-se:  $\frac{\epsilon_A}{S} = \frac{S}{2R}$ .

Distância horizontal (m)	Erro absoluto (m)	Erro relativo (m/km)
50.000	0.000	0.003924647
100.000	0.001	0.007849294
150.000	0.002	0.011773394
240.000	0.005	0.018838305
600.000	0.028	0.047095761
1000.000	0.078	0.078492936
5000.000	1.962	0.392464678
7000.000	3.846	0.549450549
10000.000	7.849	0.784929356
25000.000	49.058	1.962323391
50000.000	196.232	3.924646782
80000.000	502.355	6.279434851

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**E se a zona a  
representar for de  
grande extensão ?**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

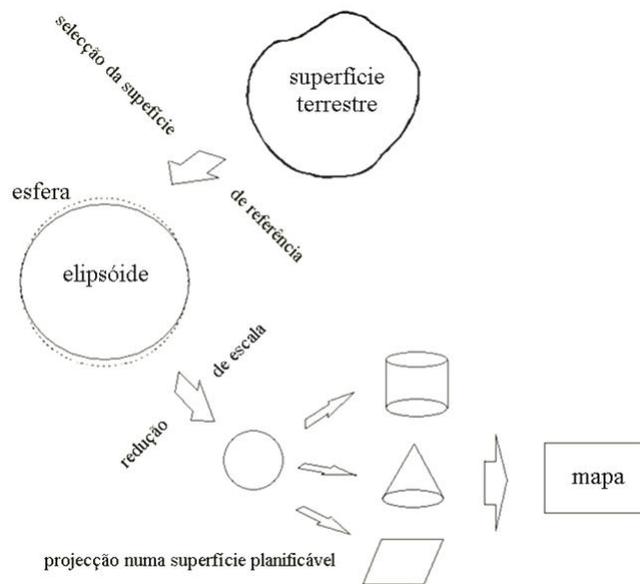
**Se a zona a representar for de grande extensão, **não**  
se pode desprezar a curvatura terrestre.**

**É então necessário recorrer à **geodesia**, ciência que  
se ocupa da determinação da forma e da dimensão  
do globo terrestre (neste sentido, a topografia é um  
ramo da geodesia).**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

# Revisão ...

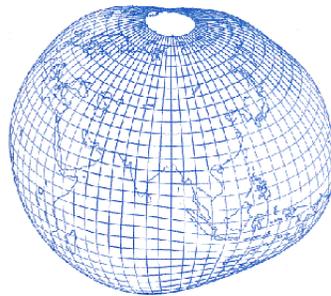
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

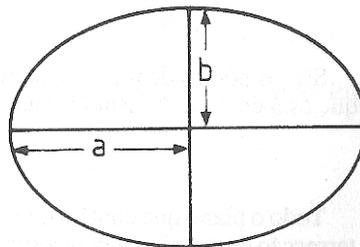
A Terra tem uma forma aproximadamente esférica, designada por **geóide**, superfície perpendicular em todos os seus pontos à direcção da gravidade, materializada pelo fio de prumo (**vertical**).

O geóide coincide com o nível médio das águas do oceano, consideradas em equilíbrio (extrai-se a acção dos ventos, marés e correntes), **não tendo uma representação matemática (analítica)**.



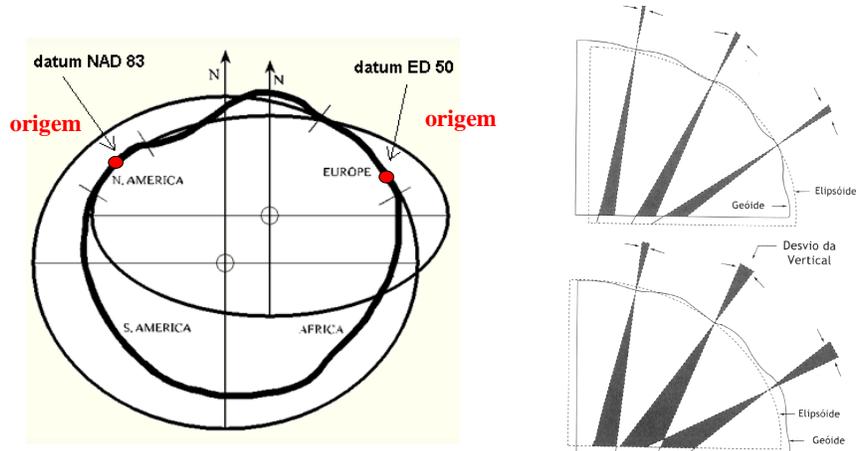
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Por não ter uma representação analítica, substitui-se o geóide por outra figura que tenha uma representação matemática conhecida e **cuj**a forma seja próxima do geóide: um **elipsóide de revolução**, formado por rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor:



Parâmetros do elipsóide:  $a$ ,  $b$ ,  $e^2=(a^2-b^2)/a^2$ ,  $f=(a-b)/a$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Posicionamento do elipsóide em relação ao geóide (**datum geodésico**)

**( $a, e, \varphi_0, \lambda_0, N_0, \alpha_0, \eta_0, \zeta_0$ )**

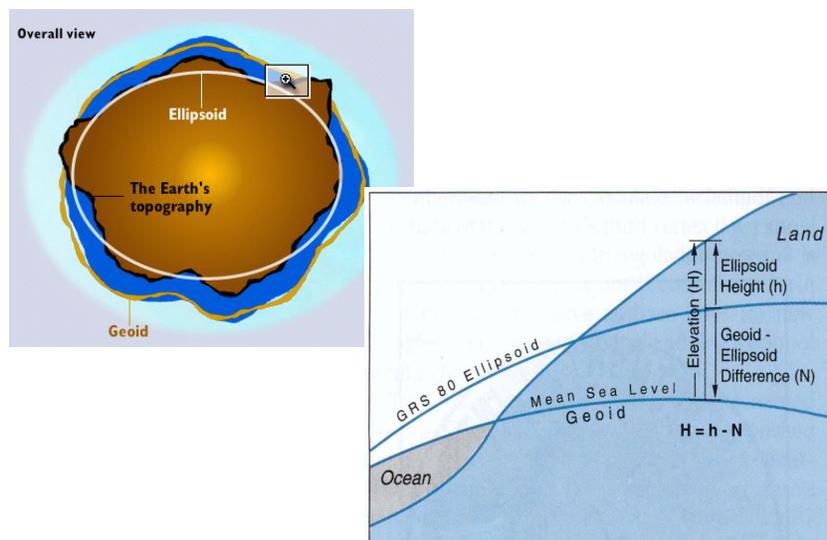
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nome do elipsóide de referência	Raio Equatorial (m)	Raio Polar (m)	Inverso do achatamento	Onde é usado
Everest Modificado (Malasia) Revisto por Kertau	6,377,304.063	6,356,103.038993	300.801699969	
Timbalai	6,377,298.56	6,356,097.55	300.801639166	
Esferóide Everest	6,377,301.243	6,356,100.228	300.801694993	
Maupertuis (1738)	6,397,300	6,363,806.283	191	França
Everest (1830)	6,377,276.345	6,356,075.413	300.801697979	Índia
Airy (1830)	6,377,563.396	6,356,256.909	299.3249646	Grã-Bretanha
Bessel (1841)	6,377,397.155	6,356,078.963	299.1528128	Europa, Japão
Clarke (1866)	6,378,206.4	6,356,583.8	294.9786982	América do Norte
Clarke (1880)	6,378,249.145	6,356,514.870	293.465	França, África
Helmert (1906)	6,378,200	6,356,818.17	298.3	
Hayford (1910)	6,378,388	6,356,911.946	297	Estados Unidos
Internacional (1924)	6,378,388	6,356,911.946	297	Europa

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

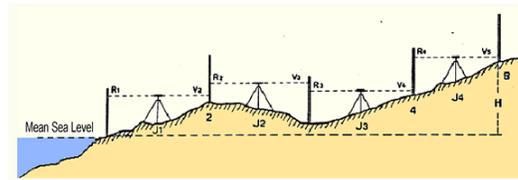
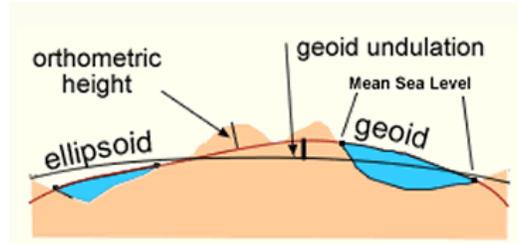
NAD 27	6,378,206.4	6,356,583.800	294.978698208	América do Norte
Krassovsky (1940)	6,378,245	6,356,863.019	298.3	Rússia
ED 50	6,378,388	6,356,911.946	297	Europa
WGS66 (1966)	6,378,145	6,356,759.769	298.25	EUA/DoD
Australian National (1966)	6,378,160	6,356,774.719	298.25	Austrália
Novo Internacional (1967)	6,378,157.5	6,356,772.2	298.24961539	
GRS-67 (1967)	6,378,160	6,356,774.516	298.247167427	
SAD-69 (1969)	6,378,160	6,356,774.719	298.25	América do Sul
WGS-72 (1972)	6,378,135	6,356,750.52	298.26	EUA/DoD
Datum 73 Hayford-Gauss Militar IGeoE	6,378,388	6,356,911.946	297	Portugal (Exército)
GRS-80 (1979)	6,378,137	6,356,752.3141	298.257222101	
NAD 83	6,378,137	6,356,752.3	298.257024899	América do Norte
WGS-84 (1984)	6,378,137	6,356,752.3142	298.257223563	
IERS (1989)	6,378,136	6,356,751.302	298.257	

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



**Relação entre a superfície física da Terra, o geóide e o elipsóide**

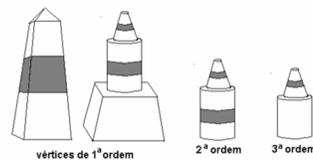
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



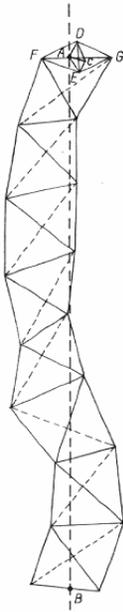
Geóide  $\Leftrightarrow$  nível médio do mar, determinado num marégrafo, como ponto origem da contagem das altitudes ortométricas

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

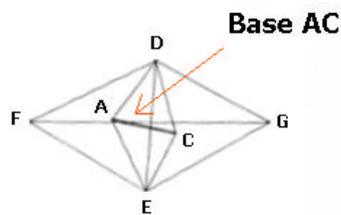
Uma **triangulação** é o método geodésico que visa cobrir um território extenso com uma rede de figuras geométricas cuja dimensão é conhecida com precisão, devendo os vértices dessas figuras, em geral triângulos, ser materializados no terreno através de construções estáveis (vértices geodésicos). Para efeitos de implementação de uma rede geodésica, é necessário efectuar **observações angulares e de distância** de forma a relacionar os vértices entre si.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A primeira operação no estabelecimento de uma rede geodésica é **medir rigorosamente o comprimento de uma base** e, em seguida, estacionando nas suas extremidades, visar pontos que constituem os vértices de triângulos da rede; a partir daí, repete-se o procedimento, estacionando em todos os vértices geodésicos, até cobrir a totalidade do território.



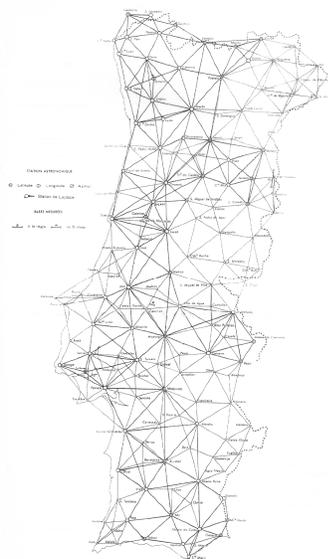
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Numa rede geodésica de **1ª ordem**, onde os vértices estão distanciados de 40 a 60 km uns dos outros, os erros na medição dos ângulos devem estar compreendidos entre **0.3''** e **1.0''** (para tornar estes valores mais claros,  $\sin 1'' = 1/206265$ , o que equivale a, para uma distância de 206.265 m, um arco de 1 mm, correspondente a um erro relativo de  **$4.8 \times 10^{-6}$** ), enquanto que os erros relativos nas distâncias devem ser inferiores a  **$10^{-6}$**  (para uma base de 10 km de comprimento, este valor representa um erro de 1 cm).

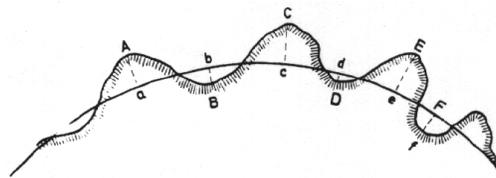
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Devido aos erros cometidos na observação das distâncias e dos ângulos, verifica-se uma propagação e acumulação de **erros de escala e de orientação** ao longo da rede; para limitar a influência destes erros, devem evitar-se triângulos obtusos (nenhum ângulo deve ser inferior a 30 graus nem superior a 140 graus), embora o método de controlo mais evidente consiste em estabelecer em diversos locais da rede **novas bases** (possibilitando assim a re-escalagem da rede), assim como **pontos de Laplace** (que permitem comparar as coordenadas astronómicas com as coordenadas geodésicas, possibilitando assim a re-orientação da rede).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

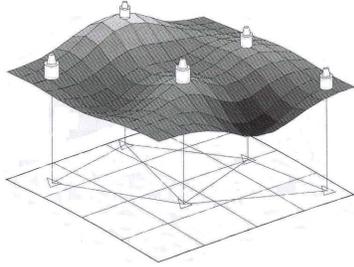


**Rede geodésica de 1ª ordem**



Projeção dos vértices  
geodésicos no elipsóide

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



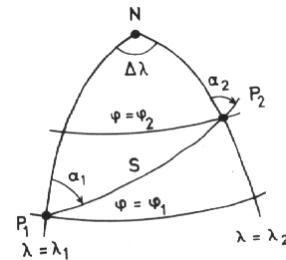
Triangulação de uma rede geodésica no terreno e na superfície de referência.

Redução das observações ao elipsóide

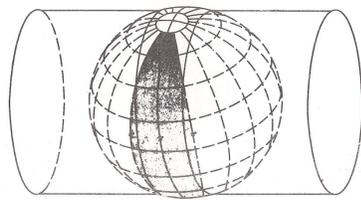
**Transporte de coordenadas a partir da origem do datum:**

**Problema directo:** dados  $(\varphi_1, \lambda_1)$ ,  $S$ ,  $\alpha_1$  determinar  $(\varphi_2, \lambda_2)$

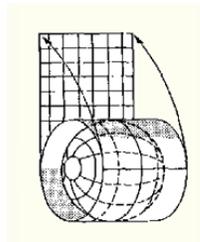
**Problema inverso:** dados  $(\varphi_1, \lambda_1)$ ,  $(\varphi_2, \lambda_2)$  determinar  $S$ ,  $\alpha_1$



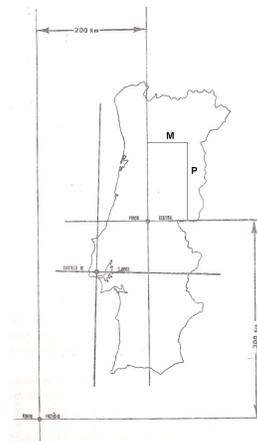
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Projeção do elipsóide no cilindro



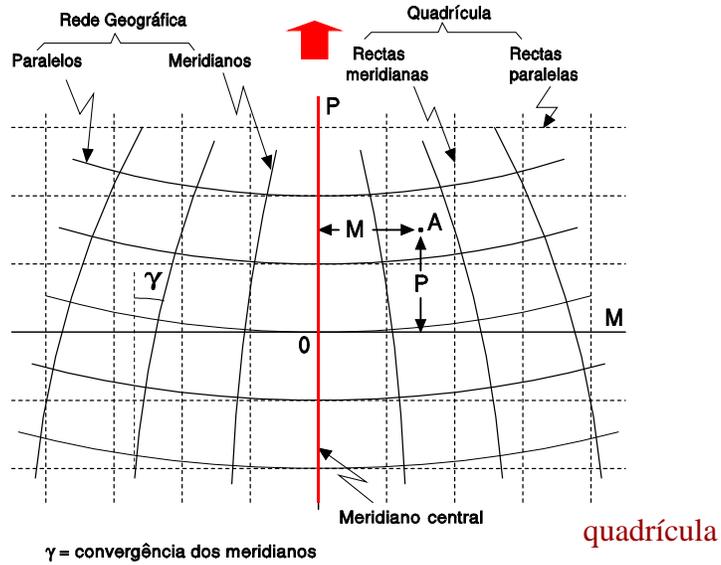
Planificação do cilindro



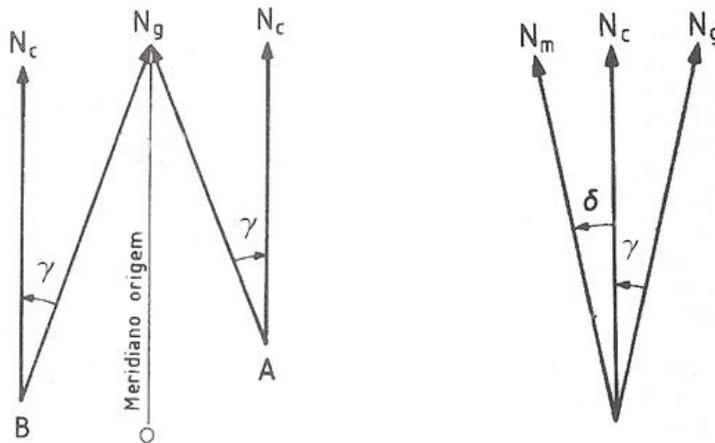
**Projeção de Gauss:** a cada ponto  $(\varphi, \lambda)$  do elipsóide faz corresponder o ponto  $(M, P)$  do plano  
 (M=distância à meridiana, projecção do meridiano central da projecção, P=distância à perpendicular)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Norte cartográfico



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



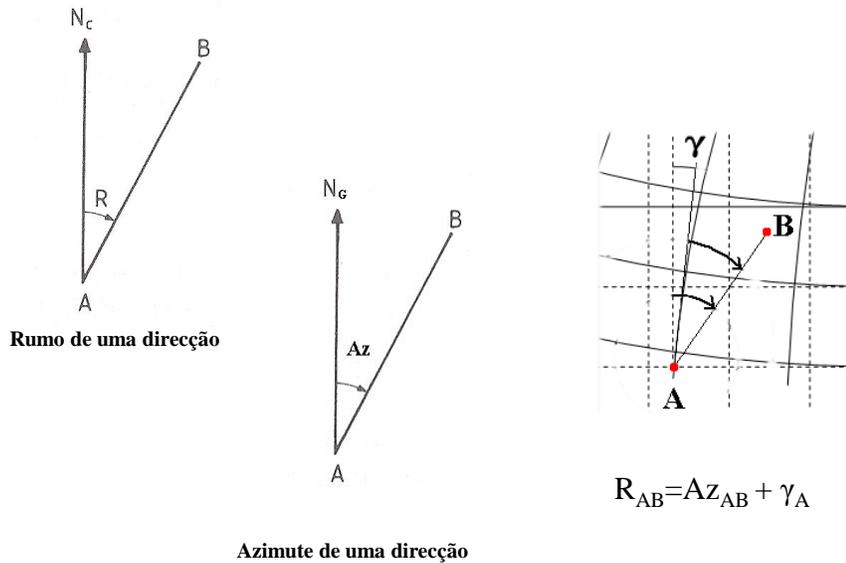
Convergência de meridianos  $\gamma$

na projecção de Gauss:  $\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$

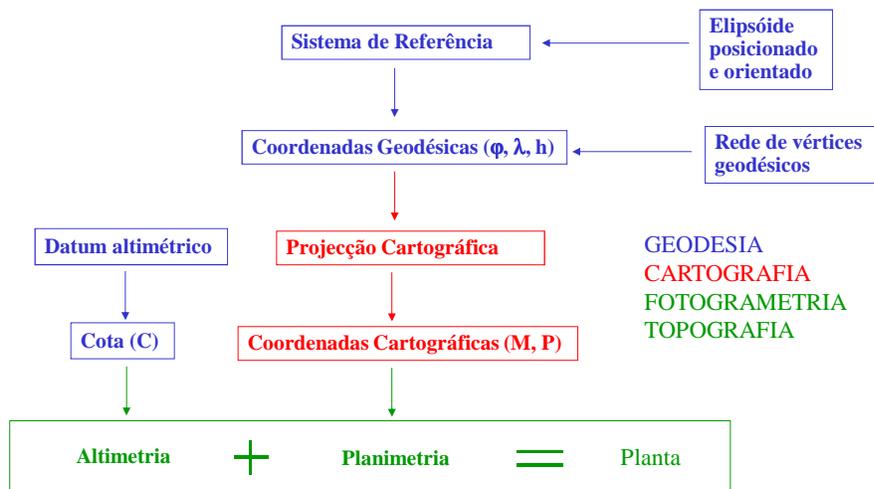
Relação entre os  $N_C$ ,  $N_G$  e  $N_m$

( $\delta$  = declinação magnética)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### **Datum Lisboa (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)**

O Datum Lisboa foi estabelecido nos finais do século XIX.

As observações angulares que deram origem a este Datum foram realizadas entre 1863 e 1888 com teodolitos Troughton e Repsold. A orientação da rede foi dada pelo azimute Lisboa -> Serves e a sua escala pela base da Chamusca medida com decâmetro de Repsold. O cálculo foi realizado pelo método das condições de observação, tendo sido determinada em primeiro lugar a triangulação fundamental e posteriormente a restante rede de primeira ordem, dividida em vários blocos.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### **Datum 73 (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)**

O Datum 73 foi estabelecido na década de 1970, posteriormente à reobservação da rede geodésica de Portugal Continental.

As observações angulares foram efectuadas na década de 1960 com teodolitos Wild T3 e T4, tendo a orientação da rede sido estabelecida pelo azimute Melriça TF4 -> Montargil. A escala da rede foi dada pela base de invar de Vilar Formoso e por vários outros lados observados com Geodímetro AGA, Electrotape e Telurómetro.

Foi escolhido para ponto origem do Datum um vértice geodésico no centro do País (ao contrário do Datum Lisboa que tem a sua origem numa extremidade do território) por forma a minimizar as eventuais distorções da rede.

O cálculo da rede geodésica de primeira ordem foi realizado num só bloco, pelo método de variação de coordenadas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

	IGP 1/10 000	IGP 1/50 000, 1/100 000	IGP 1/200 000, 1/400 000, 1/500 000, 1/600 000	UTM	IgeOE 1/25 000
Elipsóide a e <sup>2</sup>	Hayford (1909) 6378388.0 m 6.72267002233x10 <sup>-3</sup>	Bessel (1841) 6377397.0 m 6.71921860725x10 <sup>-3</sup>	Hayford (1909) 6378388.0 m 6.72267002233x10 <sup>-3</sup>	Hayford (1909) 6378388.0 m 6.72267002233x10 <sup>-3</sup>	Hayford (1909) 6378388.0 m 6.72267002233x10 <sup>-3</sup>
Datum Origem das coordenadas Latitude geográfica Longitude geográfica	73 Melriça 39° 41' 37.300'' -8° 07' 53.310''	Lisboa Castelo S. Jorge 38° 42' 43.360'' -9° 07' 54.860''	Lisboa Castelo S. Jorge 38° 42' 43.360'' -9° 07' 54.860''	ED50 Potsdam	Lisboa Castelo S. Jorge 38° 42' 43.360'' -9° 07' 54.860''
Projeção Latitude da origem da projeção Longitude da origem da projeção Falsa origem Norte Falsa origem Este Factor de escala no meridiano central	Gauss 39° 40' -8° 07' 54.862'' 86.990 m -180.598 m 1.0000	Bonne 39° 40' -8° 07' 54.862'' 0 m 0 m 1.0000	Gauss 39° 40' -8° 07' 54.862'' 0 m 0 m 1.0000	Gauss 0° 00' 00.00'' -8° 59' 59.999'' 0 m 50 000 m 0.9996	Gauss 39° 40' -8° 07' 54.862'' 300 000 m 200 000 m 1.0000
Sistema de eixos utilizado					

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### PT-TM06/ETRS89 - European Terrestrial Reference System 1989

O ETRS89 é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) estabelecido através de técnicas espaciais de observação. No simpósio da EUREF realizado em Itália em 1990 foi adoptada a seguinte resolução: "A Sub-comissão da IAG para o Referencial Geodésico Europeu (EUREF) recomenda que o sistema a ser adoptado pela EUREF seja coincidente com o ITRS na época de 1989.0 e fixado à parte estável da Placa Euro-Asiática, sendo designado por Sistema de Referência Terrestre Europeu 1989 (European Terrestrial Reference System – ETRS89)".

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª e 2ª ordens do Continente foi observada com GPS, tendo o seu ajustamento sido realizado fixando as coordenadas dos pontos estacionados nas anteriores campanhas internacionais.

A agência EuroGeographics recomenda a utilização das seguintes projecções cartográficas: Transversa de Mercator, para escalas superiores a 1/500 000; cónica conforme de Lambert, com dois paralelos de escala conservada, para escalas inferiores a 1/500 000

Desde 2006, para o Território Continental, os parâmetros da projecção Transversa de Mercator referida são os que no quadro abaixo se listam.

**Este sistema deverá substituir completamente os anteriormente usados, que se consideram obsoletos.**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

PT-TM06/ETRS89 - European Terrestrial Reference System 1989

Elipsóide de referência:	GRS80	Semi-eixo maior: $a = 6\,378\,137$ m Achatamento: $f = 1 / 298,257\,222\,101$
Projeção cartográfica:	Transversa de Mercator	
Latitude da origem das coordenadas rectangulares:	39° 40' 05",73 N	
Longitude da origem das coordenadas rectangulares:	08° 07' 59",19 W	
Falsa origem das coordenadas rectangulares:	Em M (distância à Meridiana): 0 m Em P (distância à Perpendicular): 0 m	
Coefficiente de redução de escala no meridiano central:	1,0	

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Fim da revisão ...**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para se obter as coordenadas (M, P, C) é necessário recorrer a um conjunto de pontos de referência - **vértices geodésicos**, com coordenadas conhecidas.

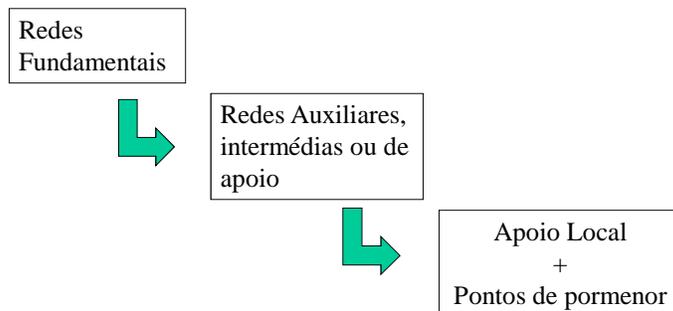
**Redes** {  
- Geodésicas e topográficas (vértices)  
- Nivelamento geométrico (marcas)

**Sistema de Referência Topográfico ≡ Plano Cartográfico**

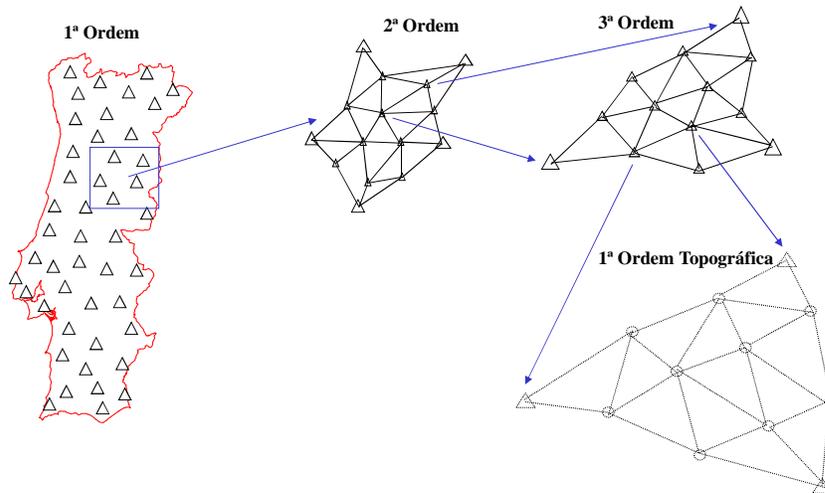
**Referencial topográfico ≡ Rede Geodésica**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Adensamento: processo que permite obter um levantamento perfeitamente referenciado e enquadrado em qualquer sistema cartográfico.



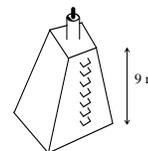
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

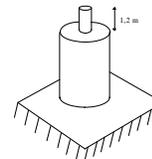
### 1ª Ordem geodésica

- Cobertura geral do Território
- Lados de 30-40 km
- Torres encimadas por pilares



### 2ª Ordem geodésica

- Adensamento intermédio
- Lados de 10-20 km
- Pilares circulares ou marcos ("Bolembreanas")
- moinhos, depósitos de água e terraços, etc



### 3ª Ordem geodésica

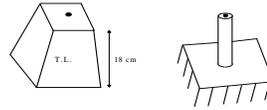
- Adensamento local
- Lados de 4-5 km (ev. 10 km)
- Bolembreanas
- torres de igrejas, antenas, etc.

**Cada triângulo é suficientemente pequeno para que no seu interior a superfície terrestre possa ser considerada plana.**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 1ª Ordem cadastral

- Adensamento topográfico
- Lados de 1,5 a 2 km
- pequenos marcos ao nível do solo ou sobre construções (torres de igrejas, antenas, etc.)



### 2ª Ordem cadastral

- Lados de 0,5 a 1,5 km;
- marcos provisórios, ou estaca ou marcas cravadas no solo.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### **Redes Geodésicas**

- marcos geodésicos
- elementos proeminentes em construções;
- marcos ao nível do solo;

### **Apoio local**

- marcas provisórias no solo;
- pontos notáveis do terreno ou de estacionamento momentâneo (sem sinalização específica)

### Esqueleto do Levantamento:

- pontos de apoio existentes;
- materialização de novos pontos de apoio;
- definição de visadas

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O Levantamento Topográfico consiste nas seguintes operações de campo:

- 1 – Reconhecimento, escolha, implementação da rede local
- 2 – Ligação da rede local à rede geodésica
- 3 – Levantamento de pormenor apoiado na rede local
- 4 – Elaboração da Planta – desenho gráfico num CAD

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O objectivo desta disciplina é a aprendizagem de métodos e técnicas de aquisição de dados que possibilitem a determinação das coordenadas cartográficas de um conjunto de pontos que representem geometricamente uma parcela da superfície do terreno, com rigor e aproximação adequados.

Representação  
Geométrica do  
Terreno

- ⇒ {
- Determinação das coordenadas cartográficas (M,P) dos elementos sobre a superfície
  - Determinação do relevo da superfície através da coordenada altimétrica  $C=C(M,P)$  de um conjunto representativo de pontos

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os trabalhos topográficos dividem-se em **levantamentos** e **implantações** (piquetagens).

Os **levantamentos** consistem na recolha no terreno dos elementos necessários à elaboração dos modelos desse terreno.

As **implantações** consistem na materialização, sobre o terreno, das representações esquemáticas projectadas previamente sobre os modelos.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Método topográfico:** áreas pequenas e **escalas grandes** ( $\geq 1/500$ ); método clássico que recorre à medição “directa” no terreno usando os instrumentos topográficos (teodolito, distanciómetro, níveis e GPS).

**Método fotogramétrico:** áreas grandes e **escalas pequenas** ( $< 1/500$ ); método remoto que recorre à medição indirecta sobre modelos fotográficos adquiridos por avião (necessita de Pontos Fotogramétricos coordenados pela Topografia).

**Factores que influenciam a escolha:** economia, tempo e recursos (relação custo/benefício;)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Escala** é a relação constante entre a dimensão  $\ell$  de um modelo (levantamento topográfico) e a dimensão correspondente  $L$  do objecto representado por esse modelo. Usualmente representa-se a escala por uma fracção com numerador igual à unidade,

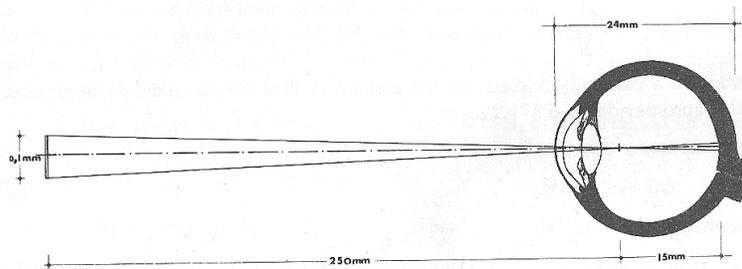
$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M}$$

onde  $M$  é o **módulo** da escala.

Uma escala é tanto maior quanto menor for o seu módulo  
(ex: 1/500 é uma escala grande, 1/100000 é uma escala pequena)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O diâmetro médio dos elementos sensíveis da retina é da ordem de 4.5 micron, que corresponde a um **poder separador** do olho humano de aproximadamente 1'; este ângulo, à distância de 25 cm corresponde a um círculo de 0.1 mm de diâmetro.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O erro de graficismo define-se como o raio do menor círculo no interior do qual se pode distintamente marcar um ponto (isto é, admite-se que um ser humano não distingue um segmento de um ponto se este tiver um comprimento igual ou menor a **0.1 mm**, valor que corresponde ao limite da percepção visual). Depende da acuidade visual e da habilidade do desenhador, assim como dos recursos técnicos de que dispõe.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Da definição de limite de percepção visual decorre que o erro de graficismo  $\epsilon_g$  é independente da escala (**valor fixo**); qualquer medição de comprimento efectuada numa representação cartográfica tem associado um erro absoluto de  $\pm 0.1$  mm.



Como consequência, toda a distância ou pormenor do terreno cuja dimensão reduzida à escala seja igual ou menor ao erro de graficismo ou **não é representada** ou **é representada com simbologia convencional**.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: que **distâncias** entre pontos no terreno são desprezáveis se a escala da carta for **E=1/500**?

Convertendo o erro de graficismo para a distância correspondente no terreno, tem-se:

$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M} \Rightarrow L = \ell \times M = 0.1 \text{ mm} \times 500 = 50 \text{ mm} = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

e se a escala da carta for **1/2000**?

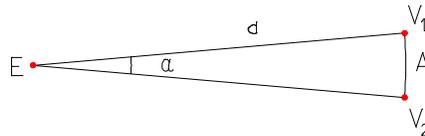
$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M} \Rightarrow L = \ell \times M = 0.1 \text{ mm} \times 2000 = 200 \text{ mm} = 0.20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: que **ângulos** subtendidos entre pontos no terreno são desprezáveis se a escala da carta for **E=1/M**?

Neste caso é necessário considerar a **distância d** entre o ponto estação E e os pontos visados  $V_1$  e  $V_2$  pois para um mesmo ângulo  $\alpha$  o comprimento do arco A subtendido depende de d, podendo estabelecer-se a relação:

$$\frac{2\pi \times d}{A} = \frac{360^\circ}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{A}{d}$$



Como A deve ser maior que 0.1 mm, sendo D a distância no terreno entre o ponto estação e os pontos visados, tal que  $d=D/M$ , tem-se:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{0.0001 \text{ m} \times M}{D} = 0.005729 \times \frac{M}{D}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Se o comprimento dos lados for igual a **10 m** e se  $E=1/500$ , tem-se:

$$\alpha = 0.005729 \times \frac{M}{D} = 0.005729 \times \frac{500}{10} = 0.28654^\circ$$

Para a mesma escala, se o comprimento dos lados for igual a **100 m**, tem-se

$$\alpha = 0.005729 \times \frac{M}{D} = 0.005729 \times \frac{500}{100} = 0.028654^\circ$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Designa-se **erro tolerável (ou tolerância)**  $\varepsilon_t$  para a escala  $E$  como sendo a menor distância do terreno que pode ser medida sobre a planta,

$$\varepsilon_t = \varepsilon_g \cdot M$$

Quanto maior é o erro tolerável de uma escala, menor é a sua precisão e como  $\varepsilon_t$  é proporcional a  $M$ , pode dizer-se que **uma escala é tanto mais precisa quanto menor for  $M$** .



A escala seleccionada para representar uma dada zona deve ser tal que **a incerteza do levantamento não apareça na planta**, ou seja, o erro tolerável deve ser maior do que a incerteza do levantamento (devido aos erros cometidos nas observações, que dependem em grande parte dos aparelhos utilizados).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Fixada a escala** do levantamento:

1. calcula-se a menor dimensão no terreno representável a essa escala, ficando igualmente **implícita a precisão** com que o levantamento deve ser efectuado, de tal forma que a incerteza associada à posição de cada ponto seja inferior ao erro tolerável.
2. a precisão do **equipamento** adoptado para realizar o levantamento tem que ser **compatível** com a precisão pretendida para as coordenadas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Um levantamento efectuado com equipamento cuja precisão seja maior (incerteza menor) do que o erro tolerável designa-se por **levantamento regular**.

Sendo a carta regular, é lícito inferir que um comprimento  $(l \pm \epsilon_g)$  medido sobre a carta corresponde a um comprimento  $(l \pm \epsilon_g) \cdot M$  no terreno.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

De  $\varepsilon_p \leq \varepsilon_g \cdot M \Rightarrow M \geq \varepsilon_p / \varepsilon_g$  ou  $M \geq S^3 / 3R^2\varepsilon_g$ , de onde se obtém a **maior distância representável sem deformação** para a escala de módulo M:

$$S = \sqrt[3]{3R^2\varepsilon_g M}$$

<b>E = 1/500</b>	<b>E = 1/1000</b>	<b>E = 1/2000</b>
<b>S &lt; 18260 m</b>	<b>S &lt; 23006 m</b>	<b>S &lt; 28986 m</b>

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\varepsilon_L \leq \varepsilon_t = \varepsilon_g \cdot M$$

Exemplos ( $\varepsilon_g = 0.1\text{mm}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} M=1000; \varepsilon_L \leq 10\text{cm} \\ M=500; \varepsilon_L \leq 5\text{cm} \\ M=250; \varepsilon_L \leq 2.5\text{cm} \end{array} \right.$$

O limite imposto pelo erro tolerável do levantamento obriga a uma escolha adequada do equipamento.

### Critérios:

1)  $\varepsilon_L = 2.6 \cdot \sigma_D$ , com  $\sigma_D^2 = p^2 + D^2 q^2$  ou  $\varepsilon_L = 2.6 \cdot \sigma_\alpha^{\text{rad}} \cdot D$

2)  $\varepsilon_L = \max\{\sigma_{M_i}, \sigma_{P_i}\}$

Em 1), no caso de E=1/500, tem-se:

$$\varepsilon_L \leq 5\text{cm} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_D \leq 5\text{ cm} / 2.6 = 1.9\text{ cm} \\ \sigma_\alpha \leq 5\text{ cm} / 2.6 D; \text{ para } D = 100\text{ m tem-se } \sigma_\alpha = \frac{5\text{ cm}}{2.6 \times 100\text{ m}} \frac{180}{\pi} \times 3600 = 40'' \end{array} \right.$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Instrumentos

- Teodolitos ou goniómetros;
- Distanciómetros e taqueómetros;
- Níveis;
- Estações totais;
- Receptores GPS

### Acessórios

- Tripés;
- Alvos, reflectores e prismas;
- Bastões ou varas de pontaria;
- Réguas ou miras;
- Bases de centragem;
- Níveis tóricas e circulares;
- Fitas métricas;
- Etc.

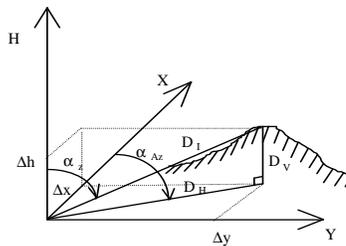
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os aparelhos destinados à medição de **ângulos (mais exactamente direcções)** têm o nome genérico de goniómetros.

Em topografia apenas se consideram ângulos medidos em dois planos: **horizontal ou azimutal** nas operações planimétricas e **vertical** nas operações altimétricas.

Na avaliação de ângulos devem distinguir-se duas espécies:

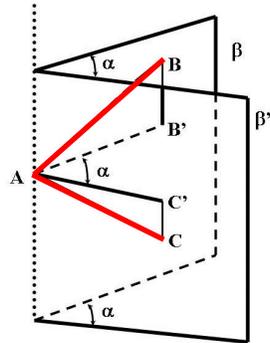
- ângulo entre **duas direcções quaisquer**
- ângulo entre **uma direcção de referência e uma direcção qualquer**



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

{ Teodolitos ou goniómetros (**Norte cartográfico**)  
Bússolas (**Norte magnético**)  
Giroscópios (**Norte geográfico**)

Vertical do lugar



$\alpha$  é o ângulo diedro entre os dois planos verticais.

o ângulo horizontal contido entre as duas direções AB e AC que pertencem aos planos  $\beta$  e  $\beta'$ , coincide com o ângulo  $\alpha$  diedro entre os dois planos.

Ângulo horizontal ou azimutal  $\alpha$  de duas direcções que passam por um ponto A (materializadas pelas visadas AB e AC) é o rectilíneo do diedro formado pelos planos verticais que contêm essas direcções, ou seja, o ângulo das projecções dessas direcções sobre o plano horizontal.

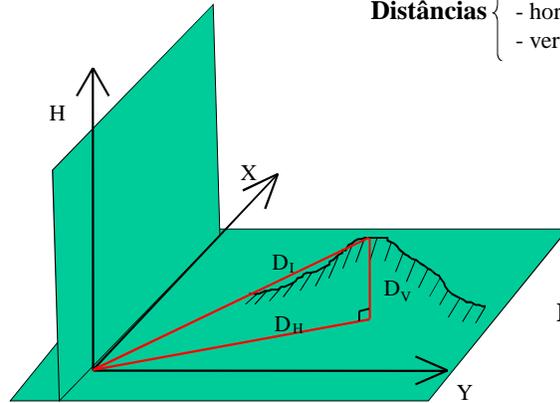
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os ângulos verticais podem classificar-se como:

- ângulos de **inclinação**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é o plano horizontal
- ângulos **zenitais**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é a vertical para o zénite
- ângulos **nadirais**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é a vertical para o nadir

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

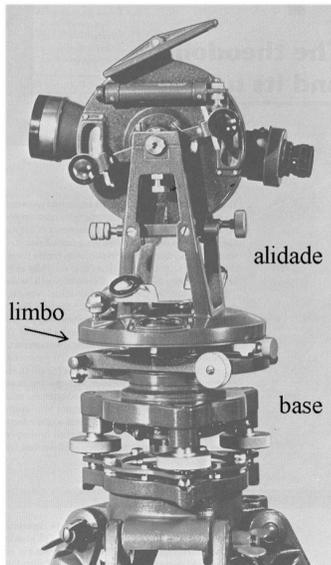
Os aparelhos destinados à medição de **distâncias** têm o nome genérico de taqueómetros ou distanciómetros.



**Distâncias** {  
 - inclinadas;  
 - horizontais;  
 - verticais ou desniveis;

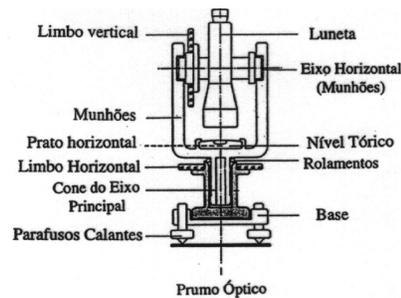
**Medições** {  
 - directas;  
 - indirectas

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



As 3 peças fundamentais em que um instrumento se pode decompor são:

1. Base
2. Limbo
3. Alidade



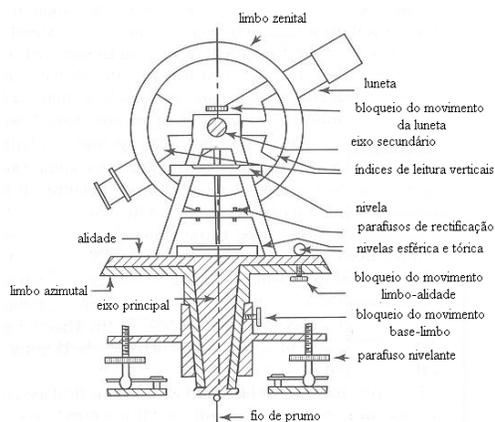
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



1. A **base** é constituída por um cilindro apoiado em 3 braços, em cujas extremidades se encontram 3 parafusos nivelantes destinados a horizontalizar a base (e por construção a verticalizar o **eixo principal**).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

2. Sobre a parte superior da base apoia-se o **limbo graduado**. Conforme o tipo de teodolito, o limbo pode ser colocado solidário com a base, solidário com a alidade ou mover-se independentemente destas 2 peças.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

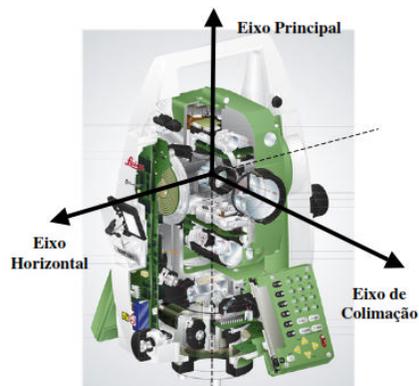
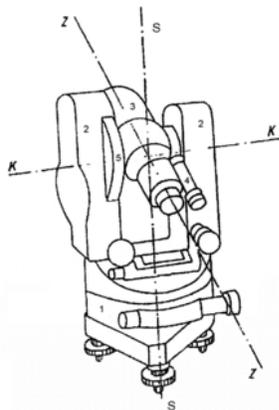


3. Apoiada num tronco cónico que gira no interior da base encontra-se a **alidade**, que transporta o índice de leitura. Sobre a alidade existem 2 montantes nos quais assenta o **eixo secundário**, que por sua vez suporta a luneta (**eixo de colimação**).

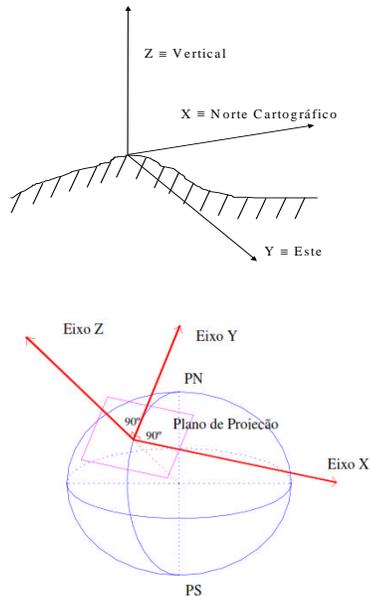
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Referencial Instrumental:** (sistema triortogonal associado ao **instrumento** de medida)

- **Plano primário:** plano perpendicular ao **eixo principal**;
- **Eixo principal:** eixo de rotação da alidade;
- **Plano secundário :** plano que contém o eixo principal e o plano de referência azimutal;



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



### Referencial Topocêntrico-horizontal:

(sistema triortogonal associado ao **ponto estação**)

- **Plano primário:** plano horizontal;
- **Plano secundário:** plano vertical do meridiano de lugar;
- **Primeiro eixo horizontal:** direcção do **Norte Cartográfico**;
- **Segundo eixo horizontal:** normal ao plano secundário, formando um sistema angular dextrógiro;

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



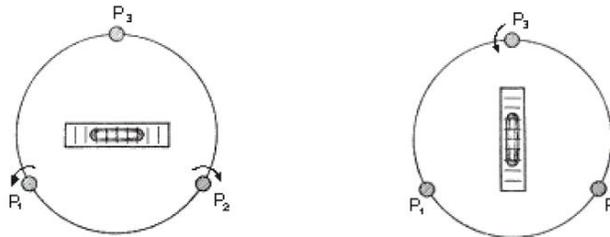
nivela esférica para definir  
um plano horizontal



nivela tórica para definir  
uma direcção horizontal

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

- 1) Colocar a nivela de modo que a directriz desta fique aproximadamente paralela ao plano vertical que passa por dois dos parafusos nivelantes;
- 2) Rodar esses dois parafusos em sentidos contrários até calar a nivela;
- 3) Rodar a nivela de 100 graus em torno do eixo principal;
- 4) Voltar a calar a nivela rodando agora apenas o terceiro parafuso nivelante.

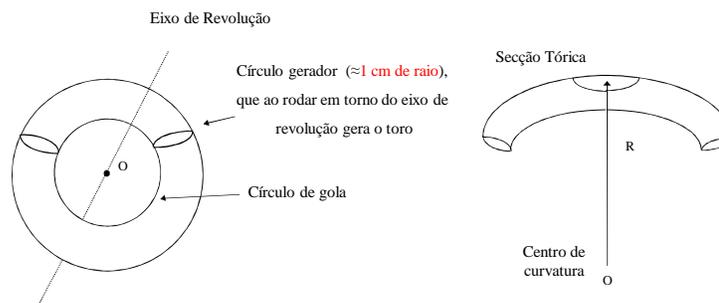


Representação esquemática dos parafusos nivelantes de um teodolito e da nivela tórica, durante o procedimento de verticalização do eixo principal.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

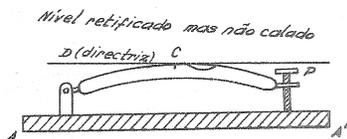
As **nivelas** de bolha são acessórios de que permitem a horizontalização de um plano ou a horizontalização de uma direcção. As nivelas tóricas são **secções de toros de revolução** com círculo de gola de **20 a 100 metros de raio**.

Normalmente os teodolitos possuem 1 ou 2 níveis solidários com a alidade. Quando uma nivela gira em torno do eixo principal e a bolha permanece centrada, isto confirma a perpendicularidade do eixo de rotação em relação à directriz da nivela, dentro do respectivo limite de sensibilidade. Se ocorrer um deslocamento da bolha para diferentes posições do nível em torno do eixo, a **rectificação** do nível torna-se necessária.

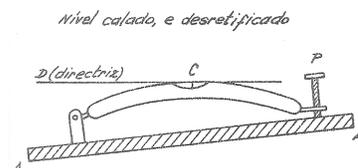


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

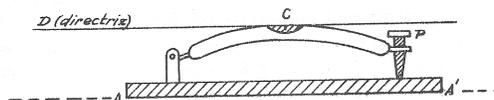
A nível apoia-se na **base AA'**, de um lado por uma charneira e do outro através de um parafuso P que se destina a levantar ou baixar essa extremidade por forma a levar a bolha a ocupar o **centro C** da graduação. Chama-se **directriz D** de uma nível à tangente à linha média no centro da graduação.



Diz-se que uma nível está **retificada** quando a sua directriz D é paralela à linha de apoio AA'.

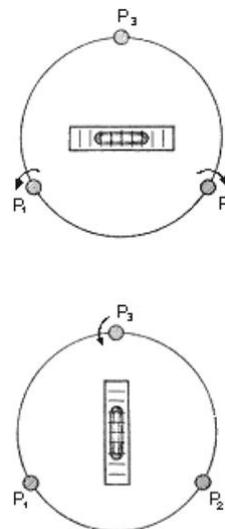


Diz-se que uma nível está **calada** quando o centro da bolha coincide com o centro da graduação.



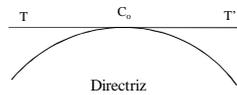
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Constatada a **necessidade de rectificação** o procedimento é o seguinte: colocar a directriz do eixo da nível a ser retificada mais ou menos na direção de dois parafusos calantes e centrar a bolha com rigor; girar a alidade 180°, prender o movimento da alidade e deixar a bolha estabilizar e observar a magnitude do deslocamento da bolha em relação ao centro da graduação existente no tubo da nível. Mantendo fixa a alidade efectuar a correcção do deslocamento da bolha, fazendo com que ela volte ao centro do tubo: esta correcção é efectuada em duas etapas, **metade** do deslocamento deve ser introduzida actuando nos **parafusos de ajuste** existente na própria nível e a outra **metade** num dos dois **parafusos calantes** que ainda continuam paralelos à directriz do eixo da nível.



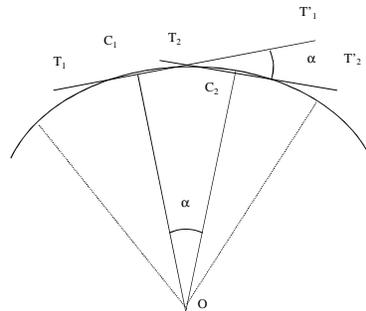
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A *sensibilidade da nívela* é dada pela variação de inclinação da directriz (TT') do nível de valor  $\alpha$  correspondente ao deslocamento da bolha de uma divisão (2mm)

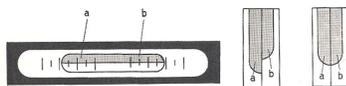


**Em topografia :** T16 = 30"  
T2 = 20"

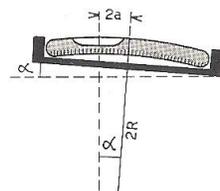
**Em geodesia:** T3 = 6,5"  
T4 = 1 a 2"  
DKM3 = 2"



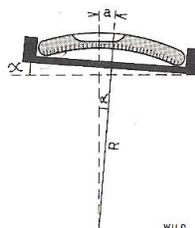
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



calagem da bolha por coincidência das imagens das duas extremidades



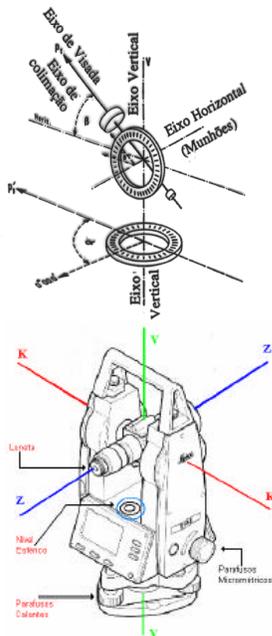
mais sensível



menos sensível

a mesma inclinação  $\alpha$  provoca um deslocamento **a** na nívela menos sensível e um deslocamento **2a** na nívela mais sensível

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A **tri-ortogonalidade** entre os eixos do sistema de referência topocêntrico e a horizontalidade do plano primário impõem condições de construção e de operacionalidade dos teodolitos.

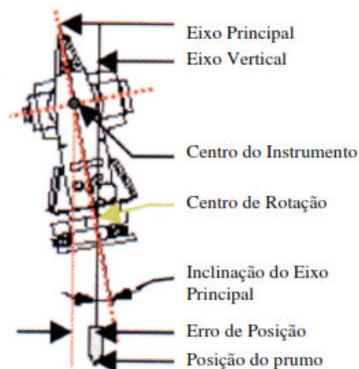
- 1 - **Eixo principal** coincidente com a vertical;
- 2 - Plano do sistema de leitura azimutal paralelo ao plano horizontal;
- 3 - **Eixo secundário** perpendicular ao eixo principal;
- 4 - Plano de colimação perpendicular ao eixo secundário;
- 5 - Os 3 eixos devem-se intersectar no centro do teodolito;
- 6 - Plano do sistema de leitura zenital paralelo ao plano de colimação.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Estacionar:** É colocar o referencial do instrumento o mais próximo possível do referencial topocêntrico do ponto estação

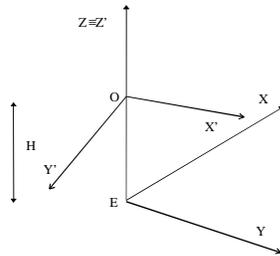
Na prática, é executar com precisão necessária 3 rotações e 3 translações com o sistema de eixos do instrumento.

Não sendo possível colocar o centro do instrumento sobre o ponto, tem que se medir sempre a sua **altura** sobre a direcção vertical.

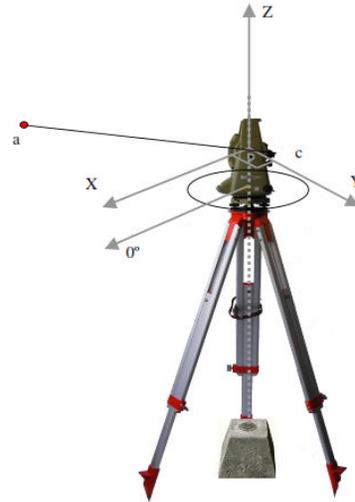


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As condições ideais são as que fazem coincidir o referencial do instrumento com o referencial local de origem no ponto estação.

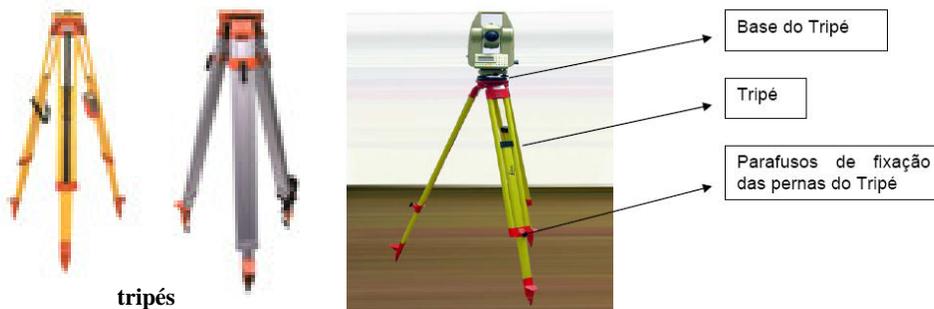


$$\begin{aligned}
 OZ' &\equiv EZ; & X'OY' &\equiv XEY; & OX' &\equiv EX \\
 & & & \Leftrightarrow & & \\
 O &\equiv E; & OZ' &\parallel EZ; & OX' &\parallel EX
 \end{aligned}$$



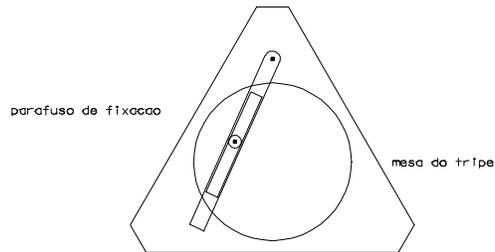
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As **pernas** do tripé, extensíveis ou não, são terminadas pelo **pedal** e pelo **ferrão** para permitir uma boa fixação ao terreno.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

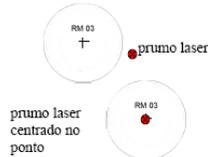
Para colocar um goniómetro de modo a poder medir ângulos, isto é, para colocá-lo em estação, há que ligá-lo solidamente a um suporte que geralmente é um tripé. A ligação faz-se à **mesa**, peça de madeira ou metal, por um **parafuso** que a atravessa na parte central. As mesas metálicas que permitem variar a posição do centro do goniómetro são chamadas mesas de translação.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



**1. Cravar o tripé no solo**



**3. Eixo principal do aparelho passando pelo ponto estação utilizando o prumo óptico ou laser**



**2. Fixar o equipamento ao tripé**

**4. Calar a nivela esférica utilizando os movimentos de extensão do tripé**



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Fases do estacionamento:

- 1º Centragem - fazer coincidir a origem com a vertical do ponto;
- 2º Horizontalização do plano XOY (verticalizar o eixo principal);
- 3º Orientação – rodar o instrumento (alidade) tornando os eixos horizontais paralelos

### Execução prática:

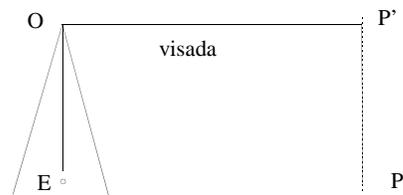
- 1º Centragem grosseira do tripé c/ mirada;
- 2º Centragem aproximada c/ prumo óptico;
- 3º Calagem aproximada c/ nivela esférica;
- 4º Calagem rigorosa c/ nivela tórica;
- 5º Centragem rigorosa c/ prumo óptico;
- 6º Verificação e correcção da calagem
- 7º Verificação da centragem

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Visada:** segmento de recta definido no espaço, entre o centro do aparelho colocado no *ponto estação (E)* e o alvo colocado no *ponto visado (P)*.

**Ponto estação** – ponto de estacionamento do instrumento de medida

**Ponto visado** – materializado por alvos naturais ou artificiais



### Alvos:

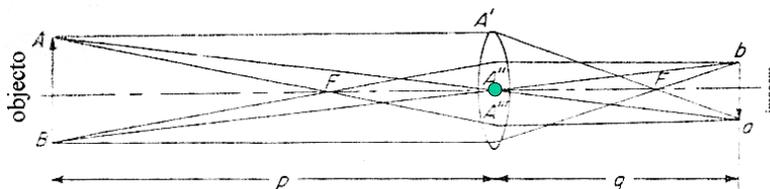
- Naturais – marco, construção existente, chaminé, para-raios, etc.;
- Artificiais – dispositivos estacionado sobre o ponto no terreno.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Uma **lente** é um corpo vítreo limitado por duas superfícies esféricas ou por uma esférica e outra plana. Consoante a respectiva curvatura, as lentes podem classificar-se como **convergentes** (ou convexas) e **divergentes** (ou côncavas). A recta que une os centros das duas superfícies que limitam uma lente designa-se por **eixo principal** e a distância entre os polos dessas superfícies define a **espessura** da lente.

O **centro óptico** A'' de uma lente é o ponto do eixo principal pelo qual passam os raios luminosos sem mudar de direcção – **raios principais**; os raios luminosos que incidem na lente paralelamente ao eixo principal, sofrem uma refacção passando pelo **foco** – **raios focais**.

Traçando os raios principais e os raios focais, é possível construir a **imagem real** de um objecto AB que se encontre para além do foco principal F.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A **distância objecto p**, medida do objecto ao centro da lente, e a **distância imagem q**, medida do centro da lente à imagem (ambas medidas paralelamente ao eixo óptico), estão relacionadas com a **distância focal f** (fixa) através de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

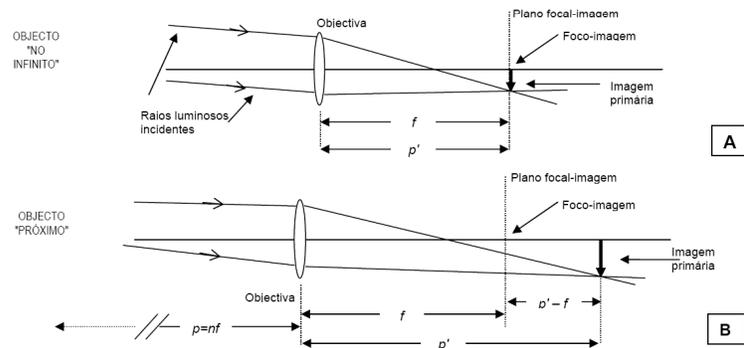
A relação M entre as dimensões da imagem e do objecto designa-se por **ampliação** (linear), tendo-se

$$M = \frac{\text{dimensão da imagem}}{\text{dimensão do objecto}} = \frac{q}{p}$$

A **potência** (focal) da lente é igual ao inverso da distância focal da lente e é uma medida da capacidade que a lente tem de convergir um feixe de raios paralelos a uma determinada distância da lente. Quanto menor for essa distância (focal) maior é a potência da lente. A unidade de potência focal é a dioptria, que é definida como a potência de uma lente convergente cuja distância focal é um metro:

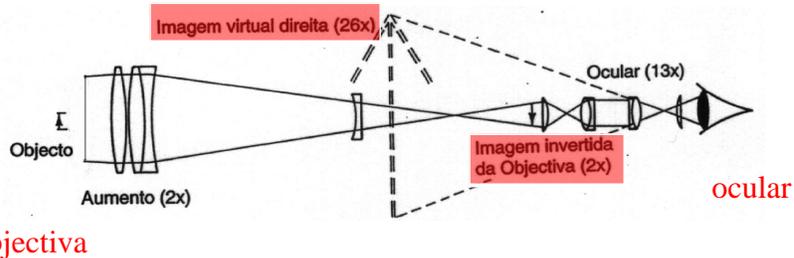
$$P = \frac{1}{f}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



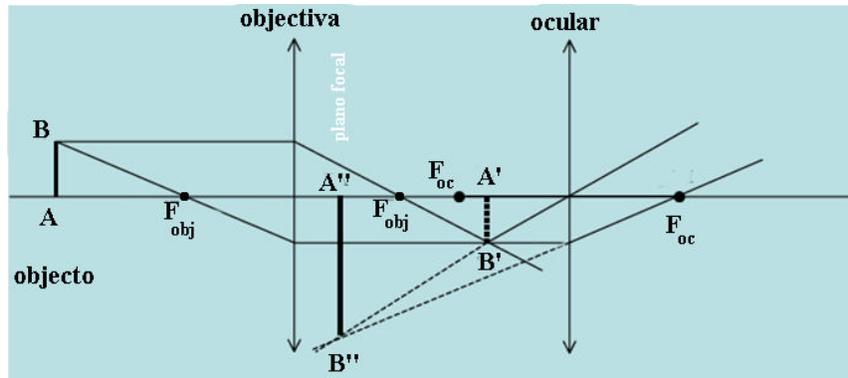
Dado um objecto muito afastado da lente, a imagem desse objecto forma-se no foco da lente (A). Ao fazer observações visando pontos mais próximos da lente (B), a imagem forma-se mais atrás do plano focal, isto é, a uma distância  $p'$  da lente superior à distância focal  $f$ . Quanto mais próximo o objecto se encontrar do teodolito maior será a diferença  $p' - f$ .

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Uma luneta consiste num par de lentes (**compostas**) convergentes, a **objectiva** e a **ocular**, montadas de tal forma que os respectivos eixos principais são colineares, formando o eixo óptico do aparelho; a lente **objectiva**, de maior distância focal, produz uma imagem real reduzida e invertida do objecto; a lente **ocular** amplia a imagem produzida pela objectiva, dando origem a uma imagem virtual, formada num plano entre as duas lentes.

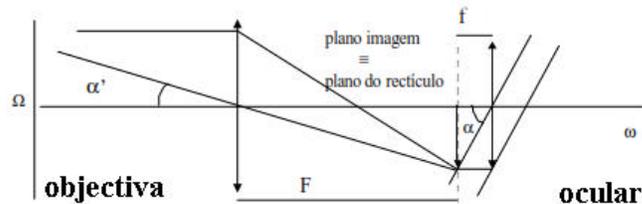
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A luneta de um teodolito é composta fundamentalmente por dois sistemas ópticos, a **ocular** e a **objectiva**, funcionando qualquer deles como uma lente convergente. Como o objecto a focar está sempre situado muito além do foco da objectiva, esta vai originar uma imagem real e invertida. A ocular vai funcionar em relação a esta **imagem** como uma lupa, pelo que esta vai ter que se formar **entre o centro óptico e o foco da ocular**. Pode-se então afirmar que a luneta origina uma imagem virtual, invertida e com um aumento considerável do diâmetro do objecto. Nas lunetas de fabrico moderno, graças a um conjunto de prismas incorporado no corpo da luneta, as imagens observadas através da ocular são imagens direitas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A **ampliação** da imagem do objecto é uma característica importante da luneta pois influencia o respectivo **poder resolvente**. Com o aumento da ampliação o **campo de visão** diminui; a **abertura** da lente deve aumentar com o aumento da ampliação de forma a manter as imagens suficientemente luminosas.



**Campo Visual** - espaço cónico gerado pelo ângulo de abertura ( $1^\circ$  a  $2^\circ$ )

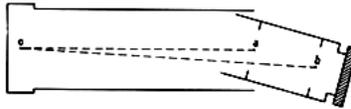
**Poder de ampliação da luneta** - 
$$G = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\text{abertura da objectiva}}{\text{abertura da ocular}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \equiv \frac{\text{tg}(\alpha)}{\text{tg}(\alpha')} = \frac{F}{f}$$

**Resolução ou poder separador** - capacidade de separação sobre a imagem ( $2'/G$ )

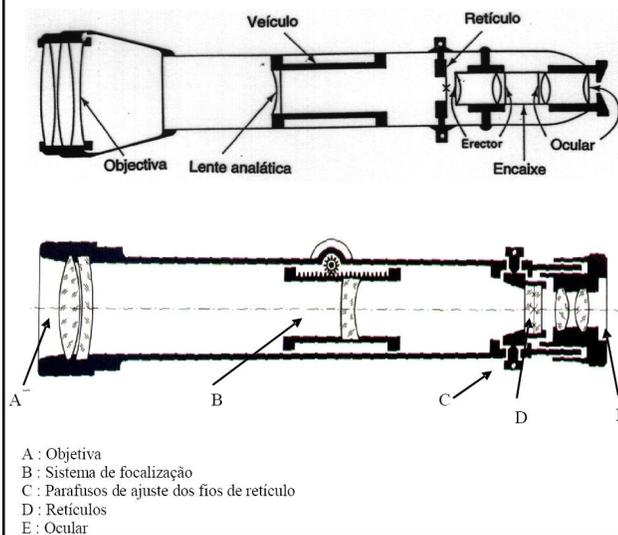
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para **focar a imagem**, o observador pode actuar de diferentes modos:

1. Nos instrumentos mais antigos, de **focagem externa**, a ocular e a objectiva são montadas em dois tubos distintos, em que um deles desliza no interior do restante:
2. Nas lunetas de **distância focal fixa (da objectiva)**, o observador actua na cremalheira ou outro sistema de focagem, de modo a recuar a **ocular** (esse recuo vale  $p' - f$  e é tanto maior quanto mais próximo o objecto estiver).
3. Nas lunetas catadióptricas que fazem a focagem movendo a **objectiva**, a **posição da ocular é fixa**. O observador terá, assim de mover a objectiva, deslocando-o para trás (afastando-a ligeiramente da ocular), de modo a trazer a imagem nítida para o campo da ocular. Ao fazer isso, a distância focal efectiva do sistema diminui. Após a focagem, a imagem produzida pela objectiva situa-se um pouco para além do plano focal por outras palavras,  $p' > f$ .

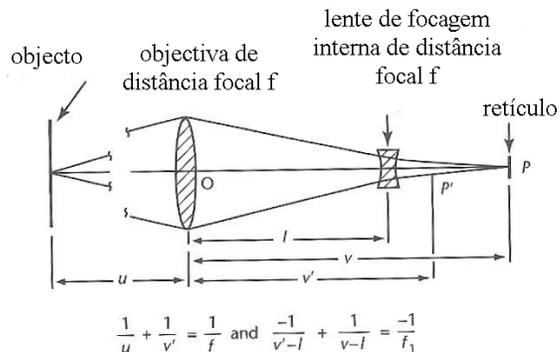


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Lunetas de **focagem interna** ou de comprimento constante: 1) o comprimento da luneta mantém-se inalterável (o reticulo e a objectiva estão fixos no tubo; 2) o dispositivo de focagem interna torna o interior da luneta mais estanque a poeira e humidade; 3) mais leves

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A lente côncava ao ser movimentada no interior da luneta por intermédio de um botão, foca a imagem no plano do retículo, sem que a objectiva ou a ocular se movam. No caso de não existir a lente de focagem interna, a imagem criada pela objectiva seria formada em P'; esta imagem constitui então o objecto virtual para a lente de focagem interna, cuja imagem é formada em P (a desvantagem é esta lente extra absorver alguma luz).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As lentes da luneta são geralmente tratadas com uma substância anti-reflectante, fazendo diminuir as perdas, por reflexão, da luz incidente na objectiva e, conseqüentemente, aumentando a luminosidade da imagem, vantagem considerável quando se trabalha com pouca luz. Além da **reflexão**, outros fatores também contribuem para a perda de luminosidade, como por exemplo a **difusão** (provocada pelo pó, vapor de água, resíduos de gordura, etc. depositados na superfície das lentes) e mesmo a **absorção** da luz pelo próprio material da lente. As lentes estão ainda sujeitas às aberrações cromáticas e geométricas tais como: **aberração esférica**, **astigmatismo** e **distorção**. Para evitar estas aberrações são introduzidas lentes com índices de refração diferentes e colocadas de forma a eliminar os raios periféricos, para que se utilize a parte central das lentes, próxima ao eixo óptico.

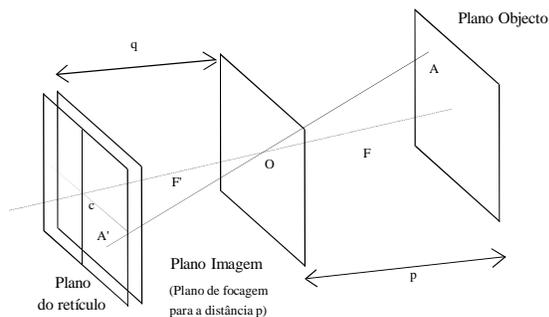
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os fios de retículo empregados em instrumentos topográficos são linhas ou traços muito finos. Alguns fabricantes de instrumentos utilizavam fios de platina extremamente finos, e outros utilizam traços gravados com diamante diretamente sobre o vidro. Alguns instrumentos possuem dois fios de retículo, um horizontal e um vertical. Os instrumentos que são utilizados em trabalhos mais precisos têm dois fios de retículo horizontais adicionais, um acima e um abaixo do fio horizontal usual. Estes fios de retículos adicionais são chamados de fios estadimétricos.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

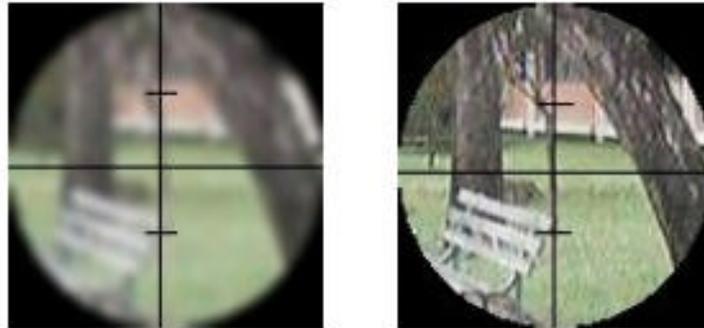
### Princípio da luneta com retículo



Existe paralaxe da imagem quando a imagem do objecto, dada pela objectiva, não se forma sobre o plano do retículo.

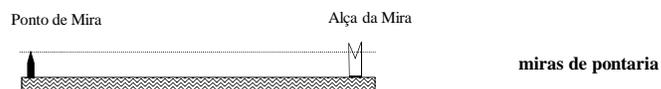
Os fios do retículo, que definem a linha de pontaria, estão colocados numa placa de vidro situada entre as duas lentes; esta placa pode mover-se para a frente e para trás através de um botão de focagem, de modo a colocar o retículo no plano de focagem

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



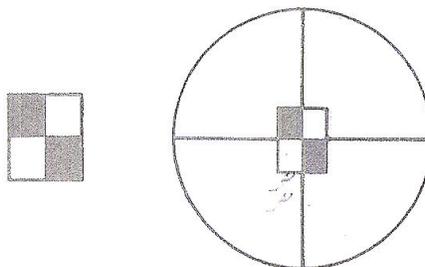
A focagem (dos fios do retículo e da imagem) é fundamental pois dela resulta uma melhor ou pior pontaria: deve focar-se em primeiro lugar os fios do retículo com o anel de focagem colocado na ocular e depois a imagem do campo visual, de tal forma a que as duas imagens não apresentem movimento uma em relação à outra (paralaxe, que pode provocar um erro na pontaria).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



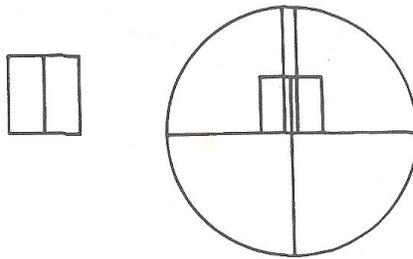
Há 3 tipos de pontarias, conforme os tipos de miras e de aparelhos utilizados.

Nalguns aparelhos utilizam-se retículos em cruz, onde se sobrepõe um traço sobre uma marca visada ou se faz coincidir os fios com o limite dos quadrados de uma mira: **pontaria por sobreposição**.



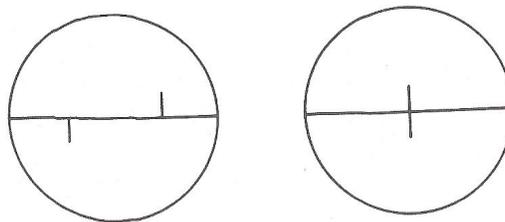
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nos aparelhos modernos utiliza-se um retículo com dois traços paralelos muito próximos; desta maneira pode enquadrar-se o alvo visado, sendo esta **pontaria por enquadramento** mais precisa do que a de sobreposição.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

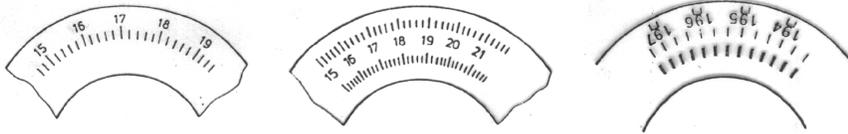
Por último, utiliza-se nalguns aparelhos a **pontaria por coincidência**, que consiste em sobrepor duas metades de uma imagem separadas por uma linha sem espessura.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Limbos:

- círculos graduados, com traços de  $1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$  de espessura;
- de metal de vidro (cristal) ou poliéster, com diâmetros de 6 a 25 cm;



A graduação pode ser feita em 3 sistemas: **sexagesimal**, **centesimal** e **milesimal**. No primeiro caso a circunferência é dividida em 360 graus e cada um destes em 2, 3, 6 ou 12 partes, sendo lido no limbo o valor do grau e da respectiva subdivisão. As fracções menores são estimadas ou lidas por outros processos. No segundo caso a circunferência do limbo é dividida em 400 grados e cada um destes em 2, 4, 5, 10 ou 20 partes. Na divisão milesimal a circunferência é dividida em 6400 partes ( $2\pi \approx 6.283 \approx 6.400$ ).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Auxiliares de interpolação:** nos limbos metálicos a leitura é feita na alidade por nónio (2 diametralmente opostos) com lupa ou por microscópios micrométricos.

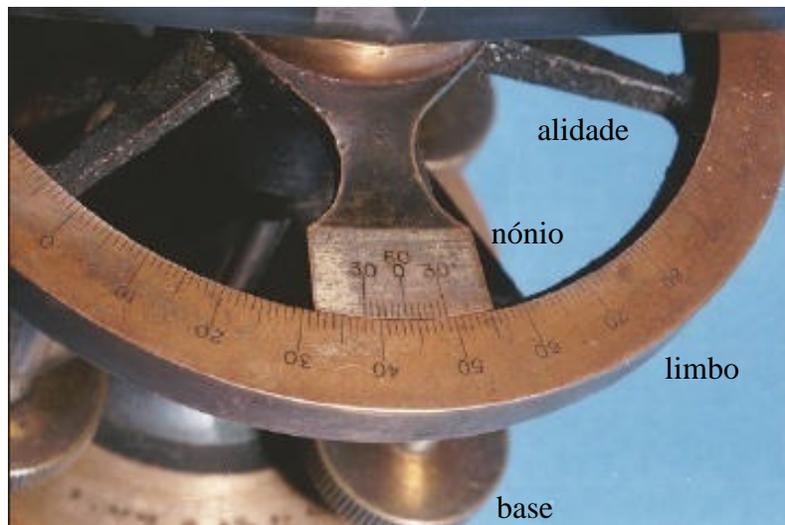
- nónios;
- microscópios ópticos de leitura (ampliam a graduação do limbo);
- micrómetros (alteram o percurso dos raios luminosos);
- percursos ópticos (luneta, prismas e espelhos).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**nónios:** escala auxiliar de leitura (fixa à alidade) que desliza relativamente à graduação do limbo e que serve para medir com rigor fracções da menor divisão do limbo, isto é, **sem estimação**.

Para efectuar uma leitura basta procurar qual a divisão do nócio em coincidência com a divisão da escala, multiplicar este número pela constante do nócio e juntar este resultado à leitura na escala do limbo mais próxima do zero do nócio.

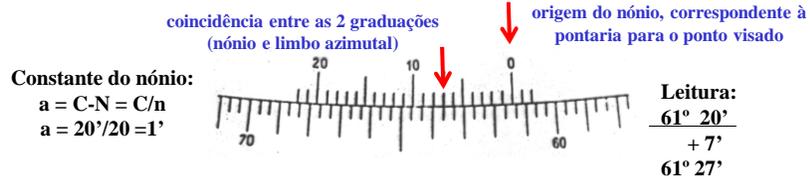
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



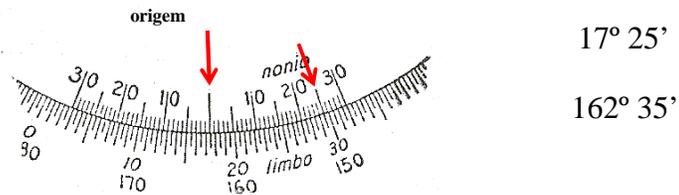
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A dimensão de uma divisão do nónio diferencia-se da dimensão de uma divisão do limbo de uma quantidade que traduz a **sensibilidade** a do nónio.

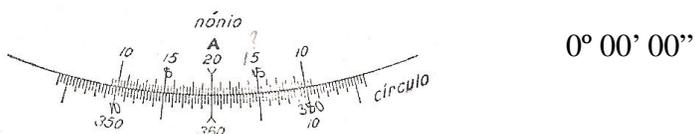
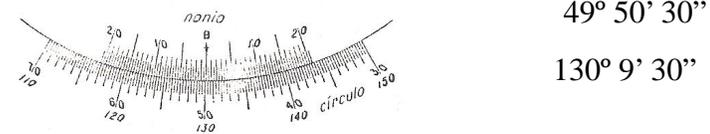
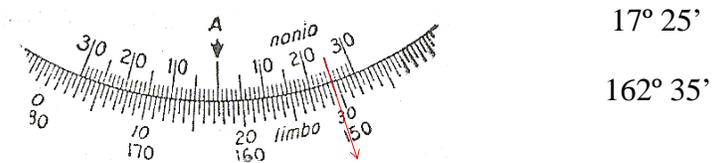
(n-1)C=nN: a n unidades do nónio N correspondem (n-1) unidades do círculo C



a menor divisão do limbo corresponde a  $60'/3 = 20'$ , a menor divisão do nónio corresponde a  $19'$ , tendo-se  $20 \times 19' = 19 \times 20'$

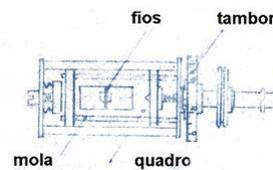
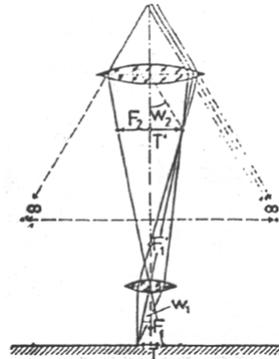


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O **microscópio** é constituído por uma **luneta** cuja objectiva se encontra muito próxima do limbo (lupa), sendo a respectiva imagem formada num plano onde se encontra a referência de leitura, constituída por 2 fios suportados por um quadro. O movimento de um parafuso determina o deslocamento dos fios em relação à imagem da **gradação** e é medido por um **tambor graduado**.



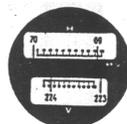
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Microscópios ópticos:

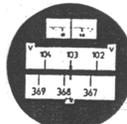
- 1) Com traço de referência de leitura (a fracção da gradação é estimada);
- 2) Com escala de referência de leitura (em vez do retículo possui uma escala, medindo-se a fracção entre a origem da escala e uma divisão do limbo);
- 3) Com traço de referência e micrómetro óptico (mede-se o deslocamento aparente da imagem do limbo para levar um traço da gradação à coincidência com o traço do retículo);
- 4) De coincidência com micrómetro óptico (dupla imagem);



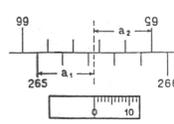
1)



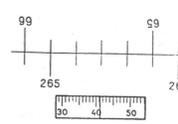
2)



3)



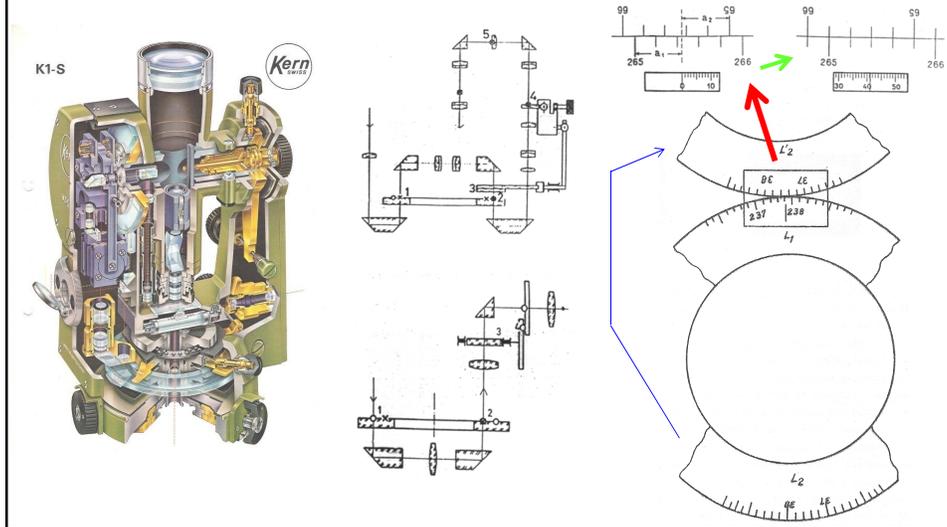
4)



4)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Percurso óptico do sistema de forma a efectuar **2 leituras** no limbo em zonas diametralmente opostas com **uma única pontaria**:



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

ocular de leitura

janela de iluminação do limbo

leitura no limbo azimutal:  $094^{\circ} + 10'$

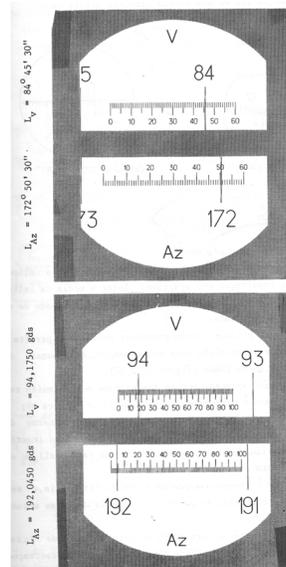
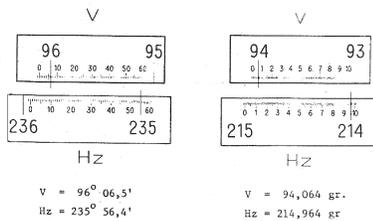
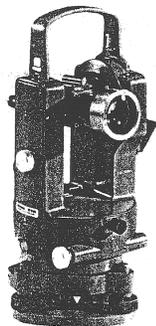
leitura no micrómetro:  $2' 44''$

estimativa no micrómetro:  $0.4''$

total:  $094^{\circ} 12' 44.4''$

A luz que entra pela janela de iluminação atravessa o limbo azimutal em duas zonas diametralmente opostas, efectuando-se duas leituras pelo método da **coincidência** rodando o botão do micrómetro (comum às leituras zenitais); este movimento provoca uma variação da inclinação das lâminas de faces paralelas de uma mesma quantidade mas em direcções opostas até as imagens dos traços adjacentes em pontos opostos da graduação coincidirem.

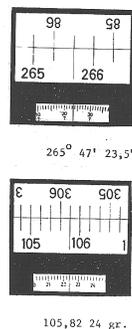
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



O teodolito Wild T16 é um teodolito repetidor, isto é, o limbo azimutal pode-se fixar quer à base quer à alidade, o que permite acumular leituras. As leituras são efectuadas numa escala, isto é, o microscópio, em vez de possuir um retículo, possui uma **escala de comprimento igual a uma divisão do limbo**, gravada numa lâmina de vidro. A menor leitura directa é de 1' ou **0.01**°.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Wild T2 antigo

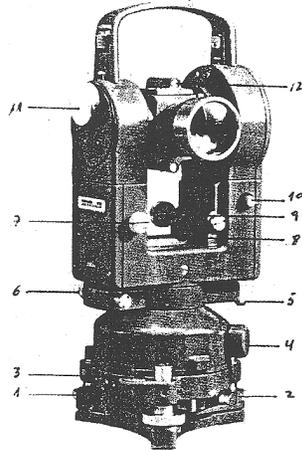


A figura mostra as leituras efectuadas nos microscópios de **dupla imagem** munidos de micrómetro de coincidência dos teodolitos Wild T2 antigos. A leitura é obtida:

- a) determinando o valor da mais pequena divisão do limbo
- b) actuando no tambor do micrómetro até levar os traços da graduação superior à coincidência com os da graduação inferior
- c) verificando qual é a graduação dos algarismos direitos que está imediatamente à esquerda do índice de leitura e contando o número de intervalos entre uma e outra
- d) efectuando no micrómetro a leitura dos minutos, dezenas de segundos e segundos, que se junta à leitura anterior dos graus e dezenas de minutos.

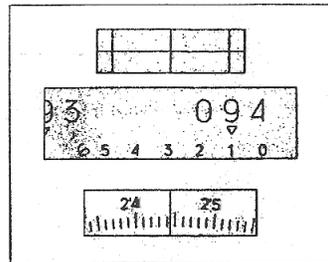
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Wild T2 moderno

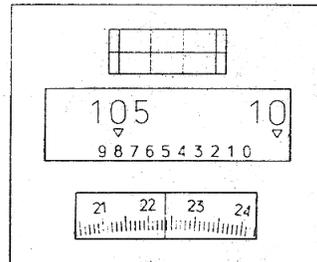


- 1 - Prumo óptico
- 2 - Alavanca de fixação à base
- 3 - Nível esférico
- 4 - Parafuso de reiteração
- 5 - Alavanca de grandes movimentos gerais da alidade
- 6 - Parafuso de pequenos movimentos particulares da alidade
- 7 - Parafuso de comutação de leitura dos limbos
- 8 - Nível tórico da alidade
- 9 - Parafuso de pequenos movimentos particulares da alidade
- 10 - Botão de calagem zenital automático
- 11 - Parafuso do micrómetro óptico
- 12 - Visor óptico

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$H_z = 94^{\circ} 12' 44''$$

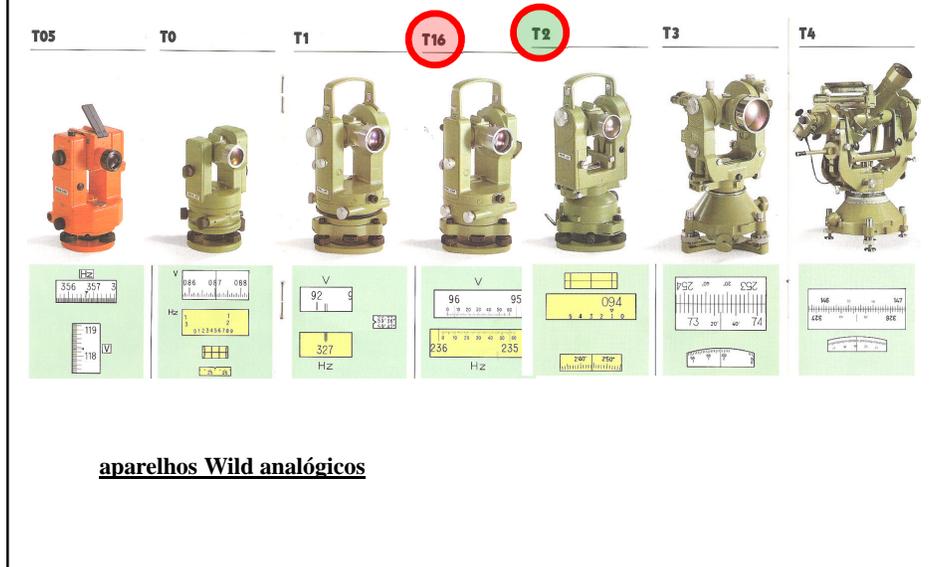


$$V = 105,8224 \text{ gr}$$

No campo ocular da leitura aparecem 3 janelas dispostas de alto para baixo, que indicam:

- a) traços da graduação do limbo correspondentes às duas zonas do limbo diametralmente opostas, que devem ser levados à coincidência rodando o tambor micrométrico
- b) numeração em graus do limbo relativa à leitura a efectuar, depois de projectada numa lâmina onde está gravado o intervalo correspondente a um grau dividido em 10 partes numeradas (obtem-se daqui o grau e a décima de grau)
- c) tambor micrométrico que permite a leitura directa do segundo de grau

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### especificações técnicas (aparelhos analógicos)

MODELO	B3	T 05	T 0	T 1	T 16	T 2	T 3	T 4	RK 1	RDS	
Aumento da Luneta (x)	2	19	20	30	30	30	24, 30 40	60, 80	25	24	
Imagem (inversa, direita)	I	D	D	D	D	D	I	I	D	D	
Campo a 1000 m (m)	120	39	35	27	27	29	28	14	22	22	
Distância mínima de focagem (m)	2	0,8	1,0	1,7	1,7	2,2	4,6	100	2,4	2,4	
Constante estadimétrica	—	100	100	100	100	100	—	—	100	100	
Constante de adição (cm)	—	0	0	0	0	0	—	—	0	0	
Sensibilidade do nível da alidade p/2 mm	8'	60"	4'	30"	30"	20"	6,5"	1"	2'	30"	
Leitura directa	360° 400°	Hz 1° V 5%	2'	Hz 20' V 5'	6"	1' (20")	1"	0,2"	Hz 0,1" V 0,2"	V 10'	1'
	400°	Hz 19' V 5%	10°	Hz 1° V 10°	0,2°	1°	1°	1°	—	V 10°	1°
Leitura p/ estimativa	360°	Hz 6' V 1%	0,5'	Hz— V 1'	3"	0,1' (5")	—	0,1"	Hz 0,05" V 0,1"	V 1'	0,1'
	400°	Hz 10' V 1%	1°	Hz— V 2°	0,1°	0,1°	—	0,5°	—	V 1°	0,2°
Peso do instrumento (kg)	0,8	3,0	2,7	5,8	5,3	6,0	11,2	50	2,5	7,1	
Peso do estojo (kg)	0,3	2,2	2,6	2,8	2,8	2,2	3,7	41	3,6	2,3	
Prospecto detalhado	G 1-	426s	269s	270s	261s	243s	219s	255s	308s	301s	

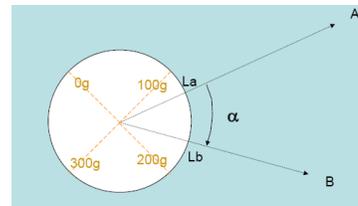
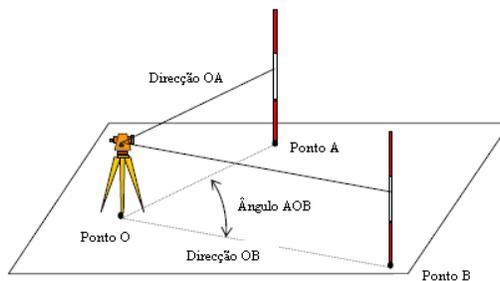
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

especificações técnicas (aparelhos analógicos)

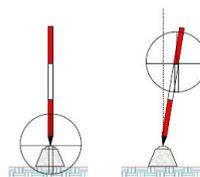
	T05	T0	T1	T16	T2	T3	T4
Grossissement de la lunette (×)	19	20	30	30	30	24, 30, 40	60, 80
Champ à 1000 m (m)	39	35	27	27	29	28	14
Visée minimum (m)	0,8	1,0	1,7	1,7	2,2	4,6	100
Ecart type (Hz) selon DIN 18723	0,003 <sup>±</sup> 10"	0,008 <sup>±</sup> 25"	0,001 <sup>±</sup> 3"	0,001 <sup>±</sup> 3"	0,0025 <sup>±</sup> 0,8"	0,0015 <sup>±</sup> 0,5"	0,3"
Lecture directe 360°	2'	Hz 20" V 5"	6"	1'/20" <sup>*</sup>	1"	0,2"	Hz 0,1" V 0,2"
400°	0,1 <sup>±</sup>	Hz 0,01 <sup>±</sup> V 0,1 <sup>±</sup>	0,002 <sup>±</sup>	0,01 <sup>±</sup>	0,0001 <sup>±</sup>	0,0001 <sup>±</sup>	-
Lecture par estimation 360°	0,5'	V 1'	3"	0,1'/5" <sup>**</sup>		0,1"	Hz 0,05" V 0,1"
400°	0,01 <sup>±</sup>	V 0,02 <sup>±</sup>	0,001 <sup>±</sup>	0,001 <sup>±</sup>		0,00005 <sup>±</sup>	-
Index vertical automatique	-	-	±2'	±6'	±5'	-	-
Débattement			±1"	±1"	±0,3"		
Précision du calage							
Sensibilité de la nivelle d'index	-	-	-	-	-	12"	2"
Sensibilité de la nivelle d'alidade pour 2 mm	60"	4'	30"	30"	20"	6,5"	1"
Poids (kg)							
Instrument	3,0	2,7	5,8	5,3	6,0	11,2	50
Etui	2,2	2,6	2,8	2,8	2,2	3,7	41

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Medição de ângulos **azimutais** ou **horizontais**



$$\alpha = L_b - L_a$$



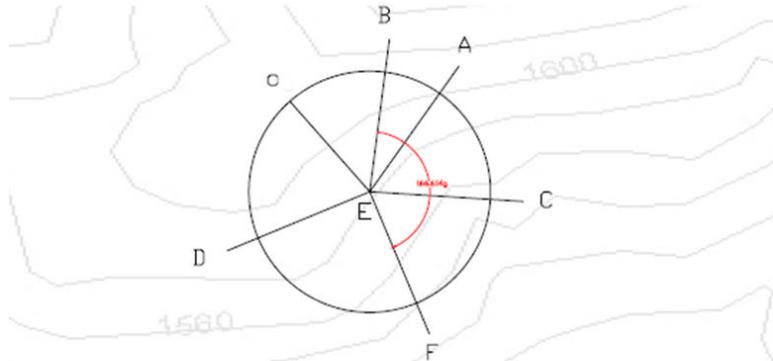
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Estacionou-se um teodolito num ponto  $E$  do terreno e fizeram-se as seguintes observações:

Vértices Visados	$B$	$A$	$C$	$F$	$D$
Leituras Azimutais	$54^{\circ}136'$	$85^{\circ}246'$	$150^{\circ}001'$	$220^{\circ}750'$	$320^{\circ}970'$

Determine os ângulos  $\hat{AEB}$ ,  $\hat{FED}$ ,  $\hat{BEF}$  e  $\hat{DEB}$ .

Sabendo que  $(CE) = 124^{\circ}683$ , determine os rumos  $(EF)$  e  $(AE)$ .



$$\hat{AEB} = 368,890'; \quad \hat{FED} = 100,220'; \quad \hat{BEF} = 166,614'; \quad \hat{DEB} = 133,166';$$

$$(AE) = 59,928s; \quad (EF) = 395,432s;$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Método de observação:** pontaria simples

### Erros:

Colimação – Corrigido com valor rectificativo na memória;

Índice – Corrigido com valor rectificativo na memória;

Má graduação – Corrigida pela leitura múltipla repetida sobre o limbo em rotação;

Excentricidades – Apenas a excentricidade do limbo, sendo esta eliminada no caso de aparelhos com sistema de leitura dupla.

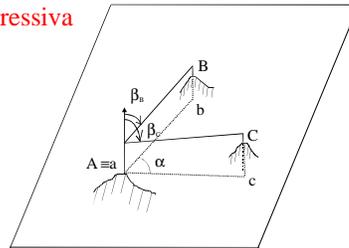
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A medição de ângulos exige uma metodologia operatória adequada com vista à eliminação dos erros instrumentais.

**Método:** observações encruzadas com reiteração das leituras

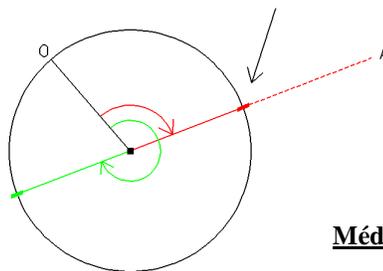
**Observ. encruzadas** {  
                                   Conjugadas (directa e inversa)  
                                   +  
                                   Rotação progressiva e regressiva

**Giros do Horizonte** {  
                                   Directa Progressiva em B  
                                   Directa Progressiva em C  
                                   Inversa Regressiva em C  
                                   Inversa Regressiva em B



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

índice da alidade na pontaria para A  
na posição directa



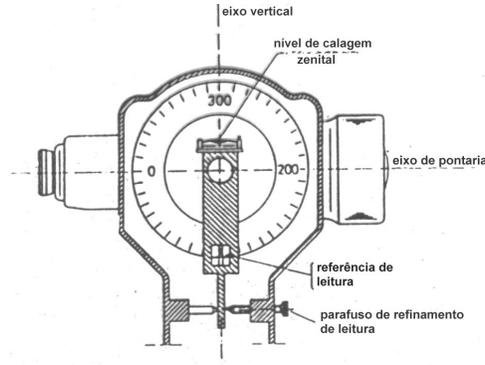
índice da alidade na pontaria para A  
na posição inversa

**Média de observações azimutais conjugadas:**

$$L^{Az}_{m\acute{e}dia} = \frac{L^{Az}_D + (L^{Az}_I \pm 180)}{2}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

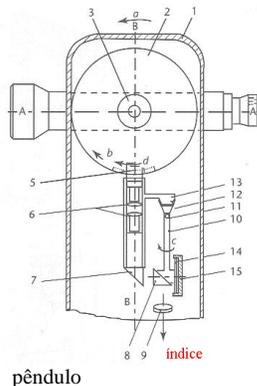
O círculo é **fixo à luneta** e o sistema de leitura é fixo ao montante. A linha de referência da leitura (contém o centro e a referência de leitura) deve ser paralela ao eixo vertical.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No limbo zenital dos goniómetros antigos a referência de leitura tinha que ser cuidadosamente verticalizada (utilizando **nivelas**) antes de poderem ser efectuadas observações. Uma inovação de grande utilidade consistiu na introdução de um **pêndulo**, cujo movimento é convenientemente amortecido, para substituir as nivelas (ou mais recentemente um **compensador líquido**):

- AA = linha de colimação
- BB = eixo principal
- 1 = caixa protectora
- 2 = limbo vertical
- 3 = eixo secundário
- 5 = índice de leitura
- 6 = objectiva do sistema de leitura
- 8 = prisma
- 10 = pêndulo
- 11 = pivot
- 12-13 = apoios do pivot
- 14 = pistão de amortecimento
- 15 = cilindro de amortecimento

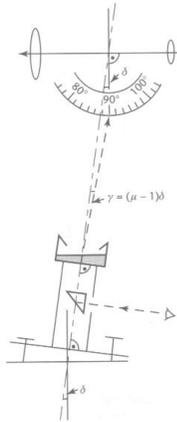


pêndulo

Supondo, para simplificar, que a linha AA está horizontal, se o eixo principal do goniómetro sofrer uma inclinação segundo a direcção **a**, relativamente à vertical, o eixo AA deve rodar segundo a direcção **b** de forma a permanecer horizontal e assim manter a pontaria para o ponto. O limbo vertical é arrastado com a luneta na direcção **d** mas devido à influência do pêndulo, a leitura efectuada no índice não sofre alteração: devido à inclinação sofrida pelo eixo principal, o pêndulo transportando o prisma roda na direcção **c** e o percurso do raio que materializa a leitura corrige a leitura.

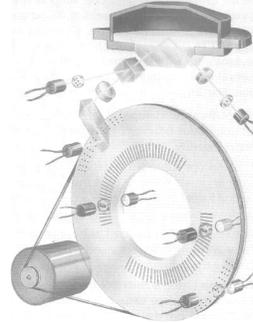
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Quando o eixo principal está perfeitamente verticalizado, a superfície do líquido (óleo) é paralela à base do recipiente e os raios atravessam-no sem qualquer desvio. Se o eixo principal sofrer um desvio  $\delta$  em relação à vertical, a superfície do líquido inclina-se este mesmo ângulo em relação à base do recipiente, sofrendo os raios um desvio  $\gamma = (\mu - 1)\delta$ , onde  $\mu$  é o índice de refração do óleo, cujo efeito é corrigir a leitura, de uma forma semelhante ao caso anterior.

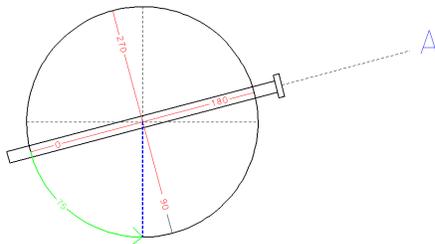


compensador

Desenvolvimentos recentes conduziram à introdução de **compensadores bi-axiais**, que asseguram igualmente leituras corrigidas para as **leituras azimutais** devido ao **erro de inclinação do eixo principal**. Estes compensadores actuam em duas 2 direcções ortogonais, detectando inclinações também do eixo secundário.



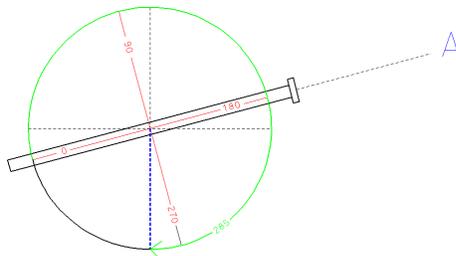
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$L_{\text{directa}}^{\text{zenital para A}} - (360^\circ - L_{\text{inversa}}^{\text{zenital para A}}) = 0$$

**Média de observações zenitais conjugadas :**

$$L^{\text{média}} = \frac{[L^{\text{Z}}_{\text{D}} + (360^\circ - L^{\text{Z}}_{\text{I}})]}{2}$$



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fazendo-se uma pontaria na posição directa (PD) e uma pontaria na posição inversa (PI) para um alvo fixo, obtém-se o ângulo zenital isento do erro de índice vertical do equipamento por:

$$Z = \frac{360^\circ + Z_{PD} - Z_{PI}}{2}$$

É possível também calcular o erro de índice vertical ( $\varepsilon$ ) de um equipamento:

$$\varepsilon = \frac{360^\circ - (Z_{PD} + Z_{PI})}{2}$$

Assim, um ângulo zenital lido somente em PD pode ser corrigido do erro de índice vertical:

$$Z = Z_{PD} + \varepsilon$$

✓ **Observações encruzadas** (conjugadas + rotação P e R)

Combinação de giros  $\left\{ \begin{array}{l} DP \\ IR \\ IP \\ DR \end{array} \right\}$

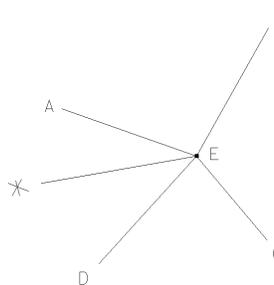
Mínimo (topografia)

erro de fecho  $\leq 20''$   
diferença de D e I  $\leq 15''$

T2

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Supondo a estação em E, onde se visam os vértices A, B, C, D, a incluir no cálculo, e uma referência externa \*, o **Método das direcções ou dos giros do horizonte** consiste em observar sucessivamente todos vértices (direcções), podendo estes giros ser efectuados quer com a luneta na posição directa (face 1) quer com a luneta na posição inversa (face 2) e tanto no sentido progressivo (no sentido crescente da graduação do limbo) quer no sentido regressivo, eventualmente repetindo o procedimento em várias reiterações. Esta metodologia garante (1) que os ângulos formados por 2 direcções, contíguas ou não, têm a mesma precisão e (2) que os erros das diferentes direcções são independentes uns dos outros.



As observações iniciam-se na marca externa \*, registando-se as leituras para cada vértice, fechando o giro novamente na marca \*, devendo o erro de fecho  $\varepsilon$  do giro (diferença entre as leituras inicial e final para a marca exterior) ser inferior a uma tolerância fixada previamente. Desta forma, cada um dos vértices A, B, C e D é visado o mesmo número de vezes, não se privilegiando nenhuma direcção. Cada giro é compensado distribuindo o erro de fecho pelas n pontarias:  $L_i^{comp} = L_i + i \cdot \varepsilon / n$ .

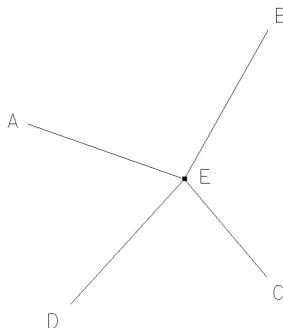
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Pontos visados	Leituras azimutais		Leituras azimutais compensadas	Leituras azimutais médias DP+IR	Leituras zenitais	Leituras zenitais médias DP+IR
	DP	IR				
*	DP IR	17.2412 217.2446	17.2412 217.2446			
A	DP IR	86.5405 286.5443	86.5400 286.5439	86.54195	101.1426 298.8528	101.14490
B	DP IR	163.1832 363.1830	163.1822 363.1822	163.18220	98.2207 301.7753	98.22270
C	DP IR	187.0225 387.9265	187.0210 387.9253	187.47315	98.8432 301.1567	98.84325
*	DP IR	17.2432 217.2462	17.2412 217.2446			

$$\varepsilon_D = 17.2432 - 17.2412 = 0.0020 \quad \varepsilon_I = 217.2462 - 217.2446 = 0.0016$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O Método dos ângulos, das combinações binárias ou de Schreiber consiste em observar, a partir da estação E todos os ângulos possíveis definidos pelas pontarias para os vértices A, B, C e D. Se existem n vértices visados a partir de E, cada direcção é visada (n-1) vezes. A vantagem deste método consiste em ser possível escolher a ordem pela qual as observações são efectuadas, não obrigando que todos os vértices visados sejam visíveis ao mesmo tempo.

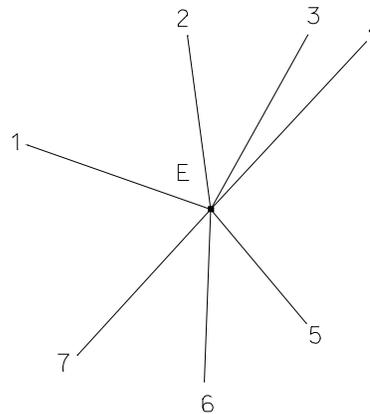


No caso figurado, um conjunto de observações pode ser:  $L_A, L_B, L_A, L_C, L_A, L_D, L_B, L_C, L_B, L_D, L_C, L_D$ , a diferença entre cada 2 pontarias consecutivas dando um ângulo. O método de Schreiber é apropriado à utilização de teodolitos repetidores: ao finalizar a série anterior, aponta-se ao vértice B e, com o limbo azimutal fixo à alidade, aponta-se ao vértice A, fixando-se nessa altura o limbo à base e repetindo o mesmo procedimento; ao finalizar a série anterior, aponta-se ao vértice C e, com o limbo azimutal fixo à alidade, aponta-se ao vértice A, fixando-se nessa altura o limbo à base e repetindo o mesmo procedimento; ao finalizar a série anterior, aponta-se ao vértice D e, com o limbo azimutal fixo à alidade, aponta-se ao vértice A, fixando-se nessa altura o limbo à base e repetindo o mesmo procedimento.

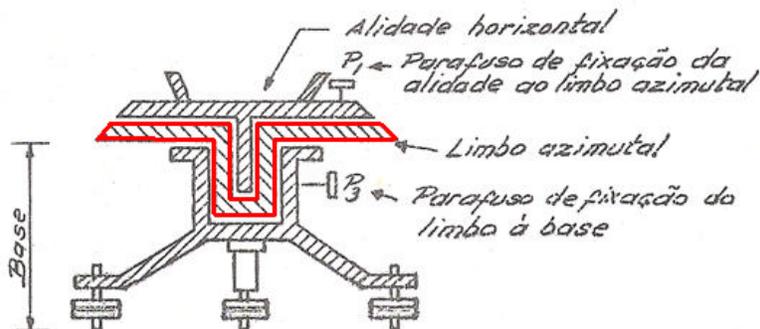
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nas observações geodésicas, efectuadas sempre a grandes distâncias, nem sempre os vértices estão em iguais condições de visibilidade, quer por má exposição, tempo enevoadado, sol pela frente, etc., pelo que os giros podem ter que ser interrompidos para serem continuados noutra oportunidade. Nessas circunstâncias, para que seja possível relacionar os vários conjuntos de observações efectuadas em épocas diferentes, é necessário que haja direcções comuns aos vários conjuntos: **método das direcções isoladas**.

Considerando a figura seguinte, que representa as direcções a serem observadas da estação E, suponha-se que num dia se observaram as direcções  $L_1=87.9412$  gon,  $L_2=110.0334$  gon,  $L_3=148.7608$  gon,  $L_4=196.1056$  gon e que no dia seguinte se observaram as direcções  $L'_4=76.8412$  gon,  $L'_5=109.6315$  gon,  $L'_6=147.0804$  gon,  $L'_7=182.8962$  gon, constituindo a pontaria para o vértice 4 a ligação entre os dois conjuntos de dados. De forma a reduzir as observações a um conjunto único, a diferença  $L_4 - L'_4 = 119.2644$  gon deve ser somada aos valores do segundo conjunto:  $L_5=228.8959$  gon,  $L_6=266.3448$  gon,  $L_7=302.1606$  gon.



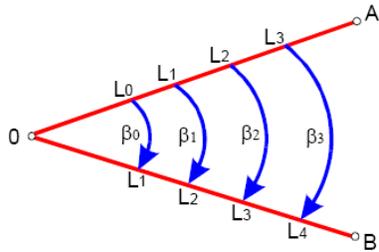
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



**Teodolito repetidor:** o limbo azimutal pode ou não fixar-se à base do instrumento, ou seja, a alidade pode ou não ser solidária o limbo azimutal (movimento geral). São aparelhos projectados de modo a que possam acumular leituras sucessivas do limbo azimutal.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Neste método efectua-se a leitura  $L_0$  segundo a direcção inicial OA e depois a leitura  $L_1$  segundo a direcção OB. Fixa-se o limbo à alidade e realiza-se a pontaria segundo a direcção OA (mantém-se a leitura  $L_1$ ). Liberta-se o movimento da alidade e faz-se a pontaria segundo OB (leitura  $L_2$ ), fixa-se esta leitura e repete-se o procedimento.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O ângulo  $\beta$  poderá ser calculado por:

$$\beta_0 = L_1 - L_0$$

$$\beta_1 = L_2 - L_1$$

$$\beta_2 = L_3 - L_2$$

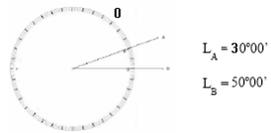
$$\beta_3 = L_4 - L_3$$

---

$$n\beta = L_4 - L_0$$

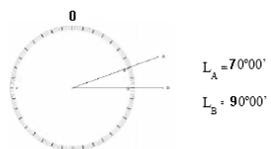
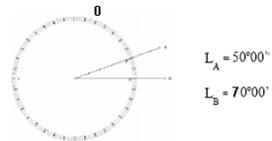
$$\beta = \frac{L_4 - L_0}{n}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



**Exemplo de repetição:**

$$\alpha = \frac{90^{\circ} - 30^{\circ}}{3} = 20^{\circ}$$



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

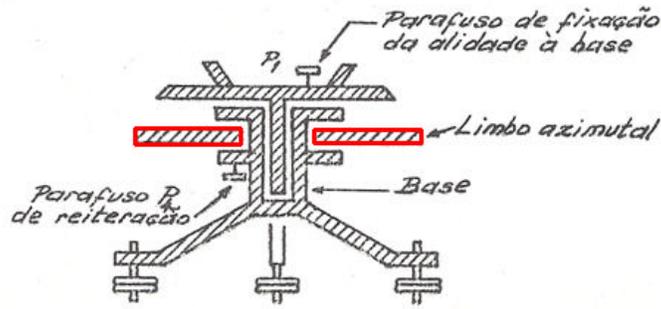
### Método da repetição:

O número de repetições na observação de um ângulo  $\alpha$  é dado por

$$n_R = p^{-1} \cdot \text{Int} \left( \frac{360}{\alpha} \right)$$

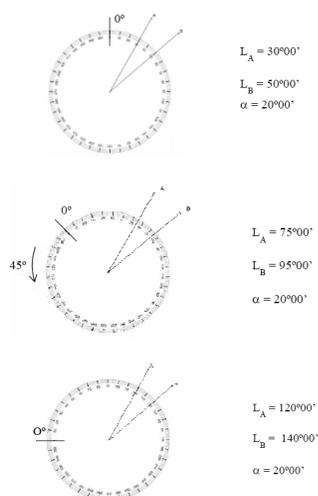
onde  $p$  é o número de leituras múltiplas diametralmente opostas (número de microscópios ópticos, normalmente igual a 2)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



**Teodolito reiterador:** o limbo azimuthal tem sempre movimentos independentes da alidade, ou seja, é possível fixar ou marcar previamente no limbo a leitura que se quiser sem que o aparelho execute movimento de conjunto.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Exemplo de reiteração: rodando sucessivamente o limbo 45°, é possível utilizar toda a extensão do limbo, minimizando-se os efeitos de erros de gravação na graduação do equipamento.

$$\alpha = \frac{(50^{\circ} - 30^{\circ}) + (95^{\circ} - 75^{\circ}) + (140^{\circ} - 120^{\circ})}{3} = 20^{\circ}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Utilizando **n** reiterações, as origens de cada reiteração são dadas por:

$$\frac{\frac{360^\circ}{p} + d}{n}$$

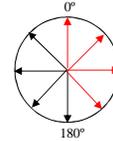
onde **p** é o número de leituras múltiplas diametralmente opostas (número de microscópios ópticos, normalmente igual a 2) e **d** é o valor da menor divisão do limbo, que coincide com a amplitude do micrómetro.

Exemplo: utilizando o **T2 antigo (sexagesimal)**, as origens das **3** reiterações são:

$$\frac{\frac{360^\circ}{p} + d}{n} = \frac{\frac{360^\circ}{2} + 10'}{3} = \frac{180^\circ + 10'}{3} = \begin{cases} 0^\circ & 0' & 0'' \\ 60^\circ & 3' & 20'' \\ 120^\circ & 6' & 40'' \end{cases}$$

Exemplo: utilizando o **T2 antigo (sexagesimal)**, as origens das **4** reiterações são:

$$\frac{\frac{360^\circ}{p} + d}{n} = \frac{\frac{360^\circ}{2} + 10'}{4} = \frac{180^\circ + 10'}{4} = \begin{cases} 0^\circ & 0' & 0'' \\ 45^\circ & 2' & 30'' \\ 90^\circ & 5' & 0'' \\ 135^\circ & 7' & 30'' \end{cases}$$



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

	A	B	
PD	0°31'45,5"	9°40'15,5"	
PI	180°31'44,1"	189°40'15,7"	
m1	0°31'44,8"	9°40'15,5"	$\alpha_1 = 9^\circ 08' 30,8''$
PD	45°33'11,9"	54°41'42,8"	
PI	225°33'15,9"	234°41'42,4"	
m2	45°33'13,9"	54°41'42,6"	$\alpha_2 = 9^\circ 08' 28,7''$
PD	90°25'44,2"	99°34'13,3"	
PI	270°25'44,5"	279°34'14,6"	
m3	90°25'44,3"	99°34'13,9"	$\alpha_3 = 9^\circ 08' 29,6''$
PD	135°26'51,3"	144°35'18,9"	
PI	315°26'47,8"	324°35'15,9"	
m4	135°26'49,5"	144°35'17,4"	$\alpha_4 = 9^\circ 08' 27,9''$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}$$

$$\alpha_0 = 9^\circ 08' 29,2''$$

**observações com 4 reiterações (45°)**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As condições geométricas de **construção** para que um teodolito forneça medidas correctas de ângulos azimutais são:

1. A linha de pontaria tem de ser perpendicular ao eixo secundário (se esta condição não se verificar, a superfície gerada pelo movimento da luneta não é um plano).
2. O eixo óptico da luneta deve intersectar o eixo principal.
3. O eixo secundário deve ser perpendicular ao eixo principal.
4. O eixo principal deve ser normal ao plano do limbo horizontal.
5. O eixo principal deve intersectar o limbo azimutal no centro da graduação.
6. O limbo azimutal deve estar correctamente graduado.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para além disso, quando se coloca o aparelho em **estação**, devem ser respeitadas outras 2 condições:

1. O plano do limbo deve estar horizontal.
2. O eixo principal tem que conter a estação e ficar vertical (assim, todos os planos de pontaria contêm a vertical da estação).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Devido a **defeitos de construção** ou a **deficiências de colocação do teodolito em estação**, nunca é possível realizar exactamente todas as condições enunciadas.

Suponha-se que numa medição intervêm **várias causas de erro** x, y, z, ... cujas magnitudes são muito pequenas. O **erro total ε**, proveniente dos erros devidos às causas x, y, z, ... é dado por **ε=f(x, y, z, ...)**. Desenvolvendo f em série de Taylor na vizinhança do ponto (0, 0, 0, ...) tem-se:

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

pois **f(0,0,0,...)=0** e onde foram desprezados os termos de ordem superior à primeira. **Conclui-se que cada parcela diz respeito a uma causa de erro, podendo assim considerar-se cada causa separadamente.**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Exemplo: influência da precisão angular  $d\beta$  na distância obtida com estadia de invar:** para determinar a precisão associada à distância D obtida com uma estadia de invar,  $D = \frac{M}{2} \cot g \frac{\beta}{2}$  diferencia-se a expressão anterior em ordem a  $\beta$ :

$$dD = \frac{M}{2} \frac{d}{d\beta} \left( \cot g \frac{\beta}{2} \right) d\beta = \frac{M}{2} \left( -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\beta}{2} \right) d\beta = -\frac{M}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{M \cos^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{D^2}{M} \frac{d\beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

O valor de  $dD$  é assim majorado por:  $dD = -\frac{D^2}{M} d\beta$

(o sinal negativo significa que a distância vem demasiado pequena se o ângulo for demasiado grande)

Admitindo que a precisão na medição do ângulo  $\beta$  é  **$d\beta=1''$**  e que  **$M=2$** , tem-se:

$$dD_m = \frac{D_m^2}{2} \frac{1''}{206265''} = \frac{D_m^2}{412530} \approx \frac{D_m^2}{400000} \quad \text{ou} \quad dD_{mm} = \frac{D_m^2}{400}$$

D (m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
dD (mm)	1.0	3.9	8.7	16	24	55	97	218	388	606

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: influência do **comprimento** da estadia na distância obtida com **estadia de invar**:  $D = \frac{M}{2} \cot g \frac{\beta}{2}$

Para determinar a precisão associada à distância **D** obtida, diferencia-se a expressão anterior em ordem a **M**:  $dD = \frac{dM}{2} \cot g \frac{\beta}{2} = \frac{dM}{2} \frac{2D}{M} = \frac{dM}{M} D$

Admitindo que a precisão na medição do ângulo **M** é **dM=0.1 mm**, e que **M=2**, tem-se:  $dD_{mm} = \frac{0.0001}{2} D$

D (m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
dD (mm)	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.0075	0.01	0.015	0.02	0.025

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

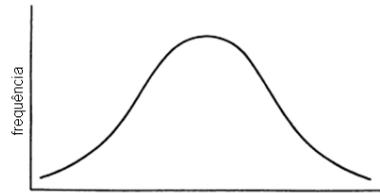
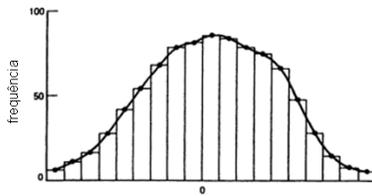
➤ Quanto à **natureza** dos erros:

Erros {  
 Aleatórios  
 Sistemáticos  
 Periódicos  
 Grosseiros

➤ Quanto à **fonte** dos erros:

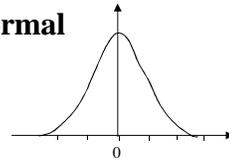
Erros {  
 Instrumentais (aleatórios, sistemáticos e periódicos)  
 Operação (aleatórios, sistemáticos e grosseiros)  
 Atmosféricos (aleatórios, sistemáticos e periódicos)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Erros de medição: **Distribuição Normal**

Estatística:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Média – estimativa de  $\mu$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Desvio médio quadrático – estimativa de  $\sigma$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

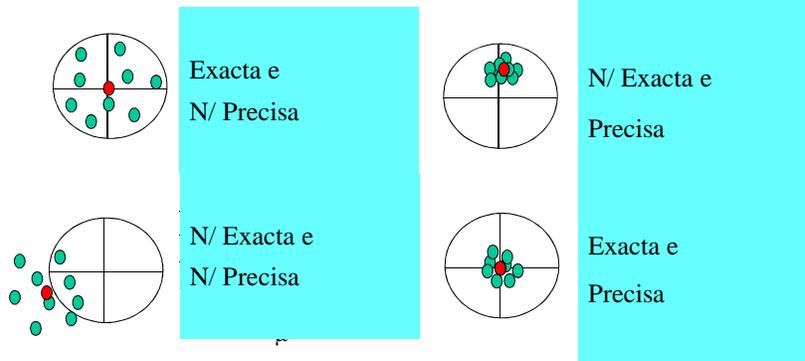
➤ **Precisão:** traduz o grau de conformidade ou a dispersão das medidas de uma mesma quantidade. Se a dispersão dos valores for pequena ( $\sigma$  pequeno), então as medidas dizem-se precisas.

➤ **Exactidão (ou precisão absoluta):** traduz a proximidade do conjunto das medidas, ou da sua média, relativamente ao valor médio ( $\mu$ ). Ou ainda, traduz um enfiamento entre o valor observado e o valor verdadeiro, provocado por um erro sistemático.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Precisão  $\Leftrightarrow$  valor de  $\sigma$

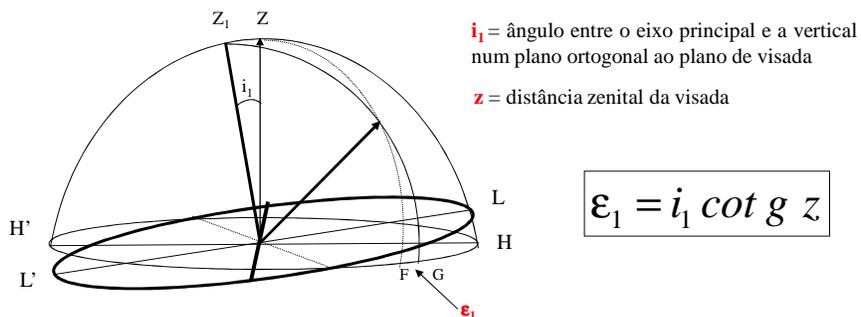
Exactidão  $\Leftrightarrow$  valor de  $(\mu - \bar{x})$



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 1. Influência da falta de verticalidade do eixo principal na leitura azimutal

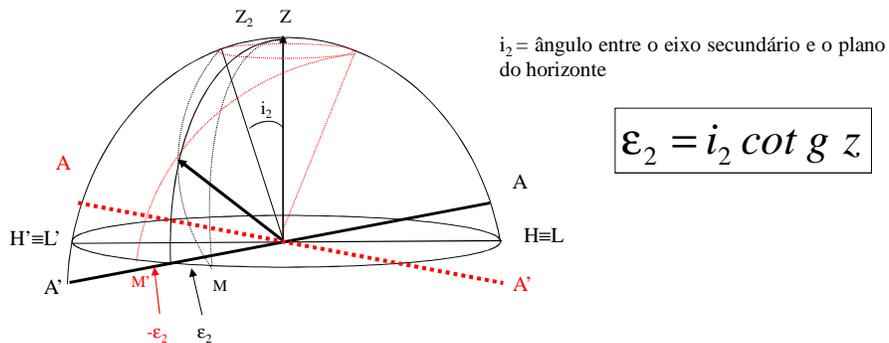
Deve-se à má calagem da nivela ou a uma desrectificação da nivela.



Quando se inverte o teodolito, tanto  $i_1$  como  $\cot g z$  permanecem os mesmos: este erro **não é eliminado em pontarias conjugadas** (efectuando metade das medições com a luneta na posição directa e a outra metade com a luneta na posição inversa), mas pode ser determinado com a medição de  $i_1$  através de um nível.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

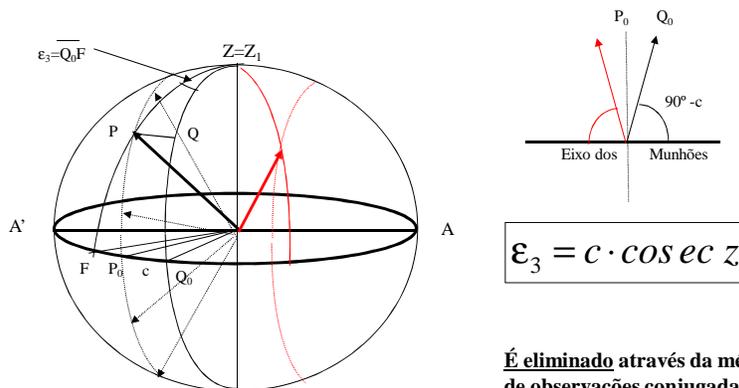
### 2. Influência da falta da horizontalidade do eixo secundário na leitura azimutal (não perpendicularidade do eixo secundário em relação ao eixo principal)



**É eliminado** através da média de observações conjugadas (Directa e Inversa).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

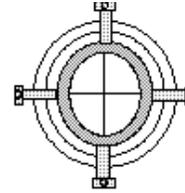
### 3) Influência do erro de colimação horizontal na leitura azimutal (a linha de pontaria não é perpendicular ao eixo de báscula)



**É eliminado** através da média de observações conjugadas (Directa e Inversa).

**Verificação da linha de colimação:** o cruzamento dos fios do retículo deve coincidir com o eixo óptico do sistema de lentes da luneta. Quando isto não ocorre diz-se que o instrumento está com erro na linha de visada (ou linha de colimação). Dentre alguns procedimentos adotados para conduzir esta verificação apresenta-se o seguinte:

- com o instrumento instalado num ponto qualquer e a bolha do nível da alidade centrada visa-se uma graduação qualquer de uma mira fixada horizontalmente numa parede efectuando-se em seguida a leitura no limbo horizontal do instrumento (por exemplo  $250^{\circ} 12' 20''$ );
- solta-se agora o limbo horizontal e gira-se o instrumento em torno de seu eixo vertical até que se obtenha uma leitura diferente exactamente  $180^{\circ}$  da primeira (no caso  $70^{\circ} 12' 20''$ ), bascula-se a luneta e observa-se a escala da régua horizontal;



- se o fio vertical do retículo coincidir com a mesma graduação referente à primeira leitura horizontal o instrumento estará isento do erro na linha de visada.

Caso contrário a condição de perpendicularidade entre os eixos de rotação da luneta e a linha de visada não está satisfeita.

Constatada a necessidade de retificação o procedimento é o seguinte:

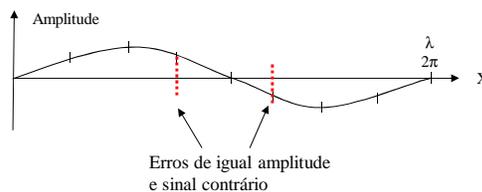
- calcule o ponto médio entre as duas graduações observadas na mira horizontal;
- actue nos parafusos de correção dos fios do retículo movimentando-os horizontalmente até que atinja o referido ponto médio na régua.
- repita o procedimento para confirmar a retificação.

NOTA: esta correção é introduzida em etapas (no caso de retículos com 2 parafusos de correção vai se afrouxando ligeiramente um deles e apertando o outro) até colimar o fio vertical do retículo com o ponto médio da régua. Deve-se evitar ainda que o fio vertical fique oblíquo, facto que deve ser observado à medida que se vão introduzindo as correcções.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 4) Influência da má graduação do limbo na leitura azimutal

Gráfico das diferenças entre o espaçamento real e o espaçamento padrão



Espaçamento com variações

**É eliminado através da média de observações equidistantes sobre o limbo – método da reiteração ou repetição.**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

- 5) A linha de pontaria não passa pelo eixo principal, provocando um erro numa leitura isolada. A média das observações efectuadas nas posições directa e inversa da luneta elimina este erro.
- 6) O eixo principal do aparelho não passa pelo centro da graduação do limbo azimutal, provocando um erro numa leitura isolada. A utilização de duas referências de leitura situadas em zonas diametralmente opostas do limbo permite eliminar este erro.
- 7) As folgas, indispensáveis ao funcionamento do aparelho, e os laqueios, resultantes do desgaste provocado pelo uso, dão origem a erros de leitura. Uma forma de minorar este tipo de erros é efectuar as observações primeiro no sentido progressivo (crescente) da graduação e depois em sentido regressivo.

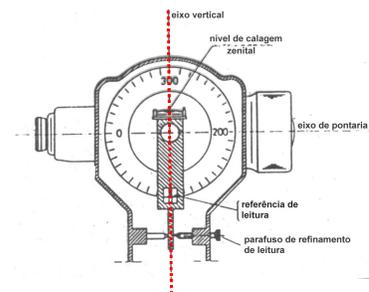
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 8) Erro de índice

$$e'_z = \frac{L_D - (400 - L_I)}{2}$$

Resulta da falta de verticalidade da linha formada pela referência de leitura e o centro do limbo zenital

Provocado pela desrectificação da nivela ou pela má calagem da bolha.



**É eliminado através da média de observações conjugadas (Directa e Inversa).**

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Verificação do índice de leitura dos ângulos verticais:** existem no mercado instrumentos que fornecem 3 tipos de ângulos verticais: o ângulo zenital (com origem no zénite), o ângulo nadiral (com origem no nadir) e o ângulo de inclinação (com origem no horizonte). Nos instrumentos que fornecem ângulos zenitais, o zénite instrumental deve coincidir com o zénite verdadeiro do ponto estação, ou seja, o círculo vertical deverá indicar  $0^\circ$  quando a luneta estiver apontada para o zénite (no caso de ângulos nadirais o círculo vertical deverá registar  $0^\circ$  quando a luneta estiver apontada para o nadir e nos teodolitos que fornecem ângulos de inclinação, o limbo vertical deve registar  $90^\circ$  quando a luneta estiver na horizontal e em posição directa). Para que estas condições sejam atendidas os teodolitos são dotados basicamente de dois dispositivos: os compensadores (neste caso os instrumentos são ditos de colimação automática) e os níveis cilíndricos, comuns ou de bolha bipartida, onde se torna necessário efectuar a colimação manual antes da leitura do ângulo vertical. Os procedimentos para as verificações variam com o tipo de ângulo vertical fornecido pelo instrumento e com o sistema utilizado para a colimação.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nos instrumentos com graduação zenital, o procedimento adoptado para a verificação do índice de leituras é o seguinte:

- com a luneta do instrumento em posição directa visa-se um ponto fixo, bem definido e distante o suficiente para proporcionar uma pontaria precisa (a imagem do ponto visado deve coincidir com o cruzamento dos fios do retículo do instrumento ou simplesmente ser ocultada pelo fio horizontal);

- após concluída a pontaria efectua-se a leitura do ângulo zenital correspondente, lembrando

que, caso o instrumento seja de colimação manual, deve proceder à centragem da bolha do nível do índice do círculo vertical;

- em seguida, inverte-se a luneta, visa-se o mesmo ponto (se for o caso centra-se novamente a bolha do nível do índice do círculo vertical) e efectua-se a leitura do ângulo vertical.

A soma das duas leituras conjugadas deve ser igual a  $360^\circ$ . Caso isto não ocorra, a diferença em relação a  $360^\circ$  corresponde ao dobro do deslocamento do zénite do instrumento em relação ao zénite verdadeiro, deslocamento este conhecido como erro de índice vertical.

NOTA: é possível que mesmo sendo o instrumento novo ele apresente um pequeno erro de índice vertical. Qualquer que seja a magnitude deste erro, ele é eliminado quando se obtém o valor do ângulo vertical a ser utilizado nos cálculos a partir das duas leituras oriundas das visadas conjugadas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Caso seja necessário rectificar do erro de índice vertical, o procedimento é o seguinte:

### **Instrumentos de colimação manual:**

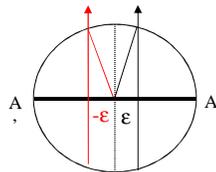
- como exemplo, considere-se que a partir das visadas conjugadas obtiveram-se as leituras PD=86° 40' 20" e PI = 273° 21' 10" ; a soma PD + PI = 360° 01' 30" e o erro de índice vertical é  $Z_0 = 01' 30" / 2 = 45"$ ; neste instrumento todos os ângulos verticais estão majorados de 45", uma vez que PD+PI > 360° ; assim, a leitura correcta em PD é de 86° 39' 35" e em PI de 273° 20' 25" ;
- conservando a visada ainda no ponto fixo utilizado para a determinação do  $Z_0$ , introduza no limbo vertical o valor da leitura correcta relativa à posição em que a luneta do instrumento se encontra no momento (PD ou PI), utilizando para isto o parafuso do nível. Com isto a bolha do nível não ficará mais centrada;
- centre finalmente a bolha actuando nos parafusos de correcção do nível;
- repita o procedimento para confirmar a retificação.

### **Instrumentos de colimação automática:**

- o procedimento é similar ao caso anterior diferindo apenas na maneira adotada para inserir no limbo vertical a leitura correcta relativa à posição da luneta no momento da retificação.
- Nalguns instrumentos de colimação automática existe um parafuso de correcção, que movimenta o sistema óptico de leitura dos ângulos verticais. Neste caso, a leitura correcta é introduzida actuando neste parafuso. Quando isto não é possível introduz-se a leitura vertical actuando no parafuso tangencial do limbo vertical. Consequentemente o cruzamento dos fios do retículo sairá do ponto utilizado para a determinação do erro de zênite. Resta então reestabelecer a coincidência movimentando os fios do retículo do instrumento, actuando nos parafusos de ajuste vertical dos mesmos.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 9) Erros de excentricidade



Excentricidades instrumentais

$$e'' = \frac{\epsilon}{r} \cdot 206265''$$

Ex.: r = 100mm;  
ε = 0,1mm; e = 206"



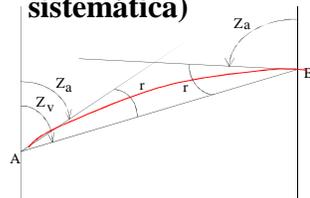
Observação excêntrica

$$e'' = \frac{\epsilon}{D} \cdot 206265''$$

Ex.: D = 100m;  
ε = 1mm; e = 2,06"

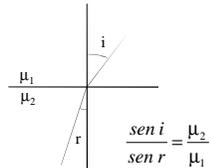
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 10a) Refracção vertical (normalmente sistemática)



$$Z_v = Z_a + r$$

$$r = 0.07 \frac{D}{R}$$



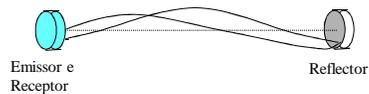
### 10b) Refracção lateral (aleatória c/ algum sistematismo)

Desvios sucessivos sem qualquer trajectória determinística, pelo facto de o raio óptico atravessar várias camadas de ar com diferentes índices de refração.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### 11) Erros atmosféricos sobre medidas electromagnéticas



- 1) Alteração à fase no decurso do percurso devido à passagem por diferentes camadas atmosféricas;
- 2) Alteração à fase de saída do Emissor devido ao efeito provocado pelas alterações atmosféricas sobre o oscilador (gerador da onda).

### 12) Erros do operador

- 1) A pontaria é a principal fonte de erros do operador;
- 2) Leitura e registo figuram como erros grosseiros.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O impacto da electrónica nos teodolitos concentra-se no sistema de leitura dos círculos graduados, no sistema de registo dos dados e no sistema que compensa automaticamente a inclinação do equipamento, levando-o à horizontal.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sempre foi desejo dos géometras dispor de um teodolito em que as medidas angulares não fossem influenciadas pelas imprecisões das divisões dos limbos. Para esse efeito, seria necessário fazer participar, em cada leitura, todas as divisões do limbo, já que a soma de todos os erros de má graduação é nula.

As características principais dos teodolitos electrónicos são o princípio dinâmico de leitura, leituras diametralmente opostas, varrimento de todo o limbo, eliminação dos erros de excentricidade e de graduação.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No século XVII Hedraus colocou **2** nónios diametralmente opostos no limbo azimutal, sendo a leitura correspondente a uma pontaria obtida pela **média** dos valores lidos nos **nónios**. Ramsden, em 1787, utilizou **4** nónios para atenuar os erros de má graduação. Henri Wild, em 1907, combinou **ópticamente** 2 zonas diametralmente opostas dos limbos, garantindo simultaneamente a precisão das leituras e a comodidade do utilizador.

Em 1977, a HP incorporou pela primeira vez no taqueómetro BEAR um dispositivo que permitia a leitura e medição electrónica de um ângulo definido por duas direcções, materializadas por duas componentes mecânicas montadas sobre um disco que suporta a graduação e que roda em torno do eixo principal do aparelho.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os principais componentes físicos de um sistema de medição electrónica de ângulos são dois:

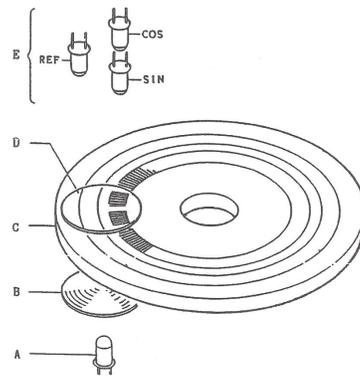
✓ um círculo de cristal (limbo) com regiões **claras e escuras** (transparentes e opacas) gravadas através de um processo de fotolitografia

✓ **fotodíodos** detectores da luz que atravessa esse círculo graduado

Existem basicamente dois princípios de **medição e codificação de limbos**, o **incremental** que fornece o valor com relação a uma origem, isto é, quanto se girou o teodolito a partir de uma posição inicial e o **absoluto** que fornece um valor angular para cada posição do círculo, .

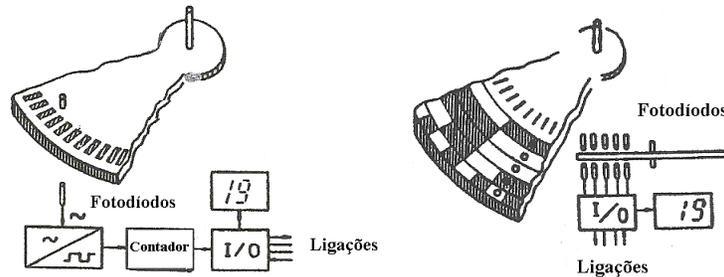
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As modernas estações totais permitem a leitura electrónica dos limbos, que **giram** a uma velocidade angular fixa, utilizando para tal codificadores que convertem as leituras analógicas em digitais através de um processo de digitalização.



- A: LED (Light Emitting Diode)
- B: Lente
- C: Escala
- D: Subescala
- E: Sensor

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



No modo incremental, a leitura correspondente a uma pontaria obtém-se convertendo em sinal eléctrico a alternância de luz-sombra registada no sensor que é gerada quando o limbo se encontra em rotação, traduzindo a relação angular entre um ponto arbitrário (a posição do zero do limbo fixa-se em qualquer ponto, quando o teodolito é ligado) e a posição para onde é rodado. Estes teodolitos devem ser rodados após o início da sessão de observação de forma a encontrar os valores de **indexação** horizontal e vertical.

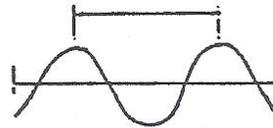
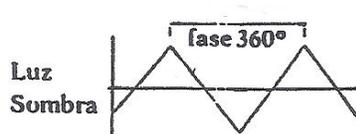
No modo absoluto, o limbo é gravado com um código que quando é lido define a posição da direcção definida pela pontaria sobre o limbo.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

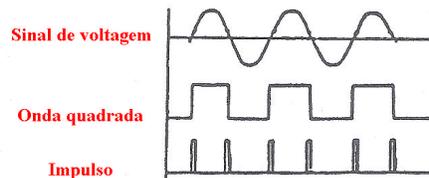
Para se entender o princípio de funcionamento da medição de ângulos, pode pensar-se, de maneira simplificada, num círculo de vidro com uma série de traços opacos igualmente espaçados: colocando uma fonte de luz de um lado do círculo e um fotodetector do outro, é possível "contar" o número de impulsos "claro/escuro" que ocorrem quando o teodolito é movido de uma direcção para outra, para medir um ângulo. Esse número de impulsos pode ser então convertido em sinal eléctrico e mostrado em forma digital num visor.

Este procedimento de contagem de impulsos fornece um ângulo com pouca precisão. Então, para refinar a leitura, empregam-se mais fotodetectores. Um segundo fotodetector indica o sentido de giro. E em outra região são utilizados mais quatro fotodetectores para realizar a leitura de precisão por interpolação.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



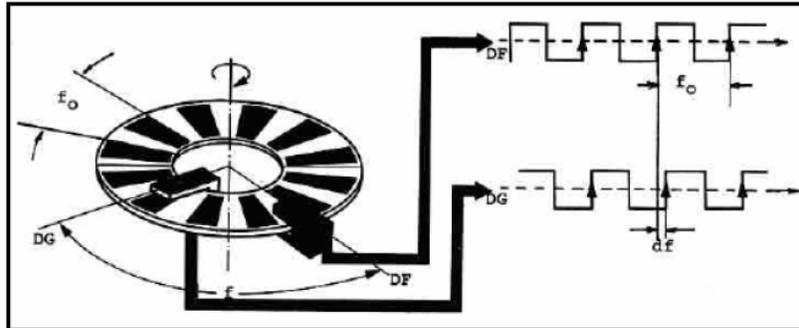
No método incremental, quando o limbo roda uma divisão, a mudança de luz para sombra e vice-versa é captada na célula fotoeléctrica; embora a forma ideal desta curva fosse triangular, devido ao fenómeno da difracção a onda é sinusoidal, posteriormente transformada numa onda quadrada, sendo contado o número de impulsos correspondentes à alternância claro-escuro.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Suponha-se um círculo graduado (limbo azimutal ou vertical) dividido em **1024** intervalos, equivalendo aos **360°** do círculo (designa-se período cada divisão  $f_0$  claro/escuro, correspondendo a cerca de **20 minutos de arco**, o que representa a "precisão" (não muito boa) do limbo).

O círculo efectua uma volta completa para cada medição de direcção e passa por um índice (sensor) fixo à base DF (direcção zero) e por um índice (sensor) móvel DG, solidário com a alidade.



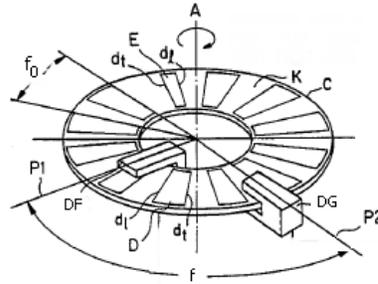
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O sensor fixo e o sensor móvel fornecem um **par de sinais** eléctricos cuja diferença de fase varia de  $2\pi$  quando o índice móvel percorre uma divisão claro-escuro (período) da graduação. A medição desta diferença de fase fornece a **interpolação** dentro de cada período da graduação, isto é, a medição fina, enquanto que a medição grosseira determina o número  $n$  de pares completos opaco/transparente que estão contidos no ângulo  $f$ .

Em geral, o limbo contém uma referência que permite que o número inteiro de períodos contido num ângulo seja obtido pela diferença entre o número de períodos detectados pelos sensores fixo e móvel à medida que a referência "passa" por esses índices.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

De uma forma mais exacta, considerando o limbo C, a marca de referência E é definida através da alteração da largura D e da distância K entre intervalos da graduação (separados por um ângulo  $f_0$ ), de tal forma que o traço inicial de cada intervalo represente sempre uma divisão equidistante do limbo, utilizada para a medição fina do ângulo. O sensor móvel DG detecta a posição do limbo através da contagem do número de intervalos D; o sensor fixo detecta a posição do limbo de forma semelhante.



Os sinais produzidos em cada sensor pela alternância claro-escuro à medida que o limbo gira com velocidade angular constante permitem a determinação da respectiva diferença de fase, que pode traduzir-se no intervalo de tempo  $dt$ .

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os sinais detectados pelos índices fixo e móvel correspondentes à alternância das divisões opaco/transparente estão representados na figura anterior. O ângulo  $f$  compreendido entre os 2 índices fixo e móvel, que será indicado digitalmente no ecrã do teodolito, é obtido através da relação de fases dos sinais.

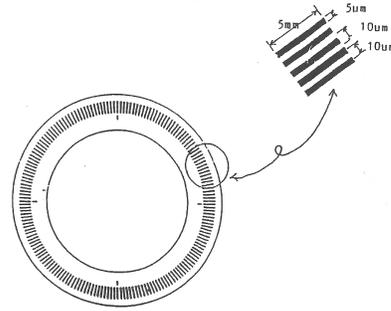
Se os 2 índices forem colineares ou estiverem a distâncias angulares cuja diferença seja um múltiplo de  $f_0$ , os 2 sinais não se distinguem e o desfazamento  $df$  é nulo; caso contrário, os 2 índices registam a passagem de uma divisão com uma certa diferença de tempo  $dt$ , correspondente a  $df$ , podendo desta forma converter-se a medida de ângulo em medida de tempo, em que  $T_0$  é o período de rotação do limbo:

$$f = n \times f_0 + \frac{dt}{T_0} \times f_0$$

medida medida  
grosseira fina

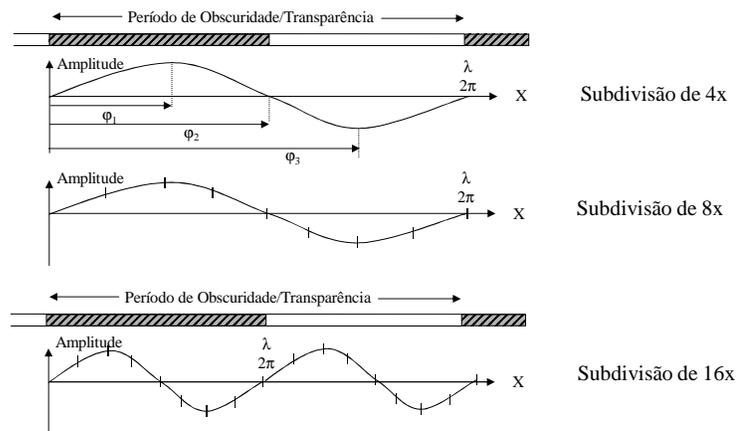
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os limbos actuais têm **12500** ou mais intervalos de graduação, podendo ler directamente **1'**. A medição fina obtém-se utilizando a interpolação, a qual inclui a avaliação da intensidade da luz pelo fotodiodo: utiliza-se para o efeito uma subescala que consiste numa graduação semelhante à da escala mas desfazada  $\frac{1}{4}$  da menor graduação, produzindo-se assim 2 ondas sinusoidais desfazadas  $360^\circ/4=90^\circ$  uma em relação à outra (correspondendo uma onda a uma função seno e a outra a uma função coseno).



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Método de interpolação electrónica:



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Interpoladores electrónicos:

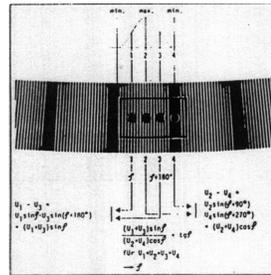
**Interpoladores de média precisão:** resolução de 0.001grad ( $\approx 3''$ ) com 1200 incrementos.

**Interpoladores de alta precisão:** resolução de 0.1 a 0.2 mgrad ( $\approx 0.5''$ ).

Método da coincidência — Usa as leituras diametralmente opostas para uma melhor estimação do valor angular;

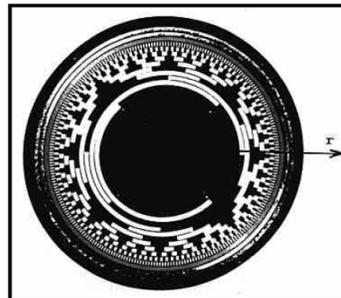
Método da comparação de fase —  
Leitura de 4 sinais-seno desfasados de  $90^\circ$ ;

Interpoladores matemáticos — Um período é formado por um grupo de linhas num espaçadas num período de Moivre.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Num segundo modelo (absoluto) consideram-se pistas opacas dispostas concentricamente e não na direcção radial. Associando o valor 0 (zero) quando a luz não passa e 1 (um) quando isto ocorre, e dispondo radialmente uma série de díodos, é possível associar cada posição do círculo a um código binário de zeros e uns numa determinada sequência.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nos teodolitos analógicos usa-se a **menor divisão do micrómetro ou da escala do microscópio como parâmetro para expressar a precisão nas leituras angulares**; neste sentido, um aparelho é mais preciso que outro se o respectivo limbo possuir maior raio ou se o micrómetro permitir maior ampliação para conseguir que a menor divisão que se consegue ler tenha uma resolução maior.

Nos teodolitos electrónicos, a menor divisão do limbo pode, em princípio, fazer-se tão pequena quanto se pretenda, já que se utiliza o método da interpolação e por esta razão a leitura efectuada não está relacionada divisão do limbo. É assim necessário definir para expressar a precisão das leituras, que consiste no desvio padrão de um conjunto de observações repetidas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

T1000



T1600



T2002



T3000



aparelhos Wild digitais

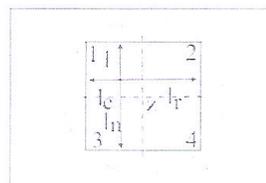
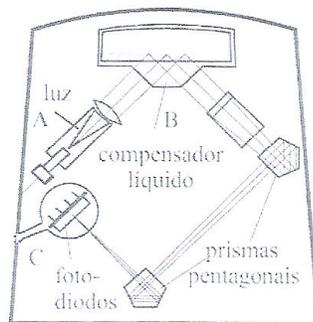
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

	T1000	T1600	T2002	T3000
<b>Telescope</b>	conventional	conventional	conventional	panfocal alignment telescope
Magnification	30×	30×	32×	43× (at infinity focus)
Field of view at 1000m	27m	27m	27m	20m
Shortest focusing distance	1.7m	1.7m	1.7m	0.6m
<b>Angle measurement</b>	continuous, absolute encoder	continuous, absolute encoder	absolute encoder, dynamic system, diametrical scanning	
Smallest unit in display	1", 1mgon, 0.01mil	1", 0.1mgon, 0.001mil	0.1", 0.01mgon, 0.00001", 0.0001%	
Updating time, continuous mode	0.1–0.3s (both circles)	0.1–0.3s (both circles)	0.3s for both circles	
<b>Standard deviation based on DIN 18723</b>	H: 3" (1mgon) V: 3" (1mgon)	H: 1.5" (0.5mgon) V: 1.5" (0.5mgon)	H: 0.5" (0.15mgon) V: 0.5" (0.15mgon)	
<b>Automatic index</b>	pendulum compensator	pendulum compensator	two-axis liquid compensator	Technical data as for T2002
Working range	±5" (±0.1gon)	±5" (±0.1gon)	3" (0.05gon) longitudinally and transversally	
Setting accuracy	±1" (±0.3mgon)	±1" (±0.3mgon)	0.1" (0.03mgon)	
<b>Plate-level sensitivity</b>	30" per 2mm	30" per 2mm	20" per 2mm	
<b>Displays</b>	LCDs; 2 displays in each telescope position; 8 figures with sign; symbols for operator guidance	2 LCD displays on both sides, 8 figures with sign, points, flags and symbols	LCDs; 8 figures with sign and decimal point, 1 alphanumeric display for operator guidance 2 displays for data	
<b>Power supply</b>	12V DC	12V DC	12V DC	
Plug-in battery	GEB77 0.45Ah	GEB77 0.45Ah	GEB68 2Ah	
External batteries	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	
<b>Weights</b>				
Instruments	4.5kg 9.9lb	4.5kg 9.9lb	7.0kg 15.4lb	7.5kg 16.5lb
Container	3.9kg 8.6lb	3.9kg 8.6lb	5.5kg 12.1lb	5.5kg 12.1lb

especificações técnicas (aparelhos digitais)

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As estações totais dispõem de **compensadores eletrônicos** que permitem a correção automática do erro de **verticalização do eixo principal**. O sistema é baseado na reflexão de um feixe de luz numa superfície líquida que permanece horizontal e que por essa razão pode ser utilizada como referência.



1-4 quadrantes

+ ponto de incidência de luz

↑ direção da luneta

← direção do eixo de inclinação

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O feixe gerado em A é reflectido na superfície líquida B e, após atravessar alguns componentes ópticos, atinge o fotodíodo C, onde o valor da corrente aí induzida permite determinar a posição do feixe emitido em relação ao ponto zero (z), o que por sua vez permite determinar a inclinação longitudinal (direcção da luneta) e a inclinação lateral (direcção do eixo secundário). Desta forma, as leituras de ângulos verticais e direcções horizontais são corrigidas automaticamente do erro de falta de verticalidade.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

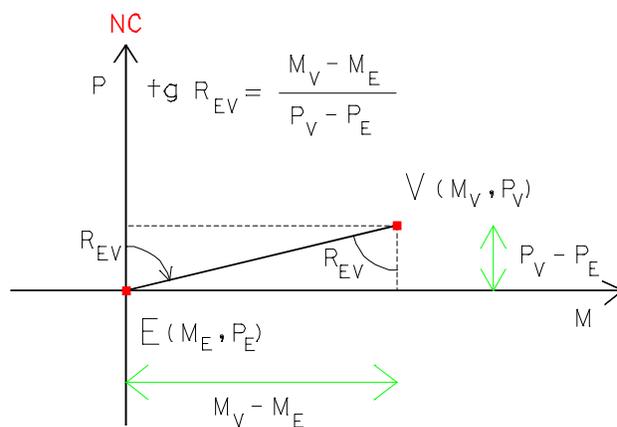
No **armazém**, os teodolitos e níveis devem ser guardados fora da embalagem; as condições ambiente devem ser desfavoráveis à proliferação de fungos (evitar locais de pouca iluminação, humidade relativa alta e com pouca movimentação de ar). Alguns fabricantes recomendam o armazenamento em temperaturas próximas de 25°C e humidade relativa em torno de 50%. Em regiões de humidade relativa alta recomenda-se o uso de desumidificadores que retirem água do ambiente por condensação; evitar ficar muito tempo sem manusear os equipamentos, pois a permanência prolongada numa mesma posição pode provocar danos aos mesmos, como, por exemplo, endurecimento de lubrificantes, fungos localizados e problemas nos níveis de bolha (a bolha de ar permanecendo numa mesma posição por muito tempo pode favorecer o aparecimento de calosidades na parte interna polida dos tubos de nível, devido ao ataque do líquido no vidro ou mesmo por impurezas existentes no líquido de preenchimento).

No **transporte**, na deslocação para o campo o instrumento deve estar acondicionado na sua embalagem original; deve-se evitar choques de qualquer natureza com o instrumento. Por isso, no veículo é aconselhável transportá-lo em local seguro e firme.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No **trabalho**, é desaconselhável transportar o instrumento montado no tripé, principalmente em trechos longos e com o instrumento inclinado. É bom lembrar que, nesta situação, grande parte da força para manter o instrumento sobre a plataforma do tripé estará concentrada nas extremidades dos parafusos calantes, sendo que neste caso, o momento ao qual o parafuso está sendo submetido é diferente daquele para o qual foi projetado. Entretanto, em deslocamentos curtos, o transporte manual poderá ser efectuado com o instrumento à frente do corpo, em posição vertical, com a alidade e luneta imobilizadas; b) evitar tocar a superfície das lentes com os dedos e proteger o instrumento contra a chuva e poeira; mantenha o tripé bem fixo ao solo e, ao colocar o instrumento sobre o mesmo certifique-se se este foi devidamente fixado à plataforma do tripé com o parafuso próprio.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Rumo  $R_{EV}$  da direcção EV

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sendo conhecidas as coordenadas  $(M_E, P_E)$  do ponto estação e  $(M_V, P_V)$  do ponto visado, o rumo da direcção EV é obtido por:

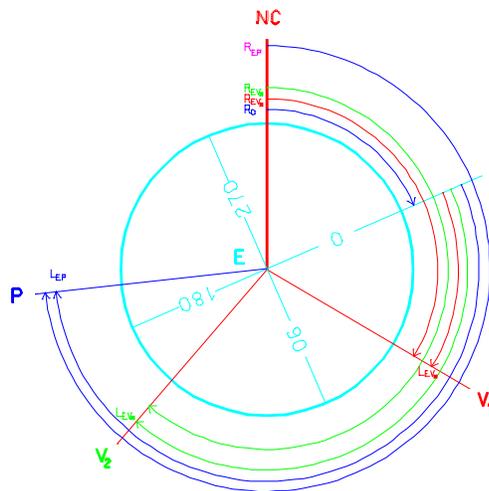
$$R_{EV} = a \tan \frac{M_V - M_E}{P_V - P_E}$$

Se  $M_V - M_E > 0$  e  $P_V - P_E > 0$  (ou seja,  $EV \in 1^\circ Q$ ):  $R_{EV} = R_{EV}$

Se  $P_V - P_E < 0$  (ou seja,  $EV \in 2^\circ$  ou  $3^\circ Q$ ):  $R_{EV} = R_{EV} + 180^\circ$

Se  $M_V - M_E < 0$  e  $P_V - P_E > 0$  (ou seja,  $EV \in 4^\circ Q$ ):  $R_{EV} = R_{EV} + 360^\circ$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$R_{01} = R_{EV1} - L_{EV1}$$

$$R_{02} = R_{EV2} - L_{EV2}$$

$$R_0 = (R_{01} + R_{02})/2$$

$$R_{EP} = R_0 + L_{EP}$$

Rumo do zero da graduação ( $R_0$ ): permite transformar leituras azimutais em rumos

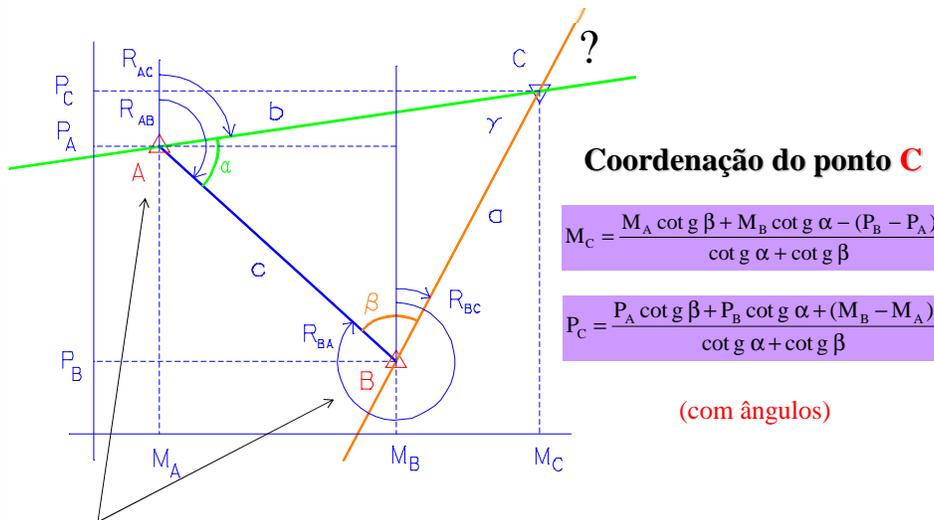
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Coordenação de um ponto por

#### Intersecção directa

O ponto a coordenar vai ser determinado por **intersecção de rectas**: cada recta contém um ponto estação, de coordenadas conhecidas, sendo conhecido o rumo da direcção ponto estação-ponto a coordenar (é assim necessário um mínimo de 2 rectas para definir a posição do ponto desconhecido).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Pontos estacionados: A e B, de coordenadas **conhecidas**: a recta verde contém o ponto A e tem rumo  $R_{AC}$  e a recta encarnada contém o ponto B e tem rumo  $R_{BC}$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Dedução de  $M_C$  e  $P_C$  utilizando ângulos:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$c = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \sin \gamma = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

$$R_{AC} = R_{AB} - \alpha$$

$$\sin R_{AB} = \sin(180^\circ - R_{AB}) = \frac{M_B - M_A}{c}$$

$$\cos R_{AB} = -\cos(180^\circ - R_{AB}) = -\frac{P_A - P_B}{c} = \frac{P_B - P_A}{c}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$M_C = M_A + b \sin R_{AC} = M_A + c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \sin(R_{AB} - \alpha) = c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} (\sin R_{AB} \cos \alpha - \cos R_{AB} \sin \alpha) =$$

$$M_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{M_B - M_A}{c} \cos \alpha - c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{P_B - P_A}{c} \sin \alpha =$$

$$M_A + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (M_B - M_A) - \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (P_B - P_A) =$$

$$M_A + \frac{\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta \sin \alpha}} (M_B - M_A) - \frac{\frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \beta \sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta \sin \alpha}} (P_B - P_A) =$$

$$M_A + \frac{\cot g \alpha}{\cot g \beta + \cot g \alpha} (M_B - M_A) - \frac{P_B - P_A}{\cot g \beta + \cot g \alpha} =$$

$$\frac{M_A \cot g \beta + M_B \cot g \alpha - M_A \cot g \alpha - (P_B - P_A)}{\cot g \beta + \cot g \alpha}$$

$$M_C = \frac{M_A \cot g \beta + M_B \cot g \alpha - (P_B - P_A)}{\cot g \alpha + \cot g \beta}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$P_C = P_A + b \cos R_{AC} = P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cos(R_{AB} - \alpha) = P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} (\cos R_{AB} \cos \alpha + \sin R_{AB} \sin \alpha) =$$

$$P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{P_B - P_A}{c} \cos \alpha + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{M_B - M_A}{c} \sin \alpha =$$

$$P_A + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (P_B - P_A) + \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (M_B - M_A) =$$

$$P_A + \frac{\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}} (P_B - P_A) + \frac{M_B - M_A}{\cot g \beta + \cot g \alpha} = P_A + \frac{\cot g \alpha}{\cot g \beta + \cot g \alpha} (P_B - P_A) + \frac{M_B - M_A}{\cot g \beta + \cot g \alpha} =$$

$$\frac{P_A \cot g \beta + P_A \cot g \alpha + P_B \cot g \alpha - P_A \cot g \alpha + (M_B - M_A)}{\cot g \alpha + \cot g \beta}$$

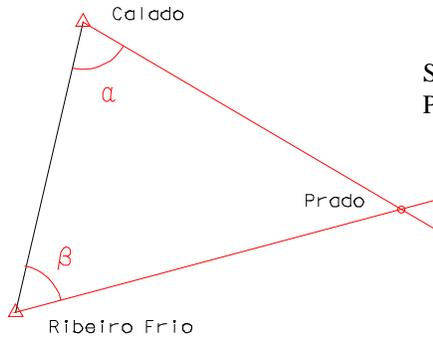
$$P_C = \frac{P_A \cot g \beta + P_B \cot g \alpha + (M_B - M_A)}{\cot g \alpha + \cot g \beta}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo:

A partir dos vértices Calado e Ribeiro Frio foram observados 2 ângulos para o ponto Prado, formando uma intersecção directa com  $\alpha = 78^\circ 35' 19.4''$ ,  $\beta = 61^\circ 59' 42.7''$ . Calcule as coordenadas planimétricas do ponto Prado sabendo que  $M_{\text{Calado}}=123546.71$ ,  $P_{\text{calado}}=-94351.52$ ,  $M_{\text{Ribeiro Frio}}=122986.44$ ,  $P_{\text{Ribeiro Frio}}=-96766.98$ .

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

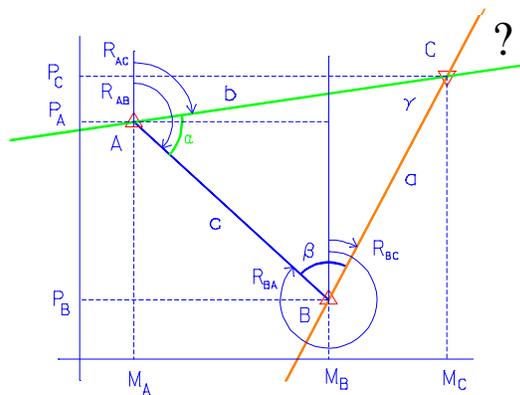


Supondo Calado = A, Ribeiro Frio = B,  
Prado = C, tem-se:

$$M_C = \frac{M_A \cot g \beta + M_B \cot g \alpha - (P_B - P_A)}{\cot g \alpha + \cot g \beta} = 126195.715 \text{ m}$$

$$P_C = \frac{P_A \cot g \beta + P_B \cot g \alpha + (M_B - M_A)}{\cot g \alpha + \cot g \beta} = -95909.996 \text{ m}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



(com rumos)

$$P_C = \frac{P_B \cot g R_{AC} - P_A \cot g R_{BC} + (M_A - M_B) \cot g R_{AC} \cot g R_{BC}}{\cot g R_{AC} - \cot g R_{BC}}$$

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \cot g R_{AC} - M_B \cot g R_{BC}}{\cot g R_{AC} - \cot g R_{BC}}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Dedução de  $M_C$  e  $P_C$  utilizando rumos:

$$R_{BC} = R_{AB} + \beta - 180^\circ$$

$$R_{AC} = R_{AB} - \alpha$$

$$\operatorname{tg} R_{BC} = \frac{M_C - M_B}{P_C - P_B} \Rightarrow P_C - P_B = (M_C - M_B) \operatorname{cotg} R_{BC} \Rightarrow P_C - M_C \operatorname{cotg} R_{BC} + M_B \operatorname{cotg} R_{BC} - P_B = 0$$

$$\operatorname{tg} R_{AC} = \frac{M_C - M_A}{P_C - P_A} \Rightarrow P_C - P_A = (M_C - M_A) \operatorname{cotg} R_{AC} \Rightarrow P_C - M_C \operatorname{cotg} R_{AC} + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - P_A = 0$$

$$M_C (\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}) + M_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_B + P_A = 0$$

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$P_C = P_B + M_C \operatorname{cotg} R_{BC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC} =$$

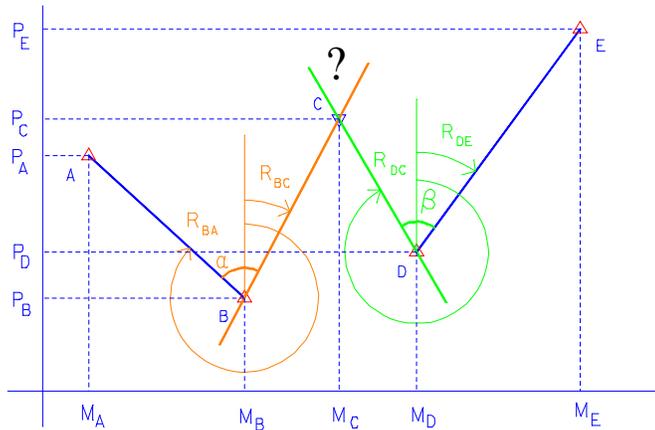
$$= P_B + \frac{(P_B - P_A) + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}} \operatorname{cotg} R_{BC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC} =$$

$$\frac{P_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_B \operatorname{cotg} R_{BC} + (P_B - P_A) \operatorname{cotg} R_{BC} + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} \operatorname{cotg} R_{BC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC} \operatorname{cotg} R_{BC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC} \operatorname{cotg} R_{AC} + M_B \operatorname{cotg} R_{BC} \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}} =$$

$$= \frac{P_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_A \operatorname{cotg} R_{BC} + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} \operatorname{cotg} R_{BC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC} \operatorname{cotg} R_{AC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}} =$$

$$\frac{P_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_A \operatorname{cotg} R_{BC} + (M_A - M_B) \operatorname{cotg} R_{AC} \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}}$$

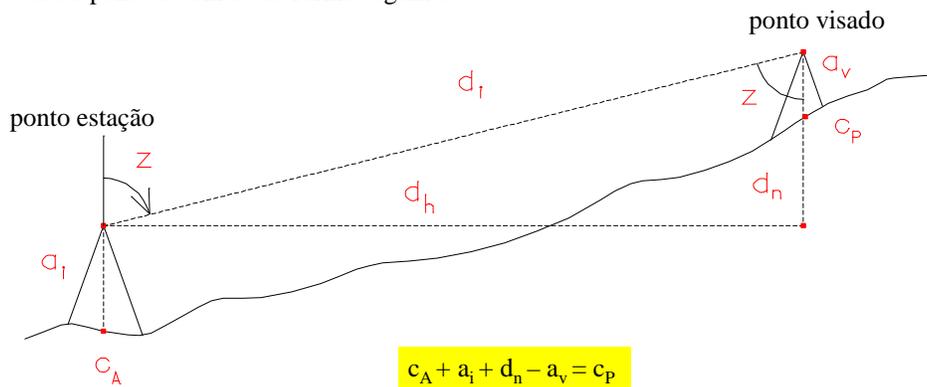
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Outra configuração possível para a intersecção directa

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

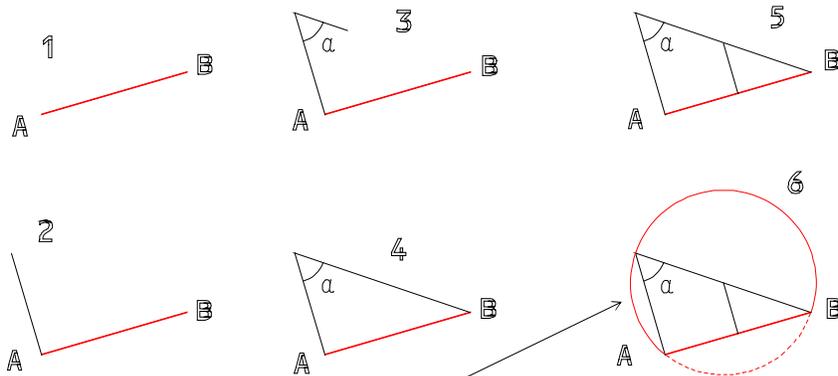
Tendo calculado as coordenadas planimétricas do ponto pretendido, a cota desse ponto obtém-se da forma seguinte:



$$c_A + a_i + d_n - a_v = c_P$$

$$\tan z = d_n / d_h \Rightarrow d_n = d_h / \tan z$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



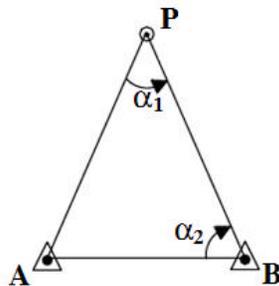
Construção do **arco capaz** que subtende o segmento AB segundo o ângulo  $\alpha$   
(lugar geométrico dos pontos que subtendem AB segundo o ângulo  $\alpha$ )

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Coordenação de um ponto por

### Intersecção lateral

Na intersecção lateral, um dos pontos de coordenadas conhecidas não pode ser ocupado, sendo as observações efectuadas a partir dum dos pontos de coordenadas conhecidas e do ponto a ser determinado.



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

### Condições favoráveis para a intersecção directa (e lateral)

Analisando as fórmulas, pode verificar-se que em função das figuras observadas, diferente será a subsequente propagação de erros, sendo as seguintes condições consideradas ótimas:

- 1) Triângulo rectângulo em P
- 2) O ângulo do vértice P próximo de  $90^\circ$  e os 2 outros maiores que  $30^\circ$
- 3) Triângulos equiláteros
- 4) Lados maiores que 300 metros

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

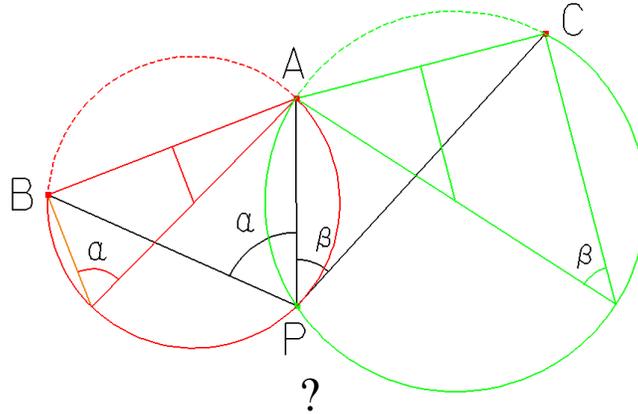
### Coordenação de um ponto por

### Intersecção inversa

O ponto a coordenar vai ser determinado por **intersecção de arcos de circunferência**: cada circunferência contém o ponto estação, de coordenadas desconhecidas e dois pontos visados, de coordenadas conhecidas (é assim necessário um mínimo de 2 circunferências para definir a posição do ponto desconhecido).

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Quando os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  entre direcções para 3 pontos A, B e C de coordenadas conhecidas são observados a partir de um ponto P de coordenadas desconhecidas é possível coordenar o ponto estação através de um procedimento designado por intersecção inversa, cuja representação gráfica é:

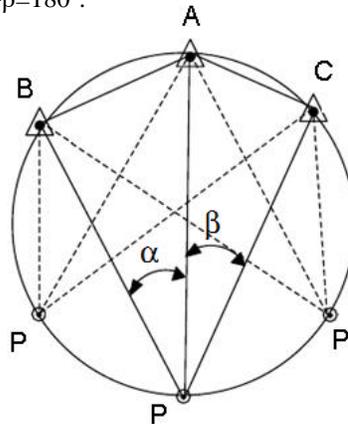


## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

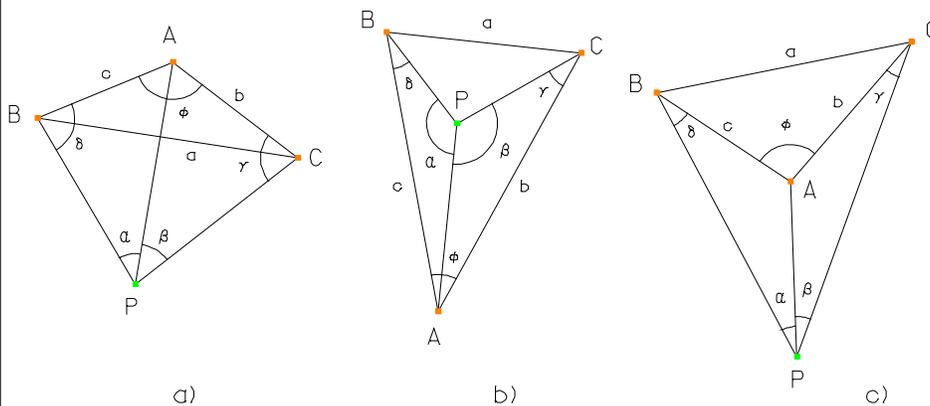
Se o ângulo  $\alpha$  entre PB e PA for observado, a posição de P permanece indeterminada pois este último pode estar localizado em qualquer ponto do arco capaz que subtende para o segmento BA o ângulo  $\alpha$  (este arco capaz contém os pontos B, A e P). É então necessária informação adicional para tornar o problema determinado, como seja o ângulo  $\beta$  definido pelas pontaria para A e C, a partir do qual se determina o arco capaz que subtende para AC o ângulo  $\beta$  (este arco capaz contém os pontos A, C e P). Como o ponto P tem que pertencer aos dois arcos capazes, a sua posição terá que estar na respectiva intersecção e como A define uma dessas intersecções, o ponto P fica unívocamente determinado.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Esta solução presupõe que os 4 pontos A, B, C e P não pertençam à mesma circunferência (circunferência perigosa) pois assim os dois arcos capazes coincidiriam, não se obtendo solução para o problema. Quando esta situação acontece tem-se  $BAC + \alpha + \beta = 180^\circ$ .



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



3 configurações possíveis para os pontos A, B, C e P

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\phi = R_{AB} - R_{AC} \quad \text{caso a)}$$

$$\phi = 360^\circ + R_{AC} - R_{AB} \quad \text{casos b) e c)}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \phi + \delta = 360^\circ \Rightarrow \delta + \gamma = 360^\circ - (\alpha + \beta + \phi) = \psi \quad \text{casos a) e b)}$$

$$\alpha + \delta + \beta + \gamma - \phi = 0^\circ \Rightarrow \delta + \gamma = \phi - \alpha - \beta = \psi \quad \text{caso c)}$$

$$AP = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c \sin \delta}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \delta = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{c \sin \beta} = \sin(\psi - \gamma) = \sin \psi \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma$$

dividindo por  $\sin \psi \sin \gamma$

$$\cot \alpha \gamma = \cot \alpha \psi + \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta \sin \psi}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O procedimento analítico é então:

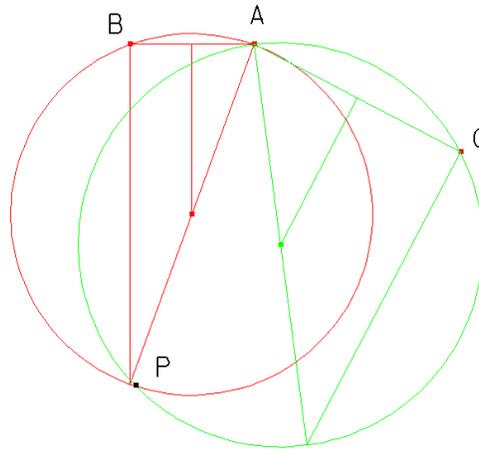
- 1) Calcular  $\psi$
- 2) Calcular  $\gamma$
- 3) Calcular  $\delta = \psi - \gamma$
- 4) Calcular a distância AP usando b,  $\gamma$  e  $\beta$ . Confirmar com c,  $\delta$  e  $\alpha$
- 5) Calcular o ângulo CAP =  $180^\circ - (\gamma + \beta)$  para determinar a direção AP  
Confirmar com o ângulo BAP
- 6) Obter PC e/ou PB através da lei dos senos
- 7) Calcular e confirmar as coordenadas de P

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo:

ponto	M (m)	P (m)
B	10 000.00	20 000.00
A	16 672.50	20 000.00
C	27 732.76	14 215.24

$$\alpha = 20^{\circ} 05' 53'' \quad \beta = 35^{\circ} 06' 08''$$



Resolução gráfica

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} = 270^{\circ}$$

pois  $P_B = P_A$  e  $M_B < M_A$

$$R_{AC} = a \tan \frac{M_C - M_A}{P_C - P_A} = a \tan \frac{27732.76 - 16672.50}{14215.24 - 20000.00} = a \tan \frac{11060.26}{-5784.76} = -62^{\circ} 23' 22''$$

como AC é 2º quadrante,  $R_{AC} = 180^{\circ} - 62^{\circ} 23' 22'' = 117^{\circ} 36' 38''$

$$\phi = R_{AB} - R_{AC} = 152^{\circ} 23' 23''$$

$$\psi = 360^{\circ} - (\alpha + \beta + \phi) = 152^{\circ} 24' 36''$$

$$c = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2} = 6672.5$$

$$b = \sqrt{(M_C - M_A)^2 + (P_C - P_A)^2} = 12481.70$$

$$\cot \text{an } \gamma = 0.501312$$

$$\gamma = 63^{\circ} 22' 29''$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\delta = \psi - \gamma = 89^\circ 02' 07''$$

$$AP = \frac{c \sin \delta}{\sin \alpha} = 19415,06$$

$$CAP = 180^\circ - (\gamma + \beta) = 81^\circ 31' 23''$$

$$R_{AP} = R_{AC} + CAP = 199^\circ 08' 01''$$

$$M_P = M_A + AP \sin R_{AP} = 10308,78$$

$$P_P = P_A + AP \cos R_{AP} = 1657,49$$

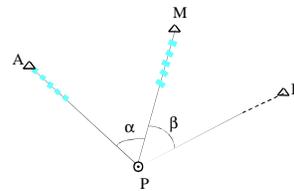
## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Outras fórmulas:

Dados:  $(M_A, P_A)$ ;  $(M_M, P_M)$ ;  $(M_B, P_B)$ ;

Observações:  $\alpha = \hat{A}PM$  e  $\beta = \hat{M}PB$

Incógnitas:  $(M_P, P_P)$



Seja  $T_C = \text{tg}(R_{PC}) = \frac{M_C - M_P}{P_C - P_P}$  para C qualquer

Então  $M_P = M_A - (P_A - P_P)T_A$ ; (1a)

$M_P = M_B - (P_B - P_P)T_B$ ; (1b)

$M_P = M_M - (P_M - P_P)T_M$  (1c)

Igualando (1a) e (1c) e resolvendo em ordem a  $P_P$  obtém-se:

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}$$

De forma análoga com as outras combinações, obtém-se fórmulas idênticas.

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Assim, tem-se para  $P_p$ :

$$P_p = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}; \quad (2a)$$

$$P_p = \frac{M_B - M_A - P_B T_B + P_A T_A}{T_A - T_B}; \quad (2b)$$

$$P_p = \frac{M_B - M_M - P_B T_B + P_M T_M}{T_M - T_B} \quad (2c)$$

Agora com (2c) e (2a) multiplicadas por -1:

$$[(M_A - M_M) - P_A T_A + P_M T_M](T_B - T_M) = [(M_M - M_B) - P_M T_M + P_B T_B](T_M - T_A) \quad (3)$$

Foram eliminadas as coordenadas de P ( $M_p, P_p$ )

Resolvendo (3) e deduzindo uma expressão para  $T_M$ :

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

**Nota 1):**  $\alpha = R_{PM} - R_{PA} \Leftrightarrow R_{PA} = R_{PM} - \alpha;$   
 $\beta = R_{PB} - R_{PM} \Leftrightarrow R_{PB} = R_{PM} + \beta;$

Com  $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}} = \frac{\operatorname{tga} \cot \operatorname{gb} + 1}{\cot \operatorname{gb} - \operatorname{tga}}$

tem-se  $T_A = \frac{T_M - \operatorname{tg}\alpha}{1 + T_M \operatorname{tg}\alpha} = \frac{T_M \cot \operatorname{g}\alpha - 1}{\cot \operatorname{g}\alpha + T_M}$        $T_B = \frac{T_M + \operatorname{tg}\beta}{1 - T_M \operatorname{tg}\beta} = \frac{T_M \cot \operatorname{g}\beta + 1}{\cot \operatorname{g}\beta - T_M}$

**Nota 2):**  $T_M - T_A = T_M - \frac{T_M - \operatorname{tg}\alpha}{1 + T_M \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + T_M^2}{\cot \operatorname{g}\alpha + T_M}$

$$T_B - T_M = \frac{T_M + \operatorname{tg}\beta}{1 - T_M \operatorname{tg}\beta} - T_M = \frac{1 + T_M^2}{\cot \operatorname{g}\beta - T_M}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Substituindo as expressões anteriores de  $T_A$  e  $T_B$ :

$$\begin{aligned} & \left[ (M_A - M_M) - P_A \left( \frac{T_M \cot g\alpha - 1}{\cot g\alpha + T_M} \right) + P_M T_M \right] \left( \frac{1 + T_M^2}{\cot g\beta - T_M} \right) = \\ & = \left[ (M_M - M_B) - P_M T_M + P_B \left( \frac{T_M \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - T_M} \right) \right] \left( \frac{1 + T_M^2}{\cot g\alpha + T_M} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (M_A - M_M) - P_A \left( \frac{T_M \cot g\alpha - 1}{\cot g\alpha + T_M} \right) + P_M T_M \right] (\cot g\alpha + T_M) = \\ & = \left[ (M_M - M_B) - P_M T_M + P_B \left( \frac{T_M \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - T_M} \right) \right] (\cot g\beta - T_M) \end{aligned}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fazendo a multiplicação:

$$\begin{aligned} & (M_A - M_M)(\cot g\alpha + T_M) - P_A(T_M \cot g\alpha - 1) + P_M T_M(\cot g\alpha + T_M) = \\ & = (M_M - M_B)(\cot g\beta - T_M) - P_M T_M(\cot g\beta - T_M) + P_B(T_M \cot g\beta + 1) \end{aligned}$$

Desenvolvendo, cortando os termos simétricos e resolvendo em ordem a  $T_M$ , vem finalmente:

### Fórmula de Delambre

$$T_M = \frac{(P_B - P_A) + (M_M - M_A) \cot g\alpha + (M_M - M_B) \cot g\beta}{(M_A - M_B) + (P_M - P_A) \cot g\alpha + (P_M - P_B) \cot g\beta}$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

1 – Calcular  $T_M$       $T_M = \frac{(P_B - P_A) + (M_M - M_A) \cot g\alpha + (M_M - M_B) \cot g\beta}{(M_A - M_B) + (P_M - P_A) \cot g\alpha + (P_M - P_B) \cot g\beta}$

2 – Calcular  $T_A$  e  $T_B$

$$T_A = \frac{T_M - \text{tg}\alpha}{1 + T_M \text{tg}\alpha} \quad T_B = \frac{T_M + \text{tg}\beta}{1 - T_M \text{tg}\beta}$$

3 – Calcular  $P_P$  com  $T_A$ ,  $T_B$  ou  $T_M$

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}$$

4 – Calcular  $M_P$  com  $T_A$ ,  $T_B$  ou  $T_M$  e  $P_P$

$$M_P = M_A - (P_A - P_P) T_A$$

## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

- { 3 direcções (2 ângulos) – cálculo directo
- { 4 ou mais direcções ( $\geq 3$  ângulos) – cálculo por ajustamento

### Método dos Giros do Horizonte

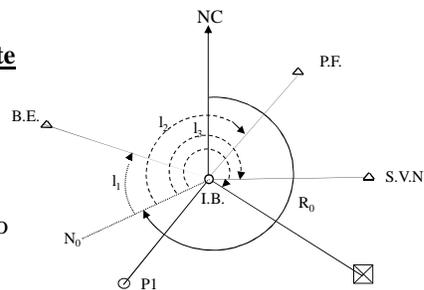
NC – Norte cartográfico

$N_0$  – Direcção do zero do limbo

$R_0$  – Rumo de orientação do giro

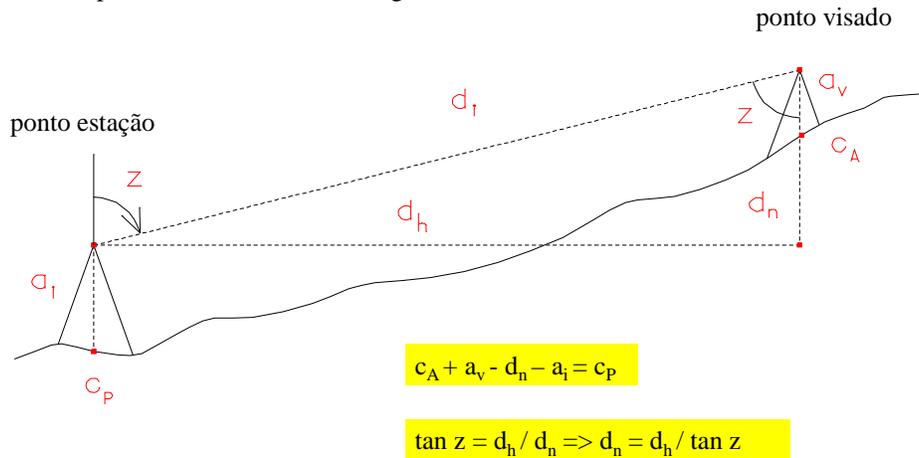
$l_1, \dots, l_n$  – direcções a observar

Incógnitas: ( $M_{IB}$ ,  $P_{IB}$ ,  $R_0$ )



## LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tendo calculado as coordenadas planimétricas do ponto pretendido, a cota desse ponto obtém-se da forma seguinte:



## Medição de distâncias

### Medição directa de distâncias

A **medição directa da distância** efectua-se recorrendo a uma materialização de um padrão de medida que é aplicado à distância a medir; esse padrão pode consistir em cadeias (trena), fios ou fitas métricas, mais ou menos precisas conforme a qualidade do material utilizado.



## Medição de distâncias

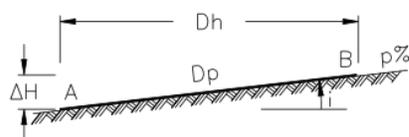
### Medição directa de distâncias

As medidas à fita são o método mais clássico para a determinação de distâncias, tendo como principais inconvenientes serem dependentes da morfologia do terreno (acidentado, muito inclinado, etc), terem um alcance limitado e terem uma precisão fraca.

	10 m	20 m	30 m	50 m	100 m
<b>CLASSE I</b>	± 1,1 mm	± 2,1 mm	± 3,1 mm	± 5,1 mm	
<b>CLASSE II</b>	± 2,3 mm	± 4,3 mm	± 6,3 mm	± 10,3 mm	± 20,3 mm
<b>CLASSE III</b>	± 4,6 mm	± 8,6 mm	± 12,6 mm	± 20,6 mm	

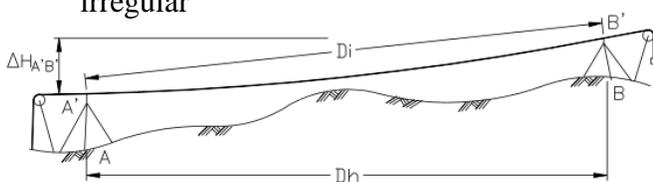
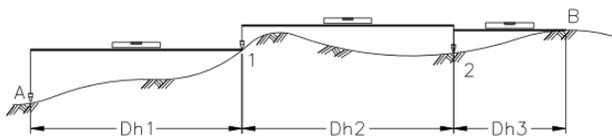
As fitas podem classificar-se em classes de acordo com a respectiva tolerância: assim, se se pretender obter o respectivo desvio padrão, basta dividir o valor constante na tabela por 2.6.

## Medição de distâncias



Medição de distância com a fita sobre o terreno

Medição de distância com a fita em vários troços num terreno irregular



Medição de distância com a fita em modo suspenso

## Medição de distâncias

O comprimento de uma fita é fornecido para uma dada temperatura ambiente (em geral 20°) e para uma dada tensão. Para medições finas, aproximando-se da tolerância da fita, é necessário:

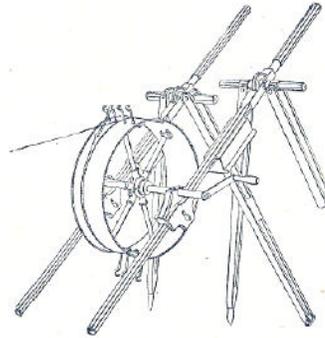
- a) utilizar um dinamómetro para assegurar a tensão óptima (um esforço de 5 daN numa fita em aço de secção 0.2x13 mm<sup>2</sup> equivale a um alongamento de 5 mm numa fita de 50 m de comprimento). No caso de a fita ficar suspensa, é necessário regular o dinamómetro de forma a anular o efeito de catenária.
- b) corrigir o efeito da dilatação linear do material devido à temperatura
- c) no caso de ser necessário aplicar várias vezes a fita, garantir o alinhamento (um erro de alinhamento de 30 cm numa fita de 50 m de comprimento origina um erro de 1mm na distância, sempre positivo).

## Medição de distâncias

No início da geodesia utilizavam-se réguas de madeira impregnadas de óleo para protecção contra a humidade para a medição de distâncias. Em 1792, Borda, em França, utilizou réguas construídas com ligas metálicas de cobre e platina, de forma a minimizar os efeitos da variação da temperatura no respectivo comprimento; Bessel, na Alemanha, introduziu réguas análogas, enquanto que em Inglaterra eram utilizadas ligas de ferro-latão, obtendo-se em geral variações no comprimento da régua da ordem de  $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  (embora na altura fosse impossível medir a temperatura ambiente com a precisão de 1°C). O procedimento consistia em colocar várias réguas justapostas para efectuar as medidas ou em transportar a mesma régua ao longo de um dado alinhamento.

## Medição de distâncias

No início do século XX constatou-se que a liga ferro-níquel, em proporções adequadas (ínvar, 64% aço, 36% níquel), apresentava um coeficiente de dilatação reduzido (daí o nome ínvar, de invariável). A partir do ínvar foram construídos fios de comprimento *standard* igual a **24 m** e de diâmetro 1.65 mm, acondicionados para efeito de transporte em tambores apropriados de 50 cm de diâmetro (tem como complementos de medida um fio de 8 m e uma fita graduada em mm de 4 m, ambos de ínvar, para as medidas complementares de 24 m).



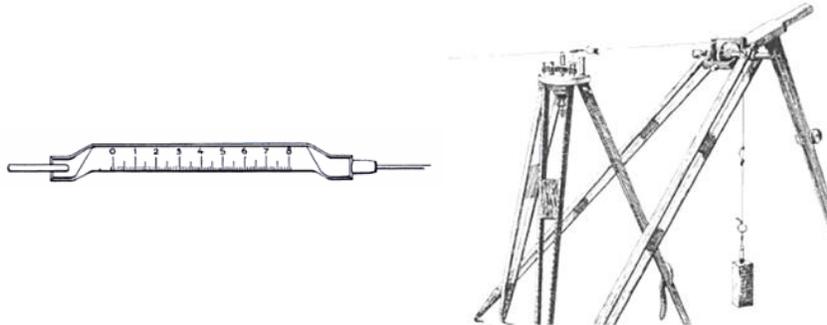
## Medição de distâncias

Para determinar as dimensões duma cadeia geodésica é necessário medir directamente sobre o terreno um dos lados da cadeia ou pelo menos um dos lados do triângulo ligado a esta cadeia e referir o comprimento ao elipsóide. Escolhe-se um terreno plano, horizontal se possível, pouco sujeito a deformações e de tal modo que as extremidades sejam intervisíveis.



## Medição de distâncias

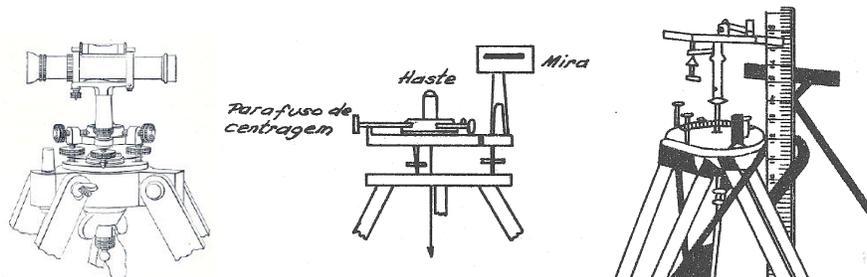
Para efectuar uma medição, o fio era colocado entre dois tripés e submetido a uma tensão de 10 kg em cada extremidade. Cada fio tinha nas extremidades uma régua de 8 cm, onde as leituras eram efectuadas utilizando lupas, permitindo uma precisão de 0.1 mm/24 m ou  $1/240000$ .



Tripés de referência e tensor

## Medição de distâncias

No prato superior do tripé de referência (que pode ter um deslocamento lateral de 15 cm), munido de parafusos nivelantes, podiam colocar-se alternadamente um óculo de alinhamento, uma referência ou um nível.



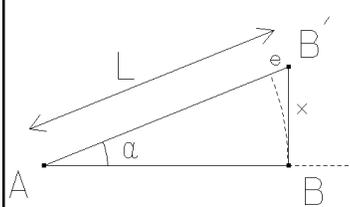
## Medição de distâncias

Sendo o comprimento das bases da ordem das dezenas de quilómetros, o fio percorria a distância tantas vezes quantas as necessárias para ligar as duas extremidades da base, sendo os dois tripés nos quais o fio se apoiava **alinhados** com auxílio de um teodolito e de um terceiro tripé, colocado à frente.

Para efeito de redução da distância inclinada ao horizonte, observava-se o **desnível** entre as duas extremidades relativamente ao horizonte. Este processo requeria a selecção ou preparação de um alinhamento no terreno, tão plano quanto possível.

## Medição de distâncias

Considerando a figura que exprime o erro de alinhamento  $x=BB'$  cometido num troço de comprimento  $L$  m, a influência  $e$  deste erro na medição da distância pretendida obtém-se de


$$x \approx \alpha L \Rightarrow \alpha = \frac{x}{L}$$
$$\cos \alpha = \frac{AB}{L} \Rightarrow AB = L \cos \alpha = L \cos \frac{x}{L}$$
$$e = AB' - AB = L - L \cos \frac{x}{L} = L \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} + \dots \right) \right) \approx \frac{x^2}{2L}$$

A condição a verificar para o **erro relativo na medição da distância** é então:

$$\frac{e}{L} = \frac{x^2}{2L^2} < 10^{-6} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{L} < \sqrt{2} 10^{-3}$$

Como por construção  $L=24$  m, vem  $x < 3$  cm, o que é realizável.

## Medição de distâncias

À primeira vista, pode parecer que o erro de falta de alinhamento não é preocupante na medição de uma base mas este tipo de erro é **sistemático**, isto é, em cada troço obtém-se sempre um valor maior do que é suposto. Note-se, por exemplo, que numa base de **24 km** de comprimento é necessário efectuar **1000** operações sucessivas. Se nesta distância se pretender assegurar uma precisão de 0.5 cm, um valor que corresponde a uma precisão relativa de  $2 \times 10^{-5}$ , cada operação individual deve ser realizada com um erro máximo de  $2 \times 10^{-8}$ .

## Medição de distâncias

O erro cometido no cálculo do desnível entre as duas extremidades do fio exprime-se pela mesma equação, sendo portanto proporcional ao quadrado do desnível, sendo assim igualmente importante alinhar os tripés não só em direcção como em altura. As diferenças de nível entre as extremidades de cada troço são medidas com nivelamento de precisão.

Sendo  $e_1$  o erro de leitura em cada uma das réguas, o erro cometido na medição de uma distância devido aos erros de leitura é dado por  $\sqrt{2} e_1$  ; sendo efectuados  $n$  troços, o erro resultante é  $\sqrt{2n} e_1$  .

## Medição de distâncias

Considerando uma base de 12 km medida com fios de 24 m de comprimento, é necessário efectuar 500 troços e tomando  $e_1=0.1$  mm, o erro associado ao comprimento da base devido a erros de leitura tem o valor  $\sqrt{2 \times 500} \times 0.1 \text{ mm} = 3.16 \text{ mm}$ , inferior à precisão imposta à medição de distâncias (aceitável, portanto). Este cálculo indica que utilizando réguas de 4 m, o aumento por um factor de 6 do número de troços conduziria à exigência de uma precisão 2.5 vezes melhor nas leituras individuais.

## Medição de distâncias

Considerando os valores  $L=24$  m,  $T=10$  kg e  $p=17.3$  gr/m, respectivamente o comprimento do fio, a tensão aplicada em cada extremidade e a densidade linear do fio, o efeito de **catenária** origina uma diferença entre a distância medida entre os dois tripés segundo o segmento de recta  $d$  que os une e ao longo do fio dada por  $e \approx \frac{8f^2}{3d} \approx 1.6 \text{ mm}$ , onde  $f$  é a flecha, a que corresponde um erro relativo  $\frac{1.6}{24000} \approx 7 \times 10^{-5}$ .

## Medição de distâncias

Outros erros devem ser considerados como sejam o erro de **elasticidade** do fio, a correcção de **temperatura** e a correcção devida ao **peso** do próprio fio; para além disso, as distâncias medidas devem ser reduzidas ao nível do mar. De forma a garantir o rigor das observações de distância, os fios devem ser calibrados regularmente, através da comparação com padrões de medida.

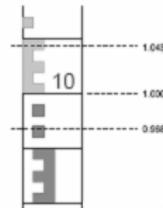
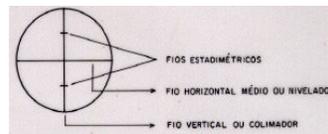
## Medição de distâncias

### Medição indirecta de distâncias

O processo de medida é indirecto quando **a distância é obtida em função da medida de outras grandezas**, não havendo, portanto, necessidade de percorrer a distância a determinar. A medida **taqueométrica** de distâncias é baseada na resolução de triângulos isósceles ou rectângulos. Os instrumentos utilizados são denominados **taqueómetros**, que além de medir ângulos, medem distâncias horizontais e verticais.

## Medição de distâncias

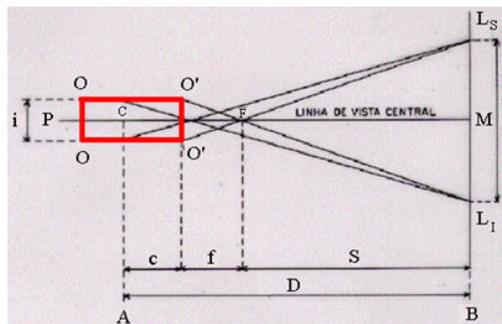
Os taqueómetros são classificados em normais (teodolitos providos de fios estadiométricos) e autoredutores (fornecem os dados referentes às leituras na mira com auxílio dos fios estadiométricos, bem como o ângulo de inclinação lido no limbo vertical do aparelho).



## Medição de distâncias

Da semelhança entre os triângulos  $FL_S L_1$  e  $O'O'F$  tem-se  $\frac{O'O'}{I} = \frac{f}{S}$ . Sendo  $O'O' = i$  a distância entre os 2 fios estadiométricos do retículo e  $L_S - L_1 = I$  a diferença entre as leituras na mira, tem-se  $S = \frac{I f}{i}$ . Sendo  $D = S + f + c$ , então

$D = I \frac{f}{i} + (f + c)$ , onde  $\frac{f}{i}$  se designa constante multiplicativa e  $(f + c)$  se designa constante aditiva (nos teodolitos modernos têm valor 100 e 0, respectivamente).



- P é o observador;
- C é o eixo vertical do instrumento;
- F é o foco do sistema;
- O-O' é a ocular da luneta;
- O'-O' é a objetiva da luneta;
- A é o ponto estação;
- B é o ponto onde está a mira;
- c é a distância entre o eixo vertical do instrumento e a objetiva;
- f é a distância focal;
- S é distância entre o foco e a mira;
- D é a distância entre os pontos A e B.

Visadas horizontais ( $z=90^\circ$ )  $D_h = 100*(L_S - L_I)$

## Medição de distâncias

No caso de uma visada inclinada de um ângulo  $\alpha$ , por semelhança de triângulos tem-se:

$$\frac{S}{f} = \frac{I'}{i} \text{ ou } S = I' \frac{f}{i}$$

e então  $D = S + f + c = I' \frac{f}{i} + (f + c)$ , onde

$I' = L'_S - L'_I$  não é conhecido, já que a mira está na posição vertical. Como  $I'$  é perpendicular à visada,  $\beta \approx 90^\circ$ , tem-se  $L'_S M = L_S M \cos \alpha$  e

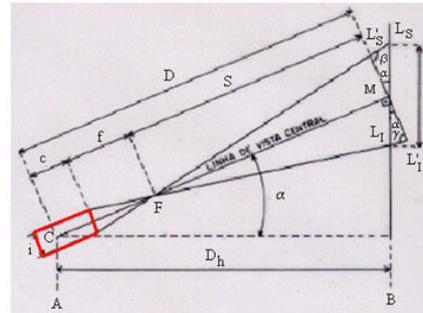
$L'_I M = L_I M \cos \alpha$ , donde

$$L'_S M + L'_I M = (L_S M + L_I M) \cos \alpha,$$

$L'_S L'_I = L_S L_I \cos \alpha = i \cos \alpha$ , donde

$$D = i \cos \alpha \frac{f}{i} + (f + c) = 100(L_S - L_I) \cos \alpha \text{ e}$$

$$D_h = D \cos \alpha = 100(L_S - L_I) \cos^2 \alpha = 100(L_S - L_I) \sin^2 z$$

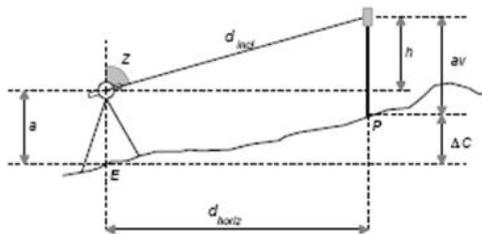


Visadas inclinadas ( $z \neq 90^\circ$ )

$$D_h = 100 * (L_S - L_I) \sin^2 z$$

## Medição de distâncias

$$D_v = D_h / \tan z \quad \text{desnível}$$



Utilizando um taqueômetro, a distância vertical ou desnível entre o ponto estação E e o ponto visado P é dado por:

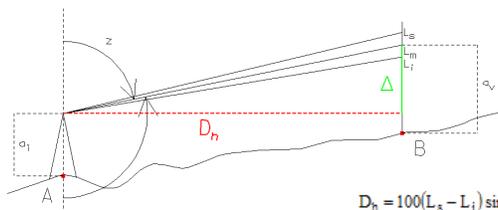
$$D_v = \Delta C = C_P - C_E = a + h - a_v = a + D_h / \tan z - a_v,$$

onde  $a_v$  corresponde à leitura efectuada com o fio médio.

## Medição de distâncias

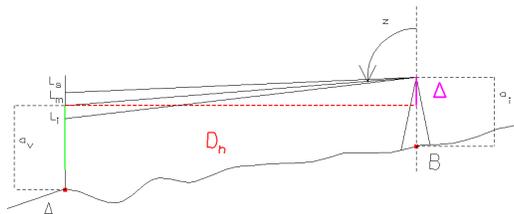
Exemplo: ao efectuar um levantamento taqueométrico, estacionou-se no ponto A um taqueómetro com constante estadimétrica igual a 100 e visou-se o ponto B, tendo-se obtido as observações seguintes (os ângulos verticais que o aparelho fornece são **ângulos nadirais**): altura do aparelho: 1.47 m, ângulo vertical: 103.137 gon, leitura do fio superior: 2.500 m, leitura do fio médio: 1.500 m, leitura do fio inferior: 0.500 m. Em seguida, estacionou-se o taqueómetro no ponto B e visou-se o ponto A, tendo-se registado as observações: altura do aparelho: 1.51 m, leitura do fio médio: 1.600 m. Calcule a distância horizontal entre os pontos A e B. Determine a cota do ponto B sabendo que a cota do ponto A é igual a 121.05 m. Admitindo que não existem erros de qualquer tipo, determine o ângulo vertical em B, bem como as leituras dos fios superior e inferior.

## Medição de distâncias



$$D_h = 100(L_s - L_i) \sin^2 z = 100(2.500 - 0.500) \sin^2 96.863 = 199.51 \text{ m}$$

$$C_B = C_A + a_i + \frac{D_h}{\tan z} - a_v = 121.05 + 1.47 + \frac{199.51}{\tan 96.863} - 1.500 = 130.86 \text{ m}$$

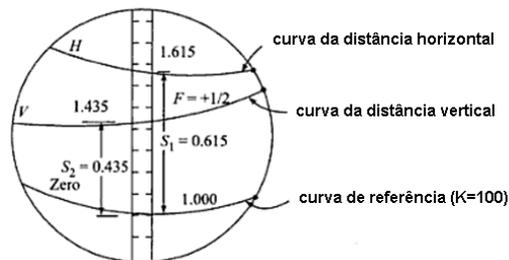


$$C_B + a_i - \frac{D_h}{\tan z} - a_v = C_A \Rightarrow C_B - C_A + a_i - a_v = \frac{D_h}{\tan z} \Rightarrow z = a \tan\left(\frac{D_h}{C_B - C_A + a_i - a_v}\right) = 103.099 \text{ gon}$$

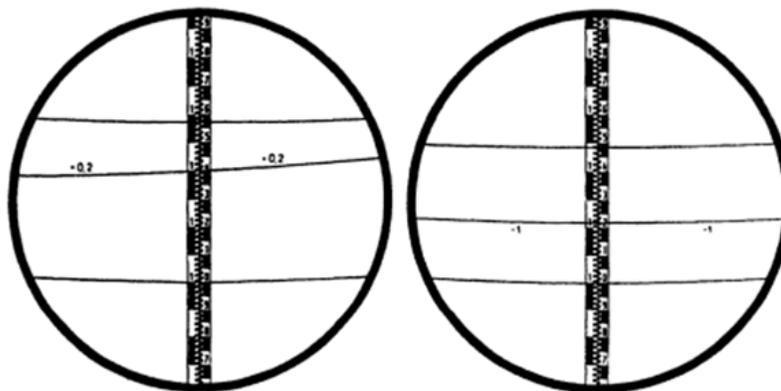
$$\begin{cases} L_s = 2.6000 \\ L_m = 1.600 \\ L_i = 0.600 \end{cases}$$

## Medição de distâncias

O taqueómetro **autoreductor** utiliza curvas de redução, projectadas no campo de visão, para a leitura directa de distâncias horizontais e diferenças de altitude a partir de visadas para miras verticais. Estas curvas de redução, baseadas nas fórmulas para a distância inclinada estadimétrica, estão impressas numa placa de vidro que acompanha o movimento da luneta. A constante de multiplicação horizontal é igual a 100 mas há várias curvas dependendo do ângulo zenital.



## Medição de distâncias



Leituras com taqueómetro autoreductor

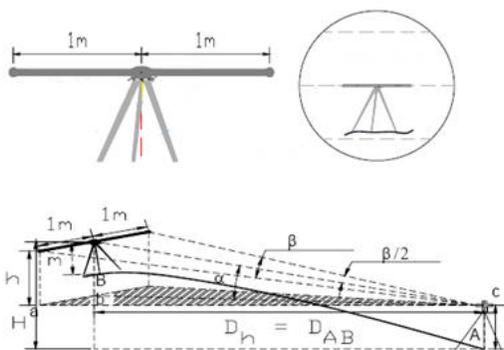
distância horizontal =  $(1.572 - 1.000) \times 100 = 57.2$  m  
 diferença de elevação:  $+0.2 \times (140.1 - 100.0) = +8.02$  m

distância horizontal =  $(1.485 - 1.000) \times 100 = 48.5$  m  
 diferença de elevação:  $-1 \times (121.7 - 100.0) = -21.7$  m

## Medição de distâncias

Uma **estadia** é constituída por um tubo semicircular em aço que envolve um fio de ínvar, fixo numa das extremidades e na outra submetido a uma tensão constante de 10 daN por intermédio de uma mola. Um aumento de temperatura igual a 10°C traduz-se numa variação de comprimento de 0.024 mm para o fio de ínvar e 0.24 mm para o tubo envolvente, o que aumenta a tensão da mola, alongando o comprimento do fio em 0.004 mm. No entanto, o sistema de suspensão actua 0.018 mm em sentido contrário, o que se traduz num alongamento real de 0.01 mm, pelo que se pode dizer que o comprimento da estadia é conhecido a menos da décima de mm.

## Medição de distâncias

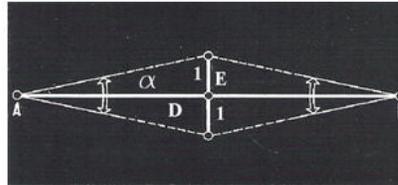


Para medições topográficas de distância impõe-se uma precisão da ordem de **1/10000 (ou  $10^{-4}$ )**. Para o efeito, utilizam-se miras de ínvar de comprimento fixo (estádias de ínvar), montadas em tripés de forma a manterem-se numa posição horizontal e numa direcção perpendicular à pontaria. Sendo  $M$  o comprimento da mira, as leituras azimutais feitas para as duas referências extremas da mira determinam o ângulo azimutal  $\beta$  tal que  $D_h = M/2 \cotg(\beta/2)$ ; sendo  $M=2$ , tem-se  $D_h = \cotg(\beta/2)$ . Devem ser realizadas várias observações do ângulo horizontal; como a estadia está horizontal, basta utilizar uma das faces do aparelho.

## Medição de distâncias

Exemplo: a estadia de invar pode ser utilizada desde que a distância a medir seja da ordem dos 50 m; assim, para medir a distância AB da ordem dos 100 m, coloca-se a estadia aproximadamente a meia distância entre A e B e estaciona-se em ambos os extremos da distância a medir. Tendo sido registados as leituras seguintes nas pontanias para as extremidades da estadia, calcule a distância AB:

Estação	Esquerda	Direita
A	102.3771 gon	104.6712 gon
B	210.3322 gon	212.6568 gon



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{D} \Rightarrow D = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \begin{cases} D_{AE} = \frac{1}{\tan 1.14705 \text{ gon}} = 55.495 \text{ m} \\ D_{BE} = \frac{1}{\tan 1.1623 \text{ gon}} = 54.766 \text{ m} \\ D_{AB} = 110.261 \text{ m} \end{cases}$$

## Medição de distâncias

Se se pretender determinar a influência de um erro angular  $d\beta$  em  $\beta$  na distância obtida com estadia de invar, diferencia-se a expressão  $D = \frac{M}{2} \cotg \frac{\beta}{2}$  em ordem a  $\beta$ :

$$dD = \frac{M}{2} \frac{d}{d\beta} \left( \cotg \frac{\beta}{2} \right) d\beta = \frac{M}{2} \left( -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\beta}{2} \right) d\beta = -\frac{M}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{M \cos^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{D^2}{M} \frac{d\beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

O valor de  $dD$  é majorado por  $dD = \frac{D^2}{M} d\beta$  (o sinal negativo significa que a distância vem demasiado pequena se o ângulo for demasiado grande). Admitindo que a precisão na medição do ângulo  $\beta$  é  $d\beta=1''$  e que  $M=2$ , tem-se:

$$dD_m = \frac{D_m^2}{2} \frac{1''}{206265''} = \frac{D_m^2}{412530} \approx \frac{D_m^2}{400000}$$

ou

$$dD_{mm} = \frac{D_m^2}{400}$$

Fazendo variar a distância, obtém-se a tabela seguinte, que permite concluir que para garantir a precisão de 1/10000 na determinação da distância, D deve ser  $\leq 40$  m.

D (m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
dD (mm)	1.0	3.9	8.7	16	24	55	97	218	388	606



## Medição de distâncias

Se se pretender determinar a influência de um erro  $dM$  no comprimento  $M$  da estadia na distância obtida com estadia de invar, diferencia-se a expressão  $D = \frac{M}{2} \cot g \frac{\beta}{2}$  em ordem a  $M$ :

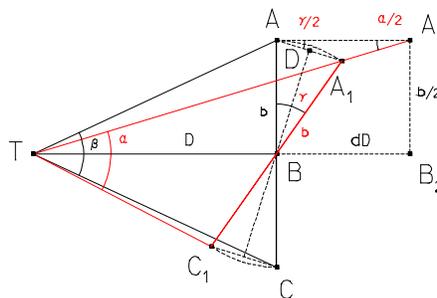
$$dD = \frac{dM}{2} \cot g \frac{\beta}{2} = \frac{dM}{2} \frac{2D}{M} = \frac{dM}{M} D$$

Admitindo que a precisão na medição do ângulo  $M$  é  $dM=0.1 \text{ mm}$  e que  $M=2$ , tem-se  $dD_{mm} = \frac{0.0001}{2} D$ , ou, na forma de tabela,

D (m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
dD (mm)	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.0075	0.01	0.015	0.02	0.025

## Medição de distâncias

Se se pretender determinar a influência de um erro  $\gamma$  na orientação da estadia na distância obtida com estadia de invar, considere-se a figura seguinte, onde a estadia sofreu uma rotação de um ângulo  $\gamma$ , da posição  $AC$  para a posição  $A_1C_1$ , sendo  $T$  o ponto estação do teodolito; a linha de visada considerada para efeito de dedução de  $dD$  será a direcção  $TA_1$ .



Do triângulo ABD tem-se:  $\sin \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\frac{AA_1}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{AA_1}{b} \Rightarrow AA_1 = b \sin \frac{\gamma}{2}$

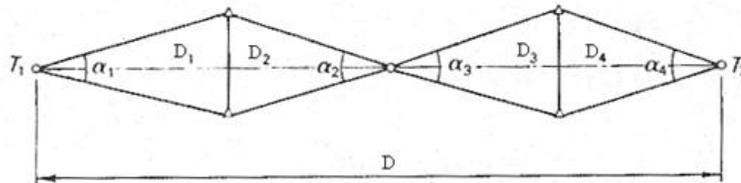
Do triângulo  $AA_1A_2$  tem-se:  $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{AA_1} = \frac{\sin \left( 180^\circ - \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \right)}{AA_2} \Rightarrow AA_2 = AA_1 \frac{\sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = b \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

$$= b \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + b \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

Como  $2D \approx b \cot \frac{\alpha}{2}$ , então  $dD = AA_2 = 2D \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{b}{2} \sin \gamma$ ; desprezando a última parcela, vem  $\frac{dD}{D} = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ ; limitando a precisão relativa a  $1/10000$ ,  $\gamma \leq 0^\circ 48.6'$ , o que é normalmente obtido com o dispositivo de pontaria, pelo que este efeito pode ser ignorado.

## Medição de distâncias

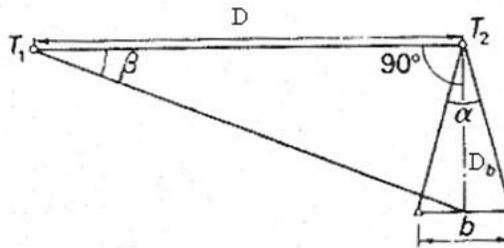
Procedimentos utilizados no campo



Medições em série:  $T_1T_2 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = D = \frac{b}{2} \sum_{i=1}^4 \cot \frac{\alpha_i}{2}$ ;

No caso geral,  $D = \frac{b}{2} \sum_{i=1}^n \cot \frac{\alpha_i}{2}$ ; se  $b = 2 \text{ m}$ ,  $D_i = \frac{D}{n}$ ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$ ,  $d\alpha_1 = \dots = d\alpha_n$ ,  $\frac{dD}{D} \approx \frac{D}{400000 n^{3/2}}$

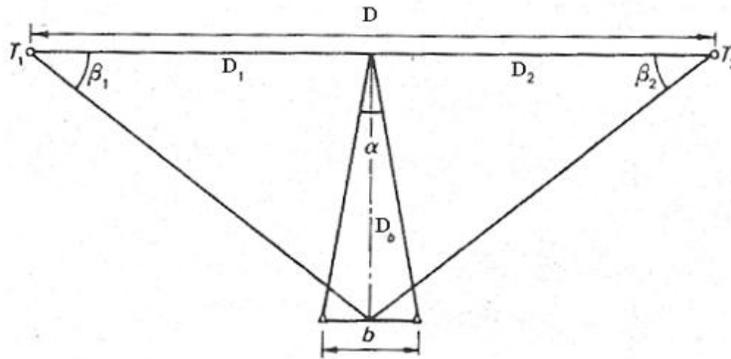
## Medição de distâncias



Medição de base auxiliar: a base auxiliar é colocada ortogonalmente à distância D que se pretende medir (quando  $D > 150 \text{ m}$ )

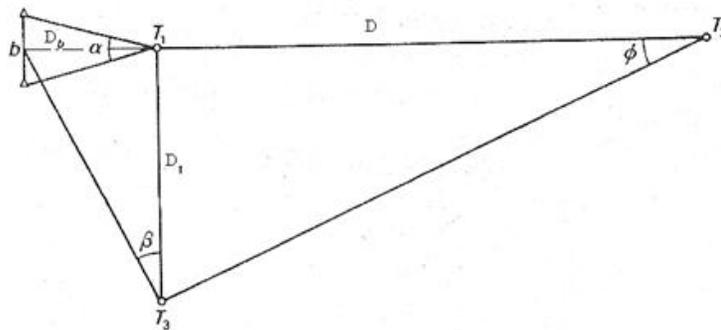
$$D = D_b \cot \beta = \frac{b}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \cot \beta$$

## Medição de distâncias



Medição de base auxiliar central, para distâncias D superiores a 400 m:  $T_1T_2 = D = D_1 + D_2 = \frac{b}{2} \cot \frac{\alpha}{2} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2)$

## Medição de distâncias



Duas bases auxiliares, para distâncias D até 3400 m:  $D = D_1 \cot \phi = \frac{b}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \cot \phi \cot \beta$

## Medição de distâncias

Enquanto que desde o fim do século XIX se mediram os ângulos com precisão, a medição de distâncias constituiu sempre um problema para o geómetra/topógrafo, pois a respectiva precisão não era **homogénea** com a precisão angular. Por exemplo, era possível medir ângulos a menos de 0.25 mgon, o que significa um desvio de 0.4 mm a 100 m mas era muito difícil obter uma precisão centimétrica mesmo para bases da ordem da centena de metros. As medições muito precisas com fios de invar eram muito demoradas. Em 1948 apareceram os primeiros distanciómetros, como resultados dos trabalhos do físico sueco Bergstrand relacionados com o estudo da velocidade de propagação da luz: a medição da distância baseava-se na medição do desfazamento de uma onda luminosa no caminho de ida e volta entre as extremidades da base a medir. Estes primeiros aparelhos eram pouco precisos, dispendiosos, pouco manejáveis e com pouca autonomia.

## Medição de distâncias



Geodimetro AGA modelo 6 (1966)



Telurómetro MRA-2 (1956), distanciómetro de ondas radio-eléctricas

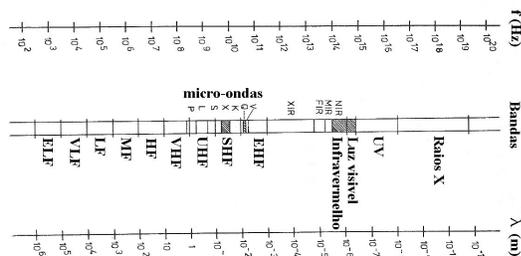
## Medição de distâncias

O avanço decisivo foi o aperfeiçoamento e a miniaturização destes aparelhos que são actualmente integrados na óptica dos aparelhos modernos (estações totais), alcançando precisões entre  $\pm(5 \text{ mm} + 5\text{mm/km})$  e  $\pm(1 \text{ mm} + 1\text{mm/km})$ .



## Medição de distâncias

Com a introdução e o desenvolvimento de técnicas de medição electromagnética de distâncias, na actualidade tão ou mais precisas que as observações angulares, a generalidade dos procedimentos topográficos sofreram alterações radicais.



Bandas do espectro electromagnético  
(as regiões assinaladas são as utilizadas em EDM)

## Medição de distâncias

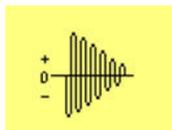
A frequência  $f$  e o comprimento de onda  $\lambda$  de uma onda electromagnética estão relacionados através da equação  $c=f\lambda$ , onde  $c=299792458\pm 1.2$  m/s é a velocidade de propagação da onda no vácuo.

A **atmosfera** diminui a **velocidade** de propagação das ondas electromagnéticas, sendo esta diminuição função da frequência das ondas, da composição química da atmosfera e das condições de **temperatura**, **humidade** e **pressão** atmosféricas.

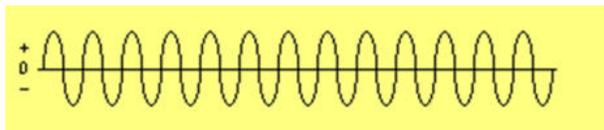
A **amplitude** de uma onda diminui ao atravessar a atmosfera devido a um fenómeno de absorção e dispersão da energia.

## Medição de distâncias

Os primeiros transmissores de rádio produziam oscilações na antena de transmissão que apresentavam uma atenuação de amplitude durante cada impulso de energia. Quando surgiram os alternadores e posteriormente os osciladores, a amplitude do sinal permaneceu constante durante a propagação do sinal, caracterizando essa técnica como emissão de ondas "contínuas".



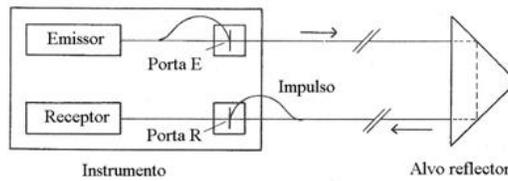
onda amortecida



onda contínua

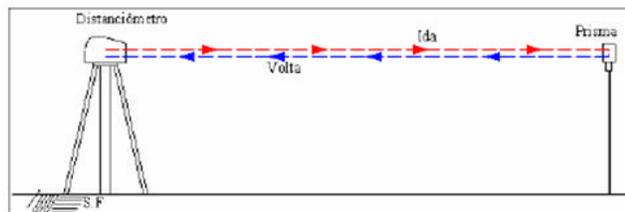
## Medição de distâncias

a) **Método do impulso:** o distanciômetro gera e envia um impulso curto e de grande intensidade, que se propaga em direção ao alvo, sendo aí reflectido em direção ao instrumento, percorrendo portanto o dobro da distância  $d$  a determinar. Medindo o intervalo de tempo  $\Delta t'$  de percurso do sinal entre a emissão e a recepção, tem-se  $2d = c \Delta t' = c (t_R - t_E)$ , onde  $d$  é a distância distanciômetro-alvo,  $t_E$  é o instante de emissão do impulso medido na porta E,  $t_R$  é o instante de recepção do impulso medido na porta R:



## Medição de distâncias

Exemplo: considerando  $D=1$  km,  $c=300000$  km/s, o intervalo de tempo de percurso do impulso é  $t=2D/c=6 \times 10^{-6}$  s. Para ser garantida uma precisão de  $1$  cm na medição de  $D$  o intervalo de tempo de percurso deve ser medido com a precisão de  $6 \times 10^{-11}$  s, o que inviabiliza a utilização desta técnica para aplicações topográficas, por ser necessário utilizar relógios muito caros.



$$D = \frac{1}{2}ct \Rightarrow dD = \frac{c}{2}dt \Rightarrow$$

$$dt = \frac{2dD}{c} = \frac{2 \times 10^{-2} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6 \times 10^{-11} \text{ s}$$

## Medição de distâncias

A distância  $d$  entre duas estações pode ser calculada se o intervalo de tempo  $\Delta t'$  de propagação da radiação entre essas estações for medido:  $d=c \Delta t'$ , onde se supõe que o valor  $c$  da **velocidade de propagação do sinal no meio** (ar, em geral) é conhecido. Esta velocidade pode ser calculada se o **índice  $n$  de refração do meio** e a velocidade  $c_0$  de propagação da luz no vácuo forem conhecidos:  $c=c_0/n$ . É, no entanto, muito difícil obter com precisão o valor do índice de refração ao longo do percurso da onda electromagnética, e por consequência, a precisão da medição electrónica de distâncias é limitada por este factor.

## Medição de distâncias

b) **Método da diferença de fase**: este método baseia-se na medição da diferença de fase de ondas contínuas.

**As distâncias que podem ser medidas são inferiores ao comprimento de onda da onda portadora**; como os comprimentos de onda normalmente utilizados são pequenos (0.0009 mm no caso do infra-vermelho), os aparelhos EDM utilizam ondas portadoras **moduladas** de forma a gerar comprimentos de onda mais convenientes.

Quanto **maior** for o comprimento de onda da onda modulada, **menor** é a **exactidão** da distância medida (a diferença de fase pode ser medida a menos de **0.01%** do comprimento de onda), embora o **alcance** **auge**.

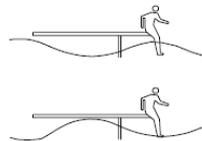
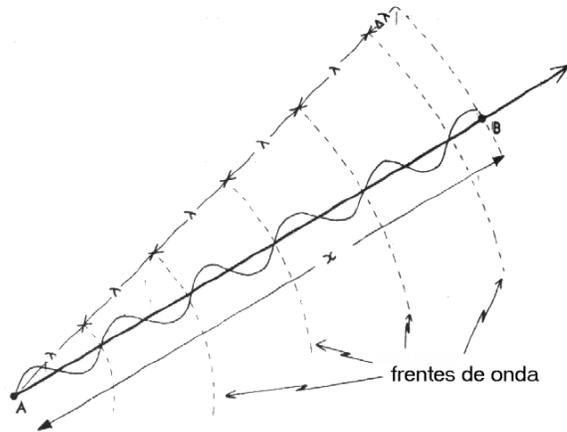


ilustração da fase de uma onda

## Medição de distâncias



fase entre A e B:  $\Phi = 5 \text{ ciclos de } 2\pi \text{ rad} + \Delta\Phi$

distância entre A e B:  $d = \lambda \Phi$

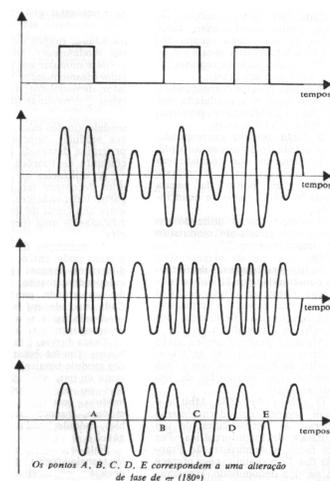
## Medição de distâncias

sinal de dados modulando a onda portadora:

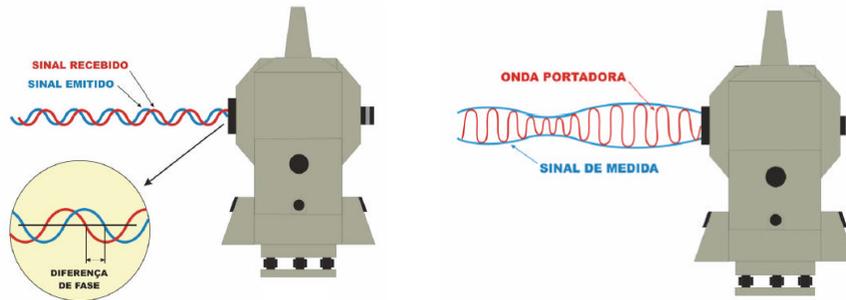
em **amplitude** (frequência e fase constantes)

em frequência (amplitude e fase constantes)

em fase (frequência e amplitude constantes)



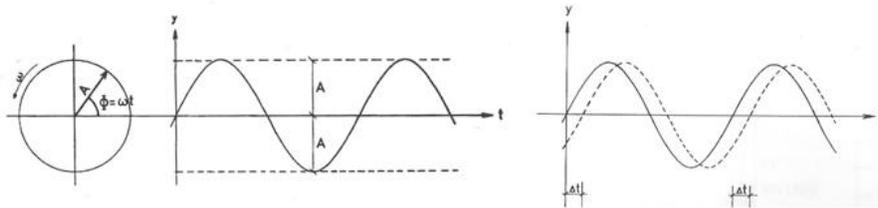
## Medição de distâncias



O sinal de maior frequência (representado a encarnado) é designado por **onda portadora**, que transporta o sinal de medida de maior comprimento de onda, designado por **onda modulada** (representado a azul), através de uma modulação em amplitude

## Medição de distâncias

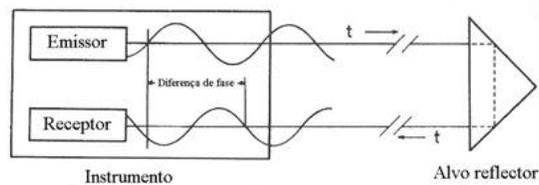
A radiação electromagnética pode ser descrita pela expressão  $y = A \sin(\omega t) = A \sin \Phi$ , onde  $A$  é a amplitude ou intensidade máxima,  $\omega$  é a velocidade angular,  $f$  é a frequência do sinal,  $t$  é o tempo e  $\Phi$  é a fase, de tal forma que  $\Phi = \omega t$ ,  $\omega = 2\pi f$ . Um sinal com diferença de fase  $\Delta\Phi$  em relação ao anterior pode exprimir-se como  $y = A \sin(\Phi + \Delta\Phi) = A \sin \omega(t + \Delta t)$ , onde  $\Delta t$  representa a diferença temporal, em que  $\Delta t = \Delta\Phi / \omega$ .



Propagação de ondas sinusoidais

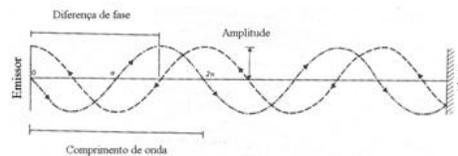
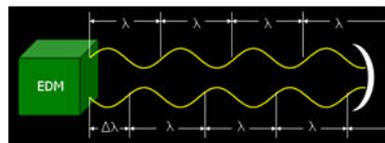
## Medição de distâncias

b1) Diferença de fase entre o sinal emitido e recebido: a generalidade dos instrumentos de EDM utiliza este princípio, independentemente da banda de radiação utilizada. O sinal, modulado numa onda portadora, é emitido em direcção ao reflector, sendo aí reflectido em direcção ao distanciômetro; no receptor, as fases dos sinais emitido e reflectido são comparadas, sendo medida a respectiva diferença de fase  $\Delta\Phi$ . Como se utiliza um sinal contínuo, embora os valores de  $y_E = A \sin \omega t = A \sin \Phi$  e de  $y_R = A \sin \omega(t + \Delta t) = A \sin(\Phi + \Delta\Phi)$  variem no tempo, a diferença de fase  $\Delta\Phi$  (assim como a diferença temporal  $\Delta t$ ) permanece constante, isto é, o instrumento pode medir uma diferença de fase constante embora as amplitudes dos sinais variem continuamente.



## Medição de distâncias

Como já se viu, a distância obtém-se de  $d = c \Delta t'$ , embora o intervalo de tempo de percurso  $\Delta t'$  não possa ser obtido por comparação de fase, que fornece apenas  $\Delta t$ ; para se obter  $\Delta t'$  é necessário conhecer o equivalente temporal ao número inteiro  $m$  de ciclos contidos no percurso de um dado sinal, isto é,  $\Delta t' = mT + \Delta t$ , onde  $T$  é o período do sinal modulado.

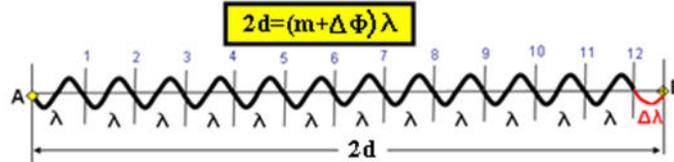


Se a distância  $d$  for inferior a  $\lambda$ , a solução é única (não existe ambiguidade de fase); caso contrário, é necessário contar o número inteiro de ciclos  $m$

## Medição de distâncias

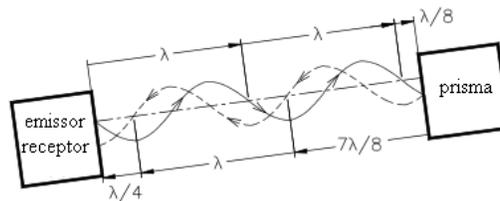
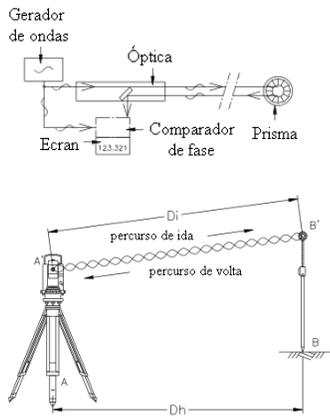
Na expressão anterior não são conhecidos  $\Delta t$  e a ambiguidade  $m$ ; a diferença temporal  $\Delta t$  pode exprimir-se em função de  $\Delta\Phi$  como  $\Delta t = \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi c}$  onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do sinal modulado; o período  $T$  correspondente a um ciclo do sinal de comprimento de onda  $\lambda$  é dado por  $T = \frac{\lambda}{c}$ , donde  $d = \frac{c}{2}(mT + \Delta t) = \frac{c}{2}\left(m\frac{\lambda}{c} + \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi c}\right) = m\frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi}$ , onde todas as quantidades, com excepção da ambiguidade  $m$ , são conhecidas.

Usualmente, o termo  $\frac{\lambda}{2}$  é substituído por  $U$ , designado por unidade de comprimento do aparelho EDM; pondo  $L = \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = U \frac{\Delta\Phi}{2\pi}$ , tem-se  $d = mU + L$ . A ambiguidade  $m$  é resolvida por introdução de mais unidades de comprimento no aparelho EDM, sendo a unidade mais importante a de menor comprimento de onda (a de maior frequência), utilizada para a medição fina da distância (a precisão do distanciômetro depende da selecção deste comprimento fundamental, devido à resolução limitada (entre 1% e 0.1 % do comprimento de onda) das medições da diferença de fase).

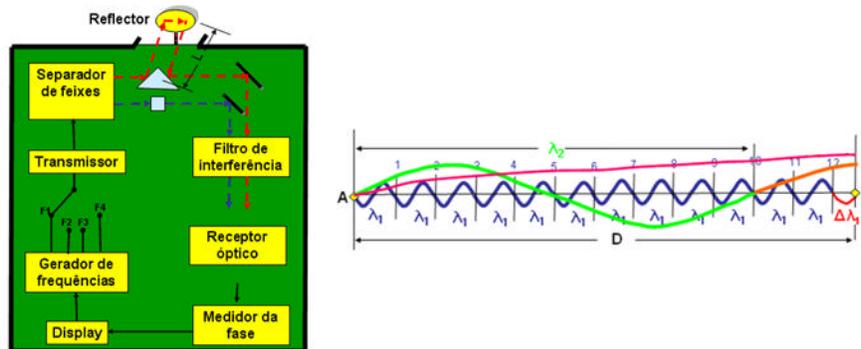


## Medição de distâncias

O sinal emitido é constituído por uma série de ondas sinusoidais cujo comprimento de onda  $\lambda$  corresponde à distância rectilínea percorrida pela onda durante um intervalo de tempo  $T = 1/f = \lambda/c$ . Entre o emissor e o receptor existe um número inteiro de comprimentos de onda mais uma fracção  $\Delta\lambda$  de um comprimento de onda: na figura,  $n=4$ ,  $\Delta\lambda = \lambda/4$ , a que corresponde um desfazamento de  $\pi/4$ , tecnicamente simples de determinar.



## Medição de distâncias

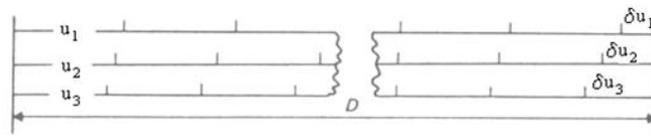


A fase total  $\Phi$  (número inteiro de ciclos  $m$  mais a parte fracionária  $\Delta\Phi$ , convenientemente convertida para unidades lineares) relaciona-se com a distância  $d$  através da expressão  $2d = \Phi\lambda = (m + \Delta\Phi)\lambda$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda utilizado.

Nesta expressão,  $\Delta\Phi$  é medido no distanciômetro (quanto maior for o comprimento de onda, menor será a precisão na determinação de  $D$ ),  $\lambda$  é conhecido e  $m$  é geralmente desconhecido (ambiguidade da fase), pelo que o valor de  $d$  não pode ser determinado com uma única onda, a não ser que esta tenha comprimento (de onda) maior do que  $2d$ . Para resolver este problema é então necessário utilizar ondas com vários comprimentos de onda produzidas através de um processo de modulação, relacionadas de uma forma simples com a onda fundamental (a de menor comprimento de onda, utilizada na medição fina das distâncias), de forma a reconstituir a ambiguidade da fase da onda fundamental e assim determinar o valor da distância.

## Medição de distâncias

Exemplo: considere-se a distância  $D$ , que foi medida utilizando 3 fitas métricas  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  de unidades comprimento  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , respectivamente.



Com a fita  $f_1$  tem-se que  $D = n_1 u_1 + \delta u_1$ , com a fita  $f_3$  tem-se que  $D = n_3 u_3 + \delta u_3$  e com a fita  $f_2$  tem-se que  $D = n_2 u_2 + \delta u_2$ .



## Medição de distâncias

Como no caso anterior, a diferença  $\delta u_2 - \delta u_1$  não é suficientemente exacta, de forma a evitar resultados inconsistentes no cálculo da distância, devendo  $\delta u_2 - \delta u_1$  ser dado a menos de  $2.5 \times 10^{-6}$  m para se obter 1 mm de exactidão em D.

Para ultrapassar estas dificuldades e simplificar o cálculo, é recomendado o seguinte sistema: pondo  $\delta u_2 - \delta u_1 = L_2 - L_1 = A$  e  $\delta u_3 - \delta u_1 = L_3 - L_1 = B$ , sejam E o maior múltiplo de 100 m contido da distância D e F o maior múltiplo de 5 m contido em  $D - 100 \times E$ , de tal forma que  $F = 21B$  a menos de 5 m e  $E = 400 - 21B$  a menos de 100 m. Então:

$$D' = (E + F) + L_1$$

$$D'' = 400(E + F)/401 + L_2 = (E + F) + L_2 - (E + F)/401$$

$$D''' = E + 20F/21 + L_3 = (E + F) + L_3 - F/21$$

$$D = (D' + D'' + D''')/3$$

No exemplo anterior,  $F = 21 \times 1.905 = 40.005 \approx 40$ ,  $E = 400 - 2.594 = 1037.6 \approx 1000$ ,  $D' = 1040 + 2.263 = 1042.263$  m,  $D'' = 1040 + 4.857 - 2.593 = 1042.264$  m,  $D''' = 1040 + 4.168 - 1.905 = 1042.263$  m,  $D = 1040 + (0.263 + 0.264 + 0.263)/3 = 1042.263$  m.

## Medição de distâncias

**Exemplo:** Hewlett-Packard HP388 B: este aparelho utiliza um total de 4 unidades de comprimento, variando de 10 m até 10 km. Os algarismos sublinhados são os que são sucessivamente determinados em cada passo. O passo 1 designa-se medição fina da distância e os restantes medições grosseiras da distância. O alcance é igual a 10 km.

Passo	Leitura	Unidade de comprimento	Fracção
1	$\frac{\Delta\phi_1}{2\pi} = 0.825$	$U_1 = 10$ m	$L_1 = \frac{\Delta\phi_1}{2\pi} U_1 = \underline{8.25}$ m
2	$\frac{\Delta\phi_2}{2\pi} = 0.382$	$U_2 = 100$ m	$L_2 = \frac{\Delta\phi_2}{2\pi} U_2 = \underline{38.2}$ m
3	$\frac{\Delta\phi_3}{2\pi} = 0.433$	$U_3 = 1000$ m	$L_3 = \frac{\Delta\phi_3}{2\pi} U_3 = \underline{433}$ m
4	$\frac{\Delta\phi_4}{2\pi} = 0.244$	$U_4 = 10000$ m	$L_4 = \frac{\Delta\phi_4}{2\pi} U_4 = \underline{2440}$ m

$$d = 2438.25 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

**Exemplo:** Kem DM 500/DM 501/DM 502: esta série de aparelhos utiliza apenas 2 unidades de comprimento, 10 m e 1000 m. O alcance é igual a 1 km. Os aparelhos mais recentes da série (DM 503/DM 504) utilizam uma terceira frequência de modulação para resolver múltiplos de 1000 m.

Passo	Leitura	Unidade de comprimento	Fracção
1	$\frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} = 0.8253$	$U_1 = 10 \text{ m}$	$L_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} U_1 = \underline{8.253 \text{ m}}$
2	$\frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 0.4384$	$U_2 = 1000 \text{ m}$	$L_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} U_2 = \underline{438.400 \text{ m}}$

$$d = 438.253 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

**Exemplo:** Nikon DTM-1/NTD-3: esta série de aparelhos não utiliza unidades de comprimento relacionadas por factores de 10, mas unidades próximas umas das outras:

$$f_1 = 14.973 \text{ MHz} \Rightarrow U_1 = \frac{c_0}{2n_{\text{ref}}} = 10.00000 \text{ m},$$

$$f_2 = 14.935 \text{ MHz} \Rightarrow U_2 = \frac{400}{399} U_1 = 10.02508 \text{ m},$$

$$f_3 = 14.224 \text{ MHz} \Rightarrow U_3 = \frac{20}{19} U_1 = 10.52678 \text{ m}.$$

Subtraindo da frequência mais baixa as restantes, obtém-se:  $f_1 - f_2 = 0.038 \text{ MHz} \Rightarrow U_4 = 4000 \text{ m}$ ,

$f_1 - f_3 = 0.749 \text{ MHz} \Rightarrow U_5 = 200 \text{ m}$ . A distância calculada a partir de uma medição fina e duas medições grosseiras pode ser

dada como:

$$d = 4000 \text{ m}(\ell_1 - \ell_2) + \text{múltiplos de } 4000 \text{ m}$$

$$d = 200 \text{ m}(\ell_1 - \ell_3) + \text{múltiplos de } 200 \text{ m}$$

$$d = 10.00000 \text{ m}(\ell_1) + \text{múltiplos de } 10 \text{ m}$$

onde  $\ell_i = \frac{L_i}{U_i} = \frac{\Delta\Phi_i}{2\pi} \in [0,1]$  = fases normalizadas (somar 1.0 se  $\ell_1 - \ell_i$  negativo).

Passo	Leitura	Leitura composta	Unidade de comprimento	Fracção
1	$\frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} = 0.3658$	$\ell_1 = 0.3658$	$U_1 = 10 \text{ m}$	$L_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} U_1 = \underline{3.658 \text{ m}}$
2	$\frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 0.90964$	$\ell_1 - \ell_2 = 0.3658 - 0.2399 = 0.1259$	$U_2 = 200 \text{ m}$	$L_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} U_2 = \underline{25.180 \text{ m}}$
3	$\frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} = 0.23994$	$\ell_1 - \ell_3 = 0.3658 - 0.9096 + 1.0 = 0.4562$	$U_3 = 4000 \text{ m}$	$L_3 = \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} U_3 = \underline{1824.800 \text{ m}}$

$$d = 1823.658 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

Nalguns distanciômetros, a frequência de modulação pode ser alterada através de pequenos incrementos, o que permite que a distância seja medida ajustando a frequência de forma a anular a diferença de fase entre o sinal emitido e o sinal recebido: suponha-se que se seleciona a frequência de forma a que a diferença de fase entre os sinais emitido e recebido seja nula, tendo-se  $d/\lambda_1 = m$ , com  $m$  inteiro desconhecido e  $d$  a distância a determinar; se a frequência for ligeiramente alterada, a diferença de fase deixará de ser igual a zero até voltar a anular-se, tendo-se para esta frequência  $d/\lambda_2 = m+1$ ; se se tiver a certeza que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  correspondem exactamente à diferença de um ciclo, então  $d = \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$ .

## Medição de distâncias

**Exemplo: Kem Mekometer ME 5000:** este aparelho, em vez de utilizar frequências de modulação fixas e de medir diferenças de fase, utiliza quatro frequências de modulação que são ajustadas, num dado intervalo, até os sinais emitidos e recebidos estarem em fase, determinando então o aparelho cada uma dessas frequências (o passo de variação das frequências é de 10 MHz/61824=161.749482 Hz, sendo as frequências medidas múltiplas deste valor). Tem-se então, para cada uma das frequências:  $d_0 = m_0 U_0$ ,  $d_1 = m_1 U_1$ ,  $d_2 = m_2 U_2$ ,  $d_3 = m_3 U_3$ , onde  $U_i = \lambda_i/2 = c/2f_i$  e  $m_i$  são múltiplos das unidades de comprimento  $U_i$  (ambiguidades). Iniciando o procedimento com a frequência mais baixa, detecta-se a diferença de fase mínima (sinais em fase) e regista-se a frequência  $f_0$  correspondente; repetindo o processo com a frequência seguinte, regista-se a frequência  $f_1$  correspondente ao mínimo de fase seguinte, de tal forma que  $m_1 = m_0 + 1$  e portanto  $m_0 = \frac{2df_0}{c}$ ,  $m_1 = \frac{2df_1}{c}$ , donde  $\frac{2df_1}{c} = 1 + \frac{2df_0}{c}$  ou, finalmente,  $d = \frac{c}{2(f_1 - f_0)}$ ; utilizando este resultado,  $m_0 = \frac{f_0}{(f_1 - f_0)}$ . Devido ao rigor limitado de  $(f_1 - f_0)$ , a expressão anterior não pode ser utilizada directamente; de  $m_2 = \frac{d_2}{U_2} = \frac{2df_2}{c} = m_0 + k_2$ , tem-se  $k_2 = \frac{2d(f_2 - f_0)}{c} = \frac{(f_2 - f_0)}{(f_1 - f_0)}$ , arredondado ao inteiro mais próximo; daqui tem-se que  $d = \frac{k_2 c}{2(f_2 - f_0)}$  e  $m_0 = \frac{k_2 f_0}{(f_2 - f_0)}$ , arredondado ao inteiro mais próximo. De forma semelhante,  $m_3$  pode ser calculado a partir de  $m_0 + k_3$  com  $k_3 = \frac{(f_3 - f_0)}{(f_1 - f_0)}$ , arredondado ao inteiro mais próximo. As distâncias podem ser calculadas a partir das três equações seguintes:

## Medição de distâncias

$$d_0 = \frac{c}{2f_0} \text{INT} \left( \frac{k_2 f_0}{f_2 - f_0} \right)$$

$$d_2 = \frac{c}{2f_2} \text{INT} \left( \frac{k_2 f_0}{f_2 - f_0} + k_2 \right)$$

$$d_3 = \frac{c}{2f_3} \text{INT} \left( \frac{k_2 f_0}{f_2 - f_0} + k_3 \right)$$

com  $c = c_0/n$ ,  $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$ ,  $n = 1.000284514844$ . Sendo  $f_0 = 474005888 \text{ Hz}$ ,  $f_1 = 474049075 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 485014234 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 479488548 \text{ Hz}$ , tem-se:

$$k_2 = \frac{f_2 - f_0}{f_1 - f_0} = \frac{11.008346}{0.043187} = 254.9 \rightarrow 255$$

$$m_0 = \frac{k_2 f_0}{f_2 - f_0} = \frac{474.005888}{11.008346} \cdot 255 = 10979.9 \rightarrow 10980$$

$$k_3 = \frac{f_3 - f_0}{f_1 - f_0} = \frac{5.482660}{0.043187} = 126.95 \rightarrow 127$$

$$d_0 = m_0 \frac{c}{2f_0} = 10980 \frac{298707187.1}{2 \times 474005888} = 3471.2490 \text{ m}$$

$$d_2 = (m_0 + k_2) \frac{c}{2f_2} = 11235 \frac{299707187.1}{2 \times 485014234} = 3471.2489 \text{ m}$$

$$d_3 = (m_0 + k_3) \frac{c}{2f_3} = 11107.5 \frac{299707187.1}{2 \times 479488548} = 3471.2484 \text{ m}$$

apresentando o aparelho o valor médio das distâncias obtidas.

## Medição de distâncias

**Exemplo:** utilizando os dados indicados na tabela, calcule a distância entre o distanciômetro e o alvo.

	$\lambda$	$\Delta \Phi / 2\pi$
1	20 km	0.59
2	1 km	0.79
3	200 m	0.93
4	10 m	0.54
5	0.5 m	0.70

i) O alcance é dado por  $\frac{\lambda_1}{2} = 10 \text{ km}$

$$\text{ii) } 2d = \Phi_1 \lambda_1 = (m_1 + \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi}) \lambda_1 = \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi} \lambda_1 = 0.59 \times 20000 = 11800 \text{ m} \pm 200 \text{ m, pois } m_1 = 0$$

$$\text{iii) } 2d = \Phi_2 \lambda_2 = \Phi_1 \lambda_1 \Leftrightarrow (m_2 + \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi}) \lambda_2 = (m_1 + \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi}) \lambda_1 \Leftrightarrow m_2 + \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi} \Leftrightarrow m_2 = 20 \times 0.59 - 0.79 = 11$$

$$\Phi_2 = m_2 + \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi} = 11.79$$

$$2d = \Phi_2 \lambda_2 = 11.79 \times 1000 = 11790 \text{ m} \pm 10 \text{ m}$$

$$\text{iii) } 2d = \Phi_3 \lambda_3 = \Phi_2 \lambda_2 \Leftrightarrow (m_3 + \frac{\Delta \Phi_3}{2\pi}) \lambda_3 = (m_2 + \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi}) \lambda_2 \Leftrightarrow m_3 + \frac{\Delta \Phi_3}{2\pi} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (m_2 + \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi}) \Leftrightarrow m_3 = 5 \times 11.79 - 0.93 = 58$$

$$\Phi_3 = m_3 + \frac{\Delta \Phi_3}{2\pi} = 58.93$$

$$2d = \Phi_3 \lambda_3 = 58.93 \times 200 = 11786 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

$$\text{iv) } 2d = \Phi_4 \lambda_4 = \Phi_3 \lambda_3 \Leftrightarrow \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi}\right) \lambda_4 = \left(m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi}\right) \lambda_3 \Leftrightarrow m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \left(m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi}\right) \Leftrightarrow m_4 = 20 \times 58.93 - 0.54 = 1178$$

$$\Phi_4 = N_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} = 1178.54$$

$$2d = \Phi_4 \lambda_4 = 1178.54 \times 10 = 11785.4 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}$$

$$\text{v) } 2d = \Phi_5 \lambda_5 = \Phi_4 \lambda_4 \Leftrightarrow \left(m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi}\right) \lambda_5 = \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi}\right) \lambda_4 \Leftrightarrow m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi}\right) \Leftrightarrow m_5 = 20 \times 11785.4 - 0.70 = 23570$$

$$\Phi_5 = m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi} = 23570.70$$

$$2d = \Phi_5 \lambda_5 = 23570.70 \times 0.5 = 11785.350 \text{ m} \pm 0.005 \text{ m}$$

	$\lambda$	$\Delta\Phi/2\pi$	m	$\Phi$	2d
1	20 km	0.59	0	0.59	11800±200 m
2	1 km	0.79	11	11.79	11790±10 m
3	200 m	0.93	58	58.93	11786±2 m
4	10 m	0.54	1178	1178.54	11785.4±0.1 m
5	0.5 m	0.70	23570	23570.70	11785.350±0.005 m

$$d = 5892.675 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

**Exemplo:** supondo que são utilizados os comprimentos de onda  $\lambda_1=10\text{ m}$ ,  $\lambda_2=100\text{ m}$ ,  $\lambda_3=1000\text{ m}$ , qual é o valor da distância d?

$\lambda$ (m)	$\Delta\Phi$
10	101°
100	190°
1000	91°

Supondo que o distanciómetro meça as diferenças de fase com resolução de 3 casas decimais, tem-se:

$$\text{i) O alcance do distanciómetro é dado por } \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ m}$$

$$\text{ii) } 2d = \Phi_1 \lambda_1 = \left(m_1 + \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi}\right) \lambda_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} \lambda_1 = \frac{101}{360} \times 1000 = 0.281 \times 1000 = 281 \pm 10 \text{ m, pois } N_1 = 0$$

$$\text{iii) } 2d = \Phi_2 \lambda_2 = \Phi_1 \lambda_1 \Leftrightarrow \left(m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi}\right) \lambda_2 = \left(m_1 + \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi}\right) \lambda_1 \Leftrightarrow m_2 = 0.281 \frac{1000}{100} - \frac{190}{360} = 2.81 - 0.528 = 2$$

$$\Phi_2 = m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 2.528, \quad 2d = \Phi_2 \lambda_2 = 2.528 \times 100 = 252.8 \pm 1 \text{ m}$$

$$\text{iii) } 2d = \Phi_3 \lambda_3 = \Phi_2 \lambda_2 \Leftrightarrow \left(m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi}\right) \lambda_3 = \left(m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi}\right) \lambda_2 \Leftrightarrow m_3 = 2.528 \frac{100}{10} - \frac{91}{360} = 25.28 - 0.253 = 25$$

$$\Phi_3 = m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} = 25.253, \quad 2d = \Phi_3 \lambda_3 = 25.253 \times 10 = 252.53 \pm 0.1 \text{ m}$$

	$\lambda$ (m)	$\Delta\Phi$	$\Delta\Phi/2\pi$	m	$\Phi$	2d
3	10	101°	0.281	0	0.281	281±10 m
2	100	190°	0.528	2	2.528	252.8±1 m
1	1000	91°	0.253	25	25.253	252.53±0.1 m

$$d = 126.265 \text{ m}$$

## Medição de distâncias

**Exemplo:** calcule a distância  $d$  a partir dos dados da tabela seguinte, obtidos com um teodolito para aplicações geodésicas:

$f_1 = 10 \text{ MHz}$	$\lambda_1 = 29.979 \text{ m}$	$\Delta \Phi_1 / 2\pi = 0.384$
$f_2 = 9 \text{ MHz}$	$\lambda_2 = 33.310 \text{ m}$	$\Delta \Phi_2 / 2\pi = 0.845$
$f_3 = 9.9 \text{ MHz}$	$\lambda_3 = 30.282 \text{ m}$	$\Delta \Phi_3 / 2\pi = 0.630$
$f_4 = 9.99 \text{ MHz}$	$\lambda_4 = 30.009 \text{ m}$	$\Delta \Phi_4 / 2\pi = 0.209$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = (m_1 - \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi}) - (m_2 - \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi}) = (m_1 - m_2) + (\frac{\Delta \Phi_1}{2\pi} - \frac{\Delta \Phi_2}{2\pi}) = (m_1 - m_2) + (0.384 - 0.845) = ((m_1 - m_2) + 0.539)$$

$$\Phi_1 - \Phi_3 = (m_1 - \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi}) - (m_3 - \frac{\Delta \Phi_3}{2\pi}) = (m_1 - m_3) + (\frac{\Delta \Phi_1}{2\pi} - \frac{\Delta \Phi_3}{2\pi}) = (m_1 - m_3) + (0.384 - 0.630) = ((m_1 - m_3) + 0.754)$$

$$\Phi_1 - \Phi_4 = (m_1 - \frac{\Delta \Phi_1}{2\pi}) - (m_4 - \frac{\Delta \Phi_4}{2\pi}) = (m_1 - m_4) + (\frac{\Delta \Phi_1}{2\pi} - \frac{\Delta \Phi_4}{2\pi}) = (m_1 - m_4) + (0.384 - 0.209) = ((m_1 - m_4) + 0.175)$$

Reconstitui-se desta forma a ambiguidade  $m_1 = 175$ ; o algarismo dos milhares corresponde a 15 km, pelo que não há dificuldade em determiná-lo. Supondo  $m_1 = 2175$ ,  $\Phi_1 = 2175.384$ ,  $d_1 = 32630.760 \text{ m}$ .

## Medição de distâncias

### Erros devido ao sistema de medida

O emissor e o sistema de medição de fase induzem dois tipos de erros:

- 1) erro cíclico, que toma periodicamente o mesmo valor
- 2) erro proporcional devido a algum defeito de frequência do emissor: sendo  $d \approx K \cdot \lambda$ , um **desvio na frequência** igual a  $\Delta f$  traduz-se num **erro na distância** igual a  $\Delta d = -d \cdot \Delta f / f$ , proporcional à distância medida.

Estes dois tipos de erros implicam **calibrações** regulares do emissor e do sistema de medição de fase.

## Medição de distâncias

### Erros devido à **propagação na atmosfera**

A propagação de uma onda electromagnética é perturbada pelas moléculas da atmosfera, de tal forma que **quanto mais denso for o meio, maior será o índice de refração e mais lenta será a propagação do sinal**. Isto **influencia o desfazamento** medido, que virá falseado uma vez que a distância medida é artificialmente maior devido à diminuição da velocidade de propagação.

O índice de refração é fortemente dependente da temperatura e da pressão, embora independente da humidade, no caso das ondas na banda do visível; para as ondas centimétricas, a humidade também deve ser levada em consideração.

## Medição de distâncias

A medida directa da distância inclinada deve assim sofrer uma **correção atmosférica** que pode ser efectuada de 3 formas diferentes, todas baseadas na mesma fórmula de correção:

- 1) de forma automática, introduzindo no aparelho os valores da pressão e da temperatura do local
- 2) de forma semi-automática, introduzindo no aparelho uma correção ppm correspondente ao erro cometido na distância
- 3) de forma manual, corrigindo os valores brutos da distância

## Medição de distâncias

No vácuo, a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas é constante para todos os comprimentos de onda. No ar, o índice de refração  $n$  depende de diversos factores: composição, temperatura, pressão e humidade, relacionados através da equação de Cauchy  $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4$ , onde A, B e C são constantes para umas dadas condições atmosféricas. Para condições standard de ar seco a 0° C de temperatura, 760 mm Hg (1013.25 mbars) de pressão e com 0.03% CO<sub>2</sub>, o índice de refração tem o valor  $n_s = 1 + (287.604 + 1.6288/\lambda^2 + 0.0136/\lambda^4) \times 10^{-6}$ , onde  $\lambda$  é dado em  $\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$ . Atendendo ao processo de modulação, no qual a onda modulada (que não é sinusoidal) é sobreposta à onda portadora, é necessário considerar o índice de refração de grupo,  $n_g = A + 3B/\lambda^2 + 5C/\lambda^4$ , de tal forma que  $n_{gs} = 1 + (287.604 + 4.88/\lambda^2 + 0.0680/\lambda^4) \times 10^{-6}$ . O índice de refração para condições quaisquer é então dado por

$$n_{gt} = 1 + \frac{273.2(n_{gs}-1)P}{760(273.2+t)} - \frac{15.02E \times 10^{-6}}{273.2+t} = 1 + 0.359474(n_{gs}-1)\frac{P}{T} - \frac{15.02E \times 10^{-6}}{T} \quad c=c_0/n$$

onde P é a pressão atmosférica (mm Hg), T=273+t (K) é a temperatura, E é a pressão do vapor de água (mm Hg) =  $e' - (c/755)p(t - t_w)$ , em que e' é a pressão de saturação do vapor de água, t e t<sub>w</sub> são as temperaturas seca e húmida e c é uma constante.

Exemplo: sendo o índice de refração standard (padrão) para a luz visível a 0° C, 760 mm Hg, e 0.03% de CO<sub>2</sub> igual a 1.0003045, calcule o índice de refração a 25° C e 730 mm Hg (a pressão de saturação do vapor de água a 25° C é igual a 23.7 mm Hg).

$$n_{gt} = 1 + 0.359474(n_{gs}-1)\frac{P}{T} - \frac{15.02 \times 10^{-6}}{T} = 1 + 0.359474 \times 3.045 \times 10^{-4} \times \frac{730}{298} - \frac{15.02 \times 23.7 \times 10^{-6}}{298} = 1.0002669$$

## Medição de distâncias

O efeito em n de diferentes condições atmosféricas pode resumir-se no quadro seguinte:

		Luz visível	Micro-ondas
Temperatura	+1° C	-1.00 ppm	-1.25 ppm
Pressão atmosférica	+1 mm Hg	+0.40 ppm	+0.40 ppm
Pressão do vapor de água	+1 mm Hg	-0.05 ppm	+6.60 ppm

A influência atmosférica pode ser aplicada directamente na distância. Apresenta-se assim a correcção meteorológica para uma distância utilizando o formulário apresentado no manual da estação total TC2002 e a correcção para a mesma distância utilizando o ábaco:

$$\Delta D_1 = 281.8 \left[ \frac{0.29065 P}{1 + \alpha t} - \frac{4.126 \times 10^{-4} h}{1 + \alpha t} \times 10^2 \right], \quad x = \frac{7.5 t}{237.3 + t} + 0.7857$$

em que  $\Delta D_1$  = correcção atmosférica em ppm, P = pressão atmosférica (mbar), t = temperatura ambiente (°C), h = humidade relativa (%),  $\alpha = 1/273,16$ .

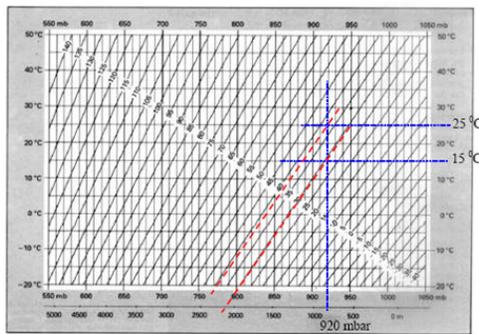
## Medição de distâncias

Exemplo: nas condições seguintes, calcular a correção a aplicar à distância medida: temperatura (t) = 25.0° C, pressão atmosférica (P) = 920.0 mbar, humidade relativa (h) = 56 %.

$$x = ((7.5 \times 25.0) / (237.3 + 25.0)) + 0.7857 = 1.5005$$

$$\Delta D_1 = 281.8 \left[ \frac{0.29065 \times 920.0}{1 + 0.00421 \times 25.0} - \frac{4.126 \times 10^{-4} \times 56}{1 + 0.00421 \times 25.0} \times 10^{1.5005} \right] = 281.8 - (244.9821 - 0.67022) = 37.48 \text{ ppm}$$

Utilizando os mesmos valores para a temperatura e a pressão atmosférica, obtém-se o valor da correção utilizando o ábaco:



Correção 37,0 ppm

## Medição de distâncias

### Erros devido à absorção na atmosfera

Devido a este fenómeno, a amplitude das ondas tende a diminuir, ou seja, a energia do sinal é consumida no movimento ondulatório na passagem pelas moléculas da atmosfera. Este fenómeno **não influencia o desfazamento** medido mas limita o **alcance** das visadas. As condições mais desfavoráveis são sol forte e nevoeiro.

## Medição de distâncias

### Erros devido à **dispersão** na atmosfera

A fonte de emissão da onda não sendo pontual nem perfeitamente focada num único ponto, origina um feixe cónico centrado no eixo do aparelho, o que cria uma dispersão da energia pois **apenas uma parte do sinal emitido incide no reflector**, o que limita o **alcance** do aparelho.

## Medição de distâncias

### Erros devido ao **percurso** do sinal

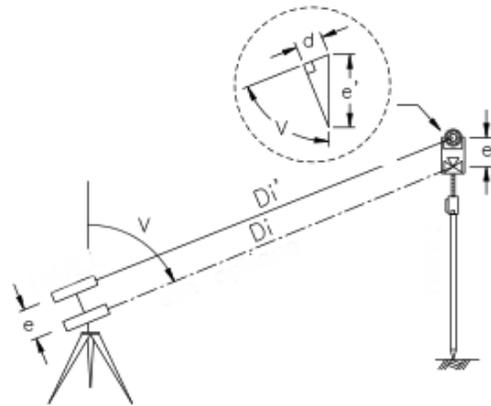
Os aparelhos modernos integram uma correcção automática devido ao erro de nível aparente, provocado pela refacção atmosférica e pela esfericidade terrestre.

A reflexão das ondas em obstáculos pode ser eliminada por medições repetidas ou cíclicas, permitindo desprezar as interrupções no sinal devido, por exemplo, à passagem de pessoas ou veículos.

## Medição de distâncias

### Erros devido à **excentricidade** do distanciômetro

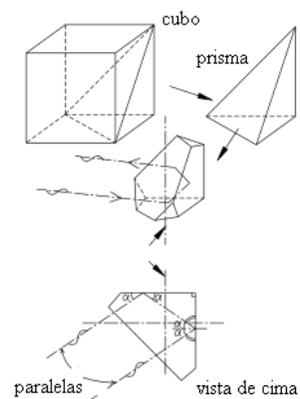
O emissor pode estar deslocado do eixo óptico do aparelho, pelo que deve ser utilizado o reflector adequado.



## Medição de distâncias

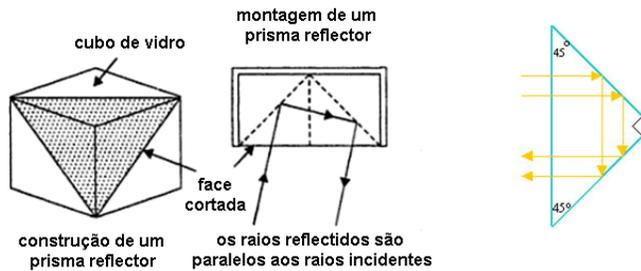
### Erros devido à **forma** do reflector

Se a potência do emissor for suficiente, qualquer superfície lisa pode reflectir o sinal. No entanto, para assegurar a autonomia dos distanciômetros, utilizam-se baterias portáteis, pelo que **a energia de emissão deve ser a mais fraca possível**. Utilizam-se assim prismas romboidais (cubo truncado) para maximizar o sinal reflectido. Este sistema tem a propriedade de que qualquer sinal incidente sofre uma reflexão em 3 faces formando um triedro rectangular, **sendo re-enviado paralelamente a ele próprio**.



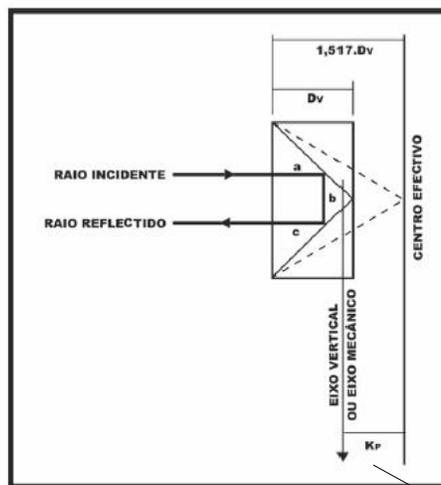
## Medição de distâncias

Os prismas são utilizados em conjunto com os aparelhos EDM para reflectir o sinal emitido. Um exemplo de um prisma está representado na figura, obtido cortando os cantos de um cubo de vidro são cortados, de tal forma que o feixe incidente é reflectido na mesma direcção (retro-reflexão).



A qualidade do prisma é determinada pela perpendicularidade das faces, devendo as respectivas superfícies ser lisas e protegidas por material adequado.

## Medição de distâncias



Como o feixe emitido se propaga a menor velocidade no vidro do que no ar, o centro efectivo do reflector está localizado atrás do prisma, não coincidindo com o centro mecânico (bastão ou suporte), produzindo um **erro sistemático** nas distâncias.

constante do prisma

## Medição de distâncias

O fabricante normalmente calibra o aparelho EDM de acordo com o prisma correspondente, de forma a não ser necessário acrescentar qualquer constante. Quando se utilizam acessórios de outros fabricantes pode ser necessário configurar a constante do prisma no aparelho.

Coefficiente do prisma: a devolução do sinal de medida, emitido pelo EDM pode ser feita de duas maneiras: reflexão total (por prismas) e reflexão difusa (sem prismas). A reflexão total é utilizada em prismas para produzir o desvio dos feixes de luz em 180°, logo um feixe incidente numa face diagonal do prisma irá, após a reflexão total, retomar numa direção paralela ao do raio incidente. Este prisma é concebido de tal forma que qualquer feixe de luz incidente sobre as suas superfícies, retorne na mesma direção.



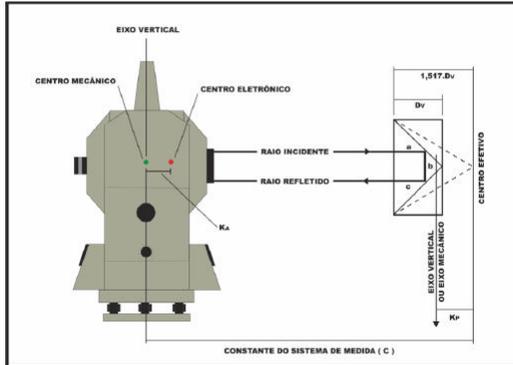
## Medição de distâncias

A utilização dos prismas nas medições eletrónicas deve ser precedida da verificação da constante destes para a correção das distâncias observadas. A constante do prisma fornecida pelo construtor é resultante da constante do instrumento (normalmente zero) mais a constante do prisma, que variam com o tipo, o fabricante e o suporte do prisma.

Prismas Leica	Constantes [mm]	
Prisma padrão GPH1 + GPR1	0.0	
Prisma 360° GRZ4	+23.1	
Mini prisma GMP101/102	+17.5	
Prismas adesivos	+34.4	
USUÁRIO	--	é definido em "Cte Prisma" (-mm + 34.4; ex: mm = 14 -> entrada = -14 + 34.4 = 20.4)
RL	+34.4	Sem prisma

## Medição de distâncias

A constante do sistema de medida é a soma da constante aditiva mais o valor da constante do prisma



O centro electrónico do distanciômetro geralmente não coincide exactamente com o centro geométrico de centragem da estação total, pelo que é necessário acrescentar (ou subtrair) à distância medida uma constante denominada “erro de zero” ou “**constante aditiva**” ( $K_a$ ). Devem-se realizar correções adicionais para reduzir a distância medida na superfície ao elipsóide ou ao plano de referência de trabalho.

## Medição de distâncias

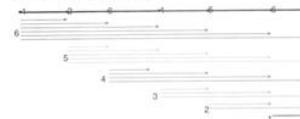
A implementação de sistemas de gestão da qualidade segundo as normas internacionais estabelecidas é, hoje em dia, uma realidade global, particularmente aplicável nas empresas utilizadoras de instrumentos topográficos (base de calibração para verificação ou determinação da rastreabilidade das medições de distância).



Base multi-pilar



ISO 17123-4  
EDM (full test procedure)

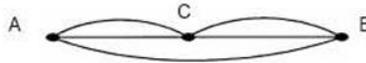


- experimental standard deviation of a single measured distance
- experimental standard deviation of zero-point correction
- zero-point correction

## Medição de distâncias

Quando se utilizam prismas que não se conhece a constante, é necessário definir o valor da correção da constante do prisma para uma marca de prisma específica. Uma vez colocado este valor, este é guardado quando o aparelho for desligado. A verificação e ajuste das constantes do instrumento devem ser efectuadas numa linha base com distância conhecida, isenta de movimentos e com sistema de centragem forçada. Se não existe tal local, estabeleça sua própria linha base de 20 m e compare os dados medidos com os do manual do instrumento. Em ambos casos, a constante do prisma, erro de colimação, correção atmosférica e a correção da refração e curvatura devem estar perfeitamente configurados. Se a linha base é usada dentro de um edifício, a diferença de temperatura pode alterar a precisão da medição. Se a diferença da distância medida em relação a linha base for superior a 5 mm, altere as constantes aplicando o seguinte procedimento:

- 1) numa linha de 100 m, estacione o instrumento nos pontos A e B e meça as distâncias AC, AB e BC.
- 2) repita o passo 1 várias vezes para calcular a constante do instrumento, dada por  $\text{Constante do instrumento} = AC + BC - AB$ .
- 3) se houver discrepância entre a constante original do instrumento e a calculada, configurar o valor da constante do instrumento.



## Medição de distâncias

De forma a determinar a constante de um prisma utilizado em medições de distância, foram efectuadas as seguintes observações de distância horizontal ao longo de 4 estações A, B, C, D colineares, dispostas num terreno horizontal:  $AB = 95.178$  m,  $BC = 194.240$  m,  $CD = 203.306$  m,  $AC = 289.378$  m,  $BD = 397.510$  m,  $AD = 492.664$  m. Considerando pesos iguais, há 6 observações, sendo 3 independentes.

Considerando os valores observados de AB, BC e CD, modificados por uma constante  $\underline{e}$  do prisma, desconhecida (em mm, a ser subtraída), tem-se:

$$\text{AB: } (95178 - \underline{e} + l_1) - (95178 - \underline{e}) = v_1$$

$$\text{BC: } (194240 - \underline{e} + l_2) - (194240 - \underline{e}) = v_2$$

$$\text{CD: } (203306 - \underline{e} + l_3) - (203306 - \underline{e}) = v_3$$

$$\text{AC: } (95178 - \underline{e} + l_1) + (194240 - \underline{e} + l_2) - (289378 - \underline{e}) = v_4$$

$$\text{BD: } (194240 - \underline{e} + l_2) + (203306 - \underline{e} + l_3) - (397510 - \underline{e}) = v_5$$

$$\text{AD: } (95178 - \underline{e} + l_1) - (194240 - \underline{e} + l_2) + (203306 - \underline{e} + l_3) - (492664 - \underline{e}) = v_6$$

## Medição de distâncias

Simplificando

$$l_1 = v_1$$

$$l_2 = v_2$$

$$l_3 = v_3$$

$$l_1 + l_2 - \underline{e} + 40 = v_4$$

$$l_2 + l_3 - \underline{e} + 36 = v_5$$

$$l_1 + l_2 + l_3 - 2\underline{e} + 60 = v_6$$

sistema cuja solução é  $\underline{e} = -30$  mm.

## Medição de distâncias

Nas operações de medição de distâncias, desde a materialização do ponto a ser medido até à leitura do mesmo, uma série de erros podem ocorrer. Dentre as principais fontes que dão origem a erros, destacam-se aquela devida à centralização e verticalização do instrumento e do prisma nos pontos, as condições ambientais, a precisão na pontaria e as condições de fabricação e manutenção do equipamento.

Os principais erros são: constante do prisma, temperatura e pressão, centragem do instrumento e do bastão, ângulo vertical, excentricidade vertical, colimação, erro de índice (constante aditiva), erro cíclico (amplitude e fase), erro de escala (variação na frequência da onda portadora do sinal de medida).



## Medição de distâncias

**TC1000  
TC1600**

**TC2000**



**estações totais**

### TECHNICAL DATA

	TC1000/TC1600	TC2000
<b>Angle measurement</b>	continuous, absolute encoder	absolute encoder, dynamic system, diametrical scanning
<b>Smallest unit displayed</b>	TC1000: 0.001gon, 1", 0.01mil TC1600: 0.001gon, 1", 0.001mil	0.1", 0.00001°, 0.0001gon, 0.0001mil
<b>Updates, continuous mode</b>	0.1-0.5s (both Hz and V)	0.3s (both Hz and V)
<b>Standard deviation to DIN 18723 (Hz/V)</b>	TC1000: 3" (0.001gon) TC1600: 1.5" (0.0005gon)	0.5" (0.0015gon)
<b>Automatic index</b>	pendulum compensator	liquid compensator
<b>Working range</b>	±5" (±0.1gon)	>±10" (>±0.2gon)
<b>Setting accuracy</b>	±1" (±0.0003gon)	<±0.1" (<±0.0003gon)
<b>Telescope</b>	conventional	parafocal
<b>Magnification</b>	30x	30x (focused to ∞)
<b>Field of view at 100m</b>	27m	26m
<b>Shortest focusing distance</b>	1.7m	0.9m
<b>Displays</b>	LCD; 2 displays in each telescope	LCD; 3 displays in each telescope
	position; 8 digits and sign, symbols to guide user	position; 8 digits and sign, 1 alphanumeric display for user guidance, 2 data displays
<b>Distance measurement</b>	Coaxial telescope for angle and distance measurement	
<b>Standard deviation</b>	3mm+2ppm, time needed 5s	
<b>Normal measurement</b>	3mm+2ppm, time needed 5s	2mm+2ppm, time needed 6.5s
<b>DLL report measurement</b>	3mm+2ppm, time needed 2s	—
<b>Tracking</b>	3mm+2ppm, time needed 1-2s	10mm to 20mm, time needed 2.5s
<b>Range (in average atmospheric conditions)</b>	with 1prism 2.0km	
<b>with 3prisms</b>	2.0km	2.5km
<b>with 11prisms</b>	4.0km	5.0km
<b>Signal attenuation</b>	automatic	automatic
<b>Power consumption during measurement</b>	about 5W (0.4A, 12V)	about 5.5W (0.8A, 12V)
<b>Scale correction</b>	-39ppm to +39ppm	-99ppm to +99ppm
<b>Step</b>	1ppm	1ppm
<b>Additive constant</b>	-999mm to +999mm	-99mm to +99mm
<b>Step</b>	1mm	1mm
<b>Two models</b>	Control panel on both faces or 1 control panel and REC module insert in position II	
<b>Data recording</b>	REC module or GRE4a/GRE4b	GRE4a or GRE4b
<b>Power supply</b>	12V DC	12V DC
<b>Plug-in battery</b>	GE870 (0.45Ah)	GE860 (2Ah)
<b>External batteries</b>	GE870 (2Ah)	GE870 (2Ah)
	GE871 (7Ah)	GE871 (7Ah)
<b>Level sensitivity</b>	Circular bubble in tribrach 8" per 2mm	
<b>Plate level</b>	30" per 2mm	20" per 2mm
<b>Weight</b>	Instrument 5.5kg 12.1lb	
<b>Case</b>	3.9kg 8.6lb	9.6kg 21.1lb
		5.5kg 12.1lb

## Medição de distâncias

**TM3000V – TM3000D – TM3000L**



### TECHNICAL DATA

<b>TM3000V/TM3000D/TM3000L</b>	
<b>Angle measurement</b>	Absolute encoder, dynamic measuring system, diametrical scanning system
<b>Standard deviation to DIN 18723 (horizontal and vertical)</b>	0.5" (0.00015gon)
<b>Smallest unit (selectable)</b>	0.00001gon, 0.00001", 0.0001mil
<b>Time taken for single measurement (horizontal and vertical)</b>	0.9s
<b>Compensator</b>	Two-axis liquid compensator
<b>may be activated/deactivated</b>	
<b>Working range, maximum tilt</b>	3.2" (0.06gon)
<b>Setting accuracy</b>	0.1" (0.0003gon)
<b>Drive of standing and tilting axes</b>	Servo motors with incremental encoders and digital scanning system
<b>Maximum speed of rotation</b>	50% for both axes
<b>Technical data of TM3000V</b>	
<b>Telescope</b>	Telescope, CCD camera, optic coupler, wide-angle lens, focusing drive
<b>Components</b>	
<b>Focusing drive</b>	Servo motor with absolute linear scanning system and digital control
<b>Focusing range</b>	0.65m from tilting axis to ∞
<b>Resolution of linear scanning system</b>	2.5µm
<b>Optic coupler</b>	Deflection of optical path from telescope to CCD camera
<b>CCD camera</b>	
<b>Scanning range</b>	8.8x6.6mm (HxV)
<b>Resolution</b>	500 pixels horizontally, 582 pixels vertically
<b>Technical data of TM3000D</b>	
<b>Telescope</b>	Identical to T3000
<b>Tilting range</b>	Limited by limit switch
<b>without DISTOMAT</b>	from 44.5° to 299.2° (49.4gon to 332.4gon)
<b>with DISTOMAT attached</b>	from 44.5° to 175° (49.4gon to 194.4gon)
<b>Distomat</b>	DI2000, DI3000, DIOR3002
<b>Technical data of TM3000L</b>	
<b>Telescope</b>	Telescope, laser coupler with integrated laser scanner, focusing drive
<b>Components</b>	
<b>Focusing drive</b>	As for TM3000V
<b>Laser coupler</b>	
<b>Wavelength of HeNe laser</b>	0.63µm
<b>Telescope output</b>	1mW (IEC class 2)
<b>Laser scanner</b>	Moves laser dot in circular pattern to reduce speckle effect

## Medição de distâncias

*Instrumentos que usam luz visível:* nos instrumentos que usam luz visível, uma lâmpada emite luz que passa por um primeiro prisma de Nicol (ou filtro polaróide) que produz uma polarização segundo um plano, e se a célula Kerr não estiver funcionando, a luz não passa pelo segundo prisma de Nicol, por estar o mesmo cruzado em relação ao primeiro. Porém, a célula Kerr sob a influência da voltagem aplicada pelo oscilador controlado por cristal, gira o plano de polarização em função da diferença de potencial em cada instante e, portanto, uma parte do feixe pode atravessar o segundo prisma de Nicol. Por outras palavras, a quantidade de luz transmitida é proporcional à voltagem e, portanto, à rotação produzida pela célula Kerr, e o feixe agora modulado em intensidade na frequência de modulação, é transmitido por um espelho côncavo para o reflector. O feixe de luz que retorna para o instrumento é recebido por um outro espelho que focaliza o feixe no foco do primeiro cátodo da válvula fotomultiplicadora. A corrente que flui da válvula fotomultiplicadora varia com a intensidade da luz que incide no segundo espelho e com a voltagem aplicada a ela, de acordo com o segundo gerador controlado por cristal. O primeiro gerador funciona na frequência de aproximadamente 30 MHz e o segundo em aproximadamente 30,0015 MHz, ou seja, 1,5 KHz acima do primeiro. O sinal de saída do fotomultiplicador tem um valor de 1,5 KHz e fase  $\varphi_2$  relacionada com o sinal de saída de 30 MHz. Por outro lado, os sinais dos dois geradores controlados por cristal são levados para um misturador que determina a diferença dos sinais de 1,5 KHz, com a fase  $\varphi_1$  da onda emitida que é a referência de medida de fase. Portanto, pode ser medida a diferença de fase  $\varphi_2$  e  $\varphi_1$  utilizando um resolvedor, isto é, a fase de referência  $\varphi_1$  é retardada até que os dois valores,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , se igualem dando um valor de zero, sendo o seu valor indicado no ecrã de leitura digital. Nestes instrumentos a propagação da luz é directa e dificilmente ocorrem reflexões secundárias, pois a maior parte das superfícies encontradas na natureza não produz reflexões fortes para esse comprimento de onda.

## Medição de distâncias

Por outro lado, durante o dia sempre existe a entrada de outras luzes no sistema óptico, reduzindo, assim, sua potencialidade de medida. O feixe é altamente colimado com uma divergência de apenas frações do grau, razão pela qual o receptor óptico tem um diâmetro bastante pequeno e, portanto, pequeno ângulo de aceitação. Com excepção dos equipamentos providos com laser, o alcance em geral é bem menor do que os instrumentos que usam microondas, sendo que à noite o alcance aumenta. Por outro lado, a chuva ou neblina diminuem bastante o alcance. O índice de refração afectado pelas condições atmosféricas é pouco influenciável para o curto comprimento de onda usado, e a humidade que tem grande importância nas medidas com microondas é de pequena influência no geodímetro; principalmente devido a essas razões, o erro externo agora é considerado com um valor de 1 ppm. Para linhas curtas basta tomar as medidas meteorológicas numa extremidade da linha. A curvatura do percurso somente é levada em conta para as maiores distâncias e o seu valor é bastante pequeno. Com luz visível, as leis da óptica geométrica podem ser aplicadas com maior precisão aos transmissores e reflectores dos sinais, pois o percurso da onda é mais bem definido e também é mais estável. Em geral, os equipamentos eletro-ópticos são mais apropriados para medir distâncias menores para a obtenção de alta precisão, sendo o erro de zero o mais importante factor de sua limitação em precisão. O uso do equipamento é bastante aplicado na engenharia civil, podendo ser usado na abertura de túneis ou minas, barragens, pontes, instalação de máquinas, etc.; e no levantamento de campo, medidas de bases de triangulações, poligonais de precisão ou trilaterações de lados curtos.

## Medição de distâncias

*Instrumentos que usam micro-ondas:* os instrumentos que usam micro-ondas tem comprimentos de onda da ordem de alguns centímetros. Nos equipamentos telurômetros, os primeiros modelos tinham comprimentos de onda de 3 a 10 cm, e o modelo mais recente, o MRA-4, tem um valor de  $\lambda$  em torno de 9 mm. Devido ao curto comprimento de onda, a propagação é directa, podendo em certas circunstâncias haver reflexões no solo. Os sinais são irradiados de dipolos de meia onda, colocados no ponto focal do reflector parabólico, com isso obtém-se uma propagação bastante direcional, sendo o ângulo do cone de divergência uma função das dimensões do refletor e comprimento de onda usado. Como o sinal é directo, o alcance do instrumento é limitado à linha de visada, o que implica em distâncias normalmente menores que 100 km. O equipamento pode ser utilizado de dia ou à noite, e mesmo a fraca visibilidade não impede as operações de medida. No caso de chuva o alcance diminui, principalmente com o uso de comprimentos de onda menores, como é o caso do MRA-4. Os equipamentos com micro-ondas utilizam a modulação em frequência da onda portadora, e utilizam diversas frequências para a eliminação de ambiguidades. A frequência mais alta define o limite de precisão possível, sendo que os instrumentos mais recentes utilizam uma frequência em torno de 7,5 MHz. A medida é o dobro deste valor, o que corresponde a um meio de comprimento de onda de 10 m. Como é possível medir 1 / 1.000 partes do ciclo, tem-se uma resolução de 1 cm.

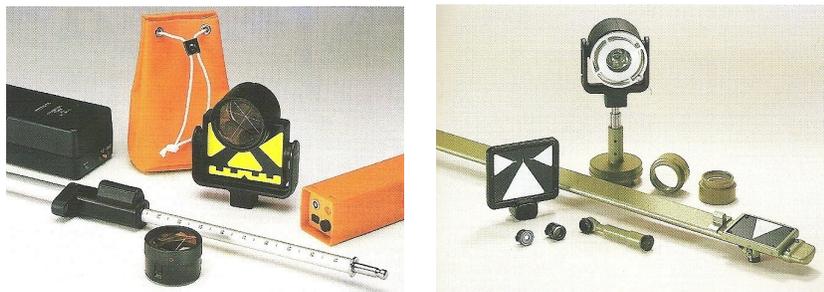
## Medição de distâncias

Como há a possibilidade de medir longas distâncias e considerando-se a resolução de 1 cm, as condições atmosféricas tem grande influência, e normalmente são feitas medidas meteorológicas nas extremidades da linha. As experiências têm indicado que uma precisão da ordem de 3 ppm (partes por milhão) pode ser obtida com cuidadosas observações meteorológicas. Na realidade, é da definição aproximadamente precisa do índice de refração do percurso no instante da medição, que se pode obter uma maior ou menor precisão. Nas pequenas distâncias, da ordem de 1 km, os erros instrumentais têm maior peso, bastando efectuar as medidas em uma das extremidades da linha. Os equipamentos com micro-ondas foram concebidos para medidas geodésicas, isto é, bases de triangulações, poligonações de precisão ou trilaterações de lados curtos, mas a segurança nas medidas, facilidade de operação, preço relativamente baixo, permitiu uma utilização mais ampla, de maneira que qualquer distância superior a 100 m pode, com grandes vantagens, ser medida com equipamento electrónico, havendo necessidade de obtenção de uma precisão acima de 1/10.000 ou 1/20.000. Somente os últimos modelos permitem sua utilização em túneis, pois os feixes dos primeiros era muito grande, produzindo problemas com reflexões.

## Medição de distâncias

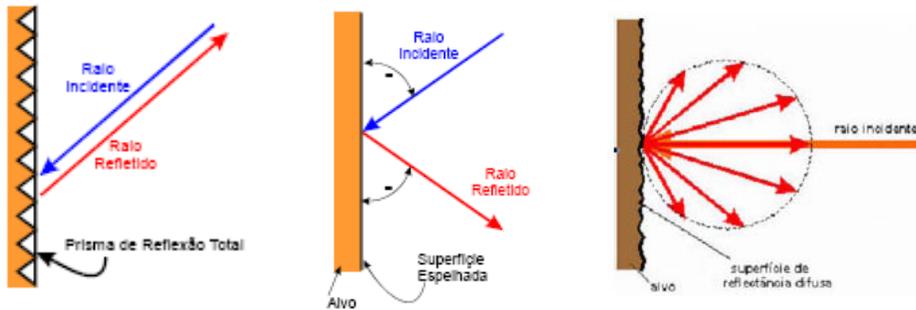
**Instrumentos que usam infravermelho:** os instrumentos que usam infravermelho como onda portadora têm um comprimento de onda em torno de  $0,9 \mu\text{m}$ . O índice de refração padrão usados para os instrumentos a infravermelho é tomado geralmente como 1,00028 e para uma precisão de 1 ppm a pressão deve ser obtida com erro inferior a 3 mm Hg. Na região do infravermelho a atmosfera tem uma forte absorção, com excepção da região entre  $0,72 \mu\text{m}$  e  $0,94 \mu\text{m}$ , que é chamado de “janela do infravermelho”, que implica no uso desta região em todos os instrumentos. Todos os equipamentos que funcionam na região do infravermelho são limitados pela potência de saída da fonte, que é um diodo luminescente de arseniato de gálio, que emite radiação incoerente de aproximadamente  $0,9 \mu\text{m}$  e que tem como principal característica a de poder ser modulado diretamente em intensidade. O diodo consiste em dois extractos semicondutores, um dos quais é um condutor positivo e o outro negativo. Na zona de transição, os eléctrons podem ser levados a um estado de maior energia com a aplicação de uma corrente de excitação, e a energia se desprende sob a forma de radiação luminosa espontânea. A radiação emitida pelo diodo é proporcional à corrente de excitação, ou corrente aplicada.

## Medição de distâncias



acessórios (alvos, prismas, bastões)

## Medição de distâncias



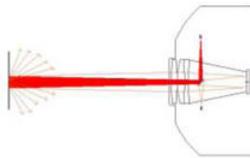
**Reflexão total**

**Reflexão especular**

**Reflexão difusa**

## Medição de distâncias

Na reflexão difusa os feixes de luz divergem de maneira proporcional com o aumento da distância em relação à fonte emissora. A medição sem prisma é utilizada em equipamentos que emitem laser, que é uma fonte de luz coerente com incidência bem localizada, permitindo que uma parte dos raios incidentes retorne ao EDM.



## Medição de distâncias

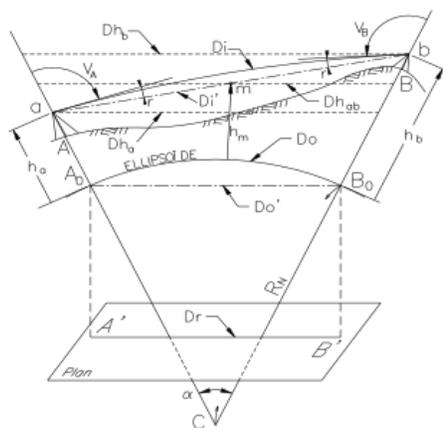
**Reflexão Total** - utilizado por equipamentos com portadora infravermelho e para portadoras LASER quando utilizadas para medidas de grandes distâncias. Este tipo de refletor é mais conhecido como reflector de canto, formado por três faces ortogonais. A característica principal consiste na devolução do sinal independentemente do ângulo de incidência no refletor, sendo este reflectido retorna paralelamente a ele própria. Nesta estrutura encaixam-se também as fitas adesivas utilizadas em rodovias para sinalização, conhecidas popularmente como “olhos-de-gato”. Estes modelos são econômicos e eficientes, porém só proporcionam boas respostas para distâncias curtas. Tais sistemas podem ser utilizados como alvos permanentes para controlo de estruturas.

**Reflexão especular** - a característica deste alvo consiste em refletir o raio incidente com o mesmo ângulo de incidência. A aplicação deste tipo de alvo na determinação de distâncias em Topografia é muito restrita.

**Reflexão difusa** – uma parte do sinal reflectido retorna paralelamente ao sinal emitido.

## Medição de distâncias

As distâncias medidas devem ser transformadas antes de utilizadas no cálculo de coordenadas devido aos problemas da representação plana do elipsóide. O objectivo

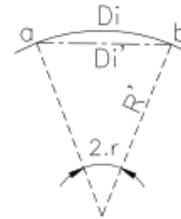


**Redução** das distâncias medidas

é obter a distância **A'B'**, designada por  **$D_r$** , projectada num plano horizontal, por exemplo uma carta. No terreno, utilizando um distanciómetro, mede-se a distância  **$D_i$**  segundo o percurso curvo do raio luminoso devido à refração atmosférica ( $r$ =ângulo de refração) entre os pontos **a** e **b**, centros ópticos do aparelho estacionado em **A** e do prisma estacionada em **B**.

## Medição de distâncias

**Medição de  $D_i$ :** a curva descrita pela linha de visada, cujo comprimento  $D_i$  é medido pelo distanciômetro, pode ser assimilada a um arco de circunferência de raio  $R' \approx 6R_N$ , em que  $R_N = (R_A + R_B)/2$  é a média dos raios das secções normais ao elipsóide em a e em b.



**Redução à corda para a obtenção de  $D_i'$ :** em topografia esta correção é desprezada atendendo à relação entre o raio da Terra (e portanto dos raios de curvatura das linhas de visada) e as distâncias medidas; designando a corda ab por  $D_i'$  e o arco ab por  $D_i$ , tem-se  $D_i = 2r_{\text{radianos}} R'$  e  $D_i' = 2R' \sin r$ , onde  $2r$  é o ângulo subtendido pelo arco ab, donde  $D_i' = 2R' \sin(D_i/2R')$ . Desenvolvendo  $\sin(D_i/2R')$  em série, tem-se  $D_i' \approx D_i - D_i^3/24R'^2$ , o que significa um erro de 1 mm para  $D_i = 32.7$  km.

## Medição de distâncias

A distância inclinada  $D_i$  pode ser medida de A para B ou de B para A ou ainda efectuando visadas recíprocas, simultâneas ou não. Devem ser medidas as distâncias zenitais  $V_A$  e  $V_B$ . Os pontos a e b têm a mesma projecção sobre o elipsóide que os pontos estação A e B, tendo portanto a mesma posição planimétrica. Sendo  $a_a^i$  e  $a_b^i$  as alturas do instrumento em A e em B, tem-se que as altitudes elipsoidais  $h_a = h_A + h_a^i$ ,  $h_b = h_B + h_b^i$ ,  $h_M = (h_A + h_B)/2$ , em que m é o ponto médio do segmento ab.

## Medição de distâncias

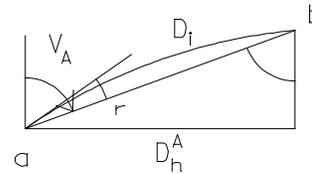
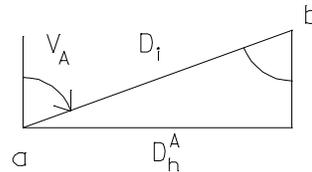
**Redução à horizontal:** a visada unilateral (apenas de A para B), as visadas recíprocas em A e B e as visadas recíprocas simultâneas em A e B permitem obter:

$$Dh_A = D_i \sin V_A + \frac{mra-2}{2R_N} D_i^2 \sin V_A \cos V_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_A = D_i \sin V_A \\ Dh_B = D_i \sin V_B \end{array} \right\} Dh_{AB} = \frac{Dh_A + Dh_B}{2}$$

$$Dh_{AB} = D_i \cos \frac{V_B - V_A}{2}$$

onde  $mra$  é o módulo de refração atmosférica, geralmente tomando o valor 0.13.



## Medição de distâncias

Estas fórmulas fornecem a correção a aplicar a  $Dh$  devido a erros provocados pela refração atmosférica e pela esfericidade terrestre. No primeiro caso a correção obtém-se utilizando um modelo atmosférico; nos casos restantes, os erros eliminam-se por diferença.

## Medição de distâncias

Devido à esfericidade terrestre, as distâncias horizontais no terreno dependem da altitude do ponto de redução; em rigor, a distância reduzida ao horizonte no ponto A é diferente da distância reduzida ao horizonte no ponto a, que por serem muito próximas, são consideradas iguais; de facto, a influência desta aproximação no resultado é muito insignificante:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Dh_A}{R_N + h_A} = \frac{Dh_a}{R_N + h_A + h_A^i} = \frac{Dh_a - Dh_A}{h_A^i} \Rightarrow \frac{Dh_a - Dh_A}{Dh_A} = \frac{h_A^i}{R_N + h_A}$$

Numericamente, mesmo num caso desfavorável onde  $h_A=0$  e  $h_A^i=2$  m, o erro é da ordem de 0.3 ppm, donde, para efeitos práticos,  $Dh_A=Dh_a$ ,  $Dh_B=Dh_b$ ,  $Dh_M=Dh_m$ .

## Medição de distâncias

**Exemplo:** com que precisão é necessário ler os ângulos verticais para obter a distância horizontal  $Dh_{AB}$  ao centímetro se a distância inclinada  $D_i$  igual a 2 km for medida por visadas recíprocas simultâneas com um distanciómetro tal que  $\sigma_{D_i}=\pm(3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$  e se  $(V_B-V_A)=6 \text{ gon}$ ?

$$\sigma_{Dh}^2 = [\sigma_{D_i} \cos(V_B - V_A)/2]^2 + 2[D_i \sigma_v \sin(V_B - V_A)/2]^2 \Rightarrow \sigma_v = \pm 5.8 \text{ mgon}$$

## Medição de distâncias

**Redução ao elipsóide:** o teorema de Tales permite escrever

$$D_{O'} = Dh_{ab} \frac{R_N}{R_N + h_m} = Dh_a \frac{R_N}{R_N + h_a} = Dh_b \frac{R_N}{R_N + h_b}$$

É portanto necessário conhecer a altitude média  $h_m$  da visada  $ab$ , ou seja, do ponto  $m$ , obtida a partir das altitudes dos pontos  $a$  e  $b$ . Sendo conhecido o valor do raio terrestre médio para as altitudes em questão, é suficiente o conhecimento de  $h_a$  e  $h_b$  ao metro, tendo-se consoante o caso (visadas unilaterais ou recíprocas/visadas recíprocas simultâneas):

$$\begin{cases} h_m = h_A + a_a^i + \frac{D_i}{2} \cos V_A + \frac{D_h^2(\text{km})}{15.2} = h_B + a_b^i + \frac{D_i}{2} \cos V_B + \frac{D_h^2(\text{km})}{15.2} \\ h_m = h_A + a_a^i + \frac{D_i}{2} \sin \frac{V_B - V_A}{2} = h_B + a_b^i + \frac{D_i}{2} \sin \frac{V_A - V_B}{2} \end{cases}$$

## Medição de distâncias

**Exemplo:** utilizando os valores numéricos do último exemplo, com que precisão é necessário conhecer  $h_m$  para obter  $D_{O'}$  com precisão milimétrica, admitindo que não há incerteza em  $D_i$  nem em  $R_N$ ?

De  $D_i=2$  km e  $V_B-V_A=6$  gon,  $Dh_{AB} \approx 1997.8$  m e  $\Delta h_{AB} \approx 94.2$  m;

$\sigma_{D_{O'}} = Dh_{R_N} / (R_N + h_m)^2 \sigma_h \Rightarrow \sigma_h \approx R_N / Dh \sigma_{D_{O'}} = \pm 3.2$  m para se obter  $D_{O'}$  com precisão igual a  $\pm 1$  mm .

## Medição de distâncias

**Redução ao plano cartográfico:** esta correção depende da projecção utilizada; no caso da projecção de Gauss, o factor a aplicar à distância reduzida ao elipsóide é:

$$\frac{M_E^2 + M_V^2 + M_E M_V}{4R^2}$$

## Medição de distâncias

### Reduções de distâncias

As distâncias medidas são sempre inclinadas e calculadas pela fórmula:

$$D_i = D_o * (1 + \text{ppm} * 10^{-6}) + \text{mm}$$

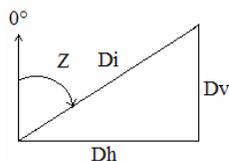
**$D_i$**  = distância inclinada em metros;

**$D_o$**  = distância não corrigida;

**ppm** = correção de escala (mm/Km);

**mm** = constante do prisma (mm).

A fórmula de conversão de distância inclinada em distâncias horizontal e vertical são as seguintes quando as correções de refração e curvatura da Terra não são aplicadas.



$$D_h = D_i * \text{sen } Z$$

$$D_v = D_i * \text{cos } Z$$

**$Z$**  = ângulo vertical

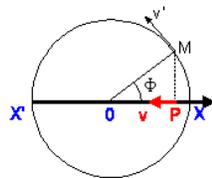
**$D_h$**  = distância horizontal

**$D_v$**  = distância vertical

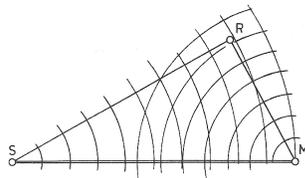
**$D_i$**  = distância inclinada

## Medição de distâncias

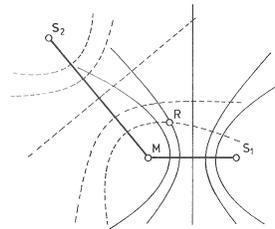
b2) Diferença de fase entre dois sinais recebidos de fontes diferentes: considerando dois emissores M e S emitindo de forma contínua sinais não modulados de igual frequência e uma estação R de posição desconhecida que recebe estes sinais, sendo  $\Phi_M$  e  $\Phi_S$  os ângulos de fase desses sinais em qualquer instante, tem-se que a respectiva diferença de fase na estação R é dada por  $\Delta\Phi = (\Phi_M + \Delta\Phi_M) - (\Phi_S + \Delta\Phi_S) = \left(\Phi_M + \frac{\omega}{c} \overline{MR}\right) - \left(\Phi_S + \frac{\omega}{c} \overline{SR}\right) = (\Phi_M - \Phi_S) + \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{MR} - \overline{SR})$ , onde  $\overline{MR}$  e  $\overline{SR}$  são as distâncias dos emissores à estação; os ângulos de fase  $\Phi_M$  e  $\Phi_S$  são mantidos numa relação constante, de tal forma que  $(\Phi_M - \Phi_S)$  é constante, dependendo a expressão anterior da diferença de distâncias entre os emissores e a estação: os lugares geométricos para os quais esta diferença é igual constituem uma hipérbole com foco em M e S, de forma a que a posição da estação fica determinada quando se obtém a intersecção de duas hipérboles, o que implica um terceiro emissor.



Ângulo de fase



Princípio da medição da diferença de fase utilizando sinais emitidos pelos emissores M e S

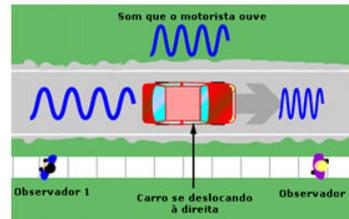
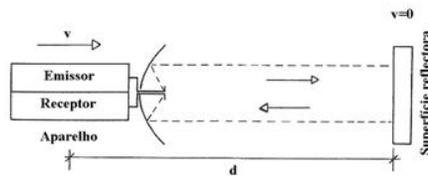


Princípio de posicionamento utilizando duas medições de diferença de fase

## Medição de distâncias

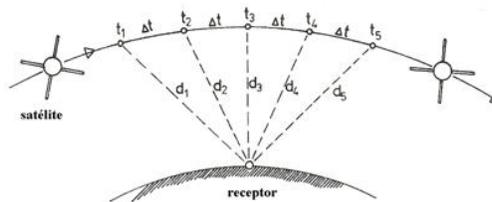
c) **Método Doppler:** considere-se um aparelho consistindo num emissor e receptor de micro-ondas; o aparelho move-se com velocidade  $v$  em direcção a uma superfície reflectora S, de tal forma que o sinal emitido é reflectido nessa superfície e recebido no receptor. Sendo  $f_e = \frac{c}{\lambda}$  a frequência do sinal emitido, a frequência do sinal que alcança a superfície é  $f_s = \frac{(c+v)}{\lambda}$  e a frequência do sinal que alcança novamente o receptor é  $f_r = \frac{(c+2v)}{\lambda}$ . Conjugando os sinais emitido e recebido no receptor obtém-se, entre outras frequências, a frequência Doppler  $f_D = f_r - f_e = \frac{(c+2v)}{\lambda} - \frac{c}{\lambda} = \frac{2v}{\lambda}$ , ou seja,  $v = \frac{1}{2} f_D \lambda$ , de onde se

obtem a distância percorrida pelo aparelho entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ :  $d_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} f_D \lambda \, dt = \lambda [\text{contagem Doppler}]_{t_1}^{t_2}$ .



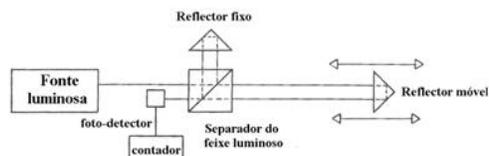
## Medição de distâncias

No caso dos sistemas Transit e Navstar GPS, os receptores Doppler são utilizados para seguir os satélites no seu movimento orbital; no primeiro caso, estacionando o receptor no ponto a coordenar e registando a contagem de ciclos do sinal Doppler ao longo de passagens sucessivas (contagem Doppler), é possível o cálculo de diferenças de distâncias  $d_{12} = d_1 - d_2$ ,  $d_{23} = d_2 - d_3$ ,  $d_{34} = d_3 - d_4$ , etc, sendo a posição do receptor obtida por intersecção de hiperbolóides (lugar geométrico espacial dos pontos a igual diferença de distância relativamente a dois pontos de coordenadas conhecidas). Cada intervalo temporal produz um par de hiperbolóide com focos na posição do satélite no início e no fim desse intervalo.



## Medição de distâncias

**d) Método interferométrico:** a determinação de distâncias por interferometria é utilizada em metrologia para a determinação de distâncias com grande precisão (por exemplo, a definição do metro). A luz, ao atravessar (ou ser refletida por) uma abertura de diâmetro  $D$  e distância focal  $F$ , forma no plano focal uma imagem com máximos e mínimos separados por  $\Delta x = 1.22 F \frac{\lambda}{D}$  onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz (actualmente, os interferômetros raramente utilizam prismas, que são substituídos por outros meios de dispersão da luz ou de singularização de um conjunto de comprimentos de onda, como sejam redes de difração).



## Medição de distâncias

Uma fonte luminosa (em geral laser) produz um feixe que é dirigido em direcção a um separador, que divide o feixe numa parte que mantém a mesma direcção e é dirigida para um reflector móvel e noutra parte que sofre uma reflexão e é dirigida para um reflector fixo. Os feixes, após reflexão nos dois reflectores, encontram-se novamente no separador, onde produzem um padrão de interferência, que é registado num foto-detector, sendo igualmente efectuada a contagem Doppler do sinal resultante (as duas ondas sobrepostas têm a mesma frequência e amplitude pois são geradas pela mesma fonte mas têm uma diferença de fase constante devido à diferença de percurso realizado):  $y_1 = A \sin(\omega t)$ ,

$y_2 = A \sin(\omega t + \Delta\Phi)$ ,  $y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\Delta\Phi}{2}\right)$ . Durante o deslocamento do reflector móvel, o fotodetector conta o número de franjas do padrão de interferência, sendo a distância entre a posição inicial e final do reflector dada por  $2d = (\text{número de franjas}) \lambda$ .