EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
FOLHA D

FERNANDO FERREIRA

MARÇO DE 2017

(1) (Ulrich Berger) Considere a linguagem do cálculo de predicados com igualdade constituída por uma constante 0 e dois símbolos funcionais unários S e f.
  (a) Mostre que $\forall x(S(x) \neq 0) \models \exists x(f(S(f(x))) \neq x)$.
  (b) Encontre termos fechados $q_1, \ldots, q_r$ e $t_1, \ldots, t_n$ tais que
$$\models \quad \bigwedge_{j=1}^{r}(S(q_j) \neq 0) \to \bigvee_{i=1}^{n}(f(S(f(t_i))) \neq t_i).$$
(2) Seja T uma teoria no cálculo de predicados com igualdade. Mostre que se T tem modelos finitos de cardinalidade arbitrariamente grande, então tem um modelo infinito. [Sugestão: adicione convenientemente novas constantes à linguagem e use o Teorema da Compacidade.]
(3) Mostre que toda a ordem parcial pode ser estendida a uma ordem total. [Primeiro mostre que toda a ordem parcial finita pode ser estendida a uma ordem total. Depois utilize convenientemente um argumento de compacidade.]
(4) Seja T uma teoria universal (i.e., que tem uma axiomtização universal). Mostre que se $\mathfrak{M}$ é modelo de T e $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ então $\mathfrak{N}$ é modelo de T.
  Nas alíneas seguintes vamos ver que o recíproco também é verdade.
  (a) Considere-se uma expansão da linguagem da teoria T que contenha novas constantes $c_1, \ldots, c_n$. Seja $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula da linguagem original tal que $\mathsf{T} \models \theta(c_1, \ldots, c_n)$. Mostre que
$$\mathsf{T} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \theta(x_1, \ldots, x_n).$$
  (b) Seja T uma teoria e $\mathsf{T}_\forall$ o conjunto das fórmulas universais de T. Seja $\mathfrak{M}$ um modelo de $\mathsf{T}_\forall$ e D o diagrama de $\mathfrak{M}$. Mostre que $D \cup \mathsf{T}$ é finitamente satisfazível.
  (c) Suponhamos que T é uma teoria com a seguinte propriedade: sempre que $\mathfrak{M}$ é modelo de T e $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ então $\mathfrak{N}$ é modelo de T. Mostre que T tem uma axiomatização universal.
(5) Mostre que a teoria das ordens lineares densas com mínimo e máximo diferentes é completa.
(6) Mostre que a teoria das ordens lineares densas sem extremos não é $2^{\aleph_0}$-categórica.
(7) Axiomatize a teoria de uma permutação sem ciclos finitos. Mostre que esta teoria é $\aleph_1$-categórica e conclua que é completa.