OS TEOREMAS DE LÖWENHEIM-SKOLEM

FERNANDO FERREIRA

Um olhar atento às construções de Herbrand e Skolem permitem justificar o seguinte facto:

Teorema de Löwenheim-Skolem. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade de cardinalidade κ e considere-se Γ um conjunto de fórmulas fechadas de $\mathcal{L}$. Se Γ tem um modelo, então Γ tem um modelo de cardinalidade $\leq \kappa$.*

Demonstração. Por hipótese Γ tem um modelo (normal). Como sabemos, este modelo pode expandir-se a um modelo da Skolemização Γ^S. Por construção, o modelo expandido ainda é normal, o que permite concluir que $\Gamma^S \cup IG$ é satisfazível, onde IG são os axiomas de igualdade para a linguagem expandida de Skolem. Note-se que $\Gamma^S \cup IG$ é apenas constituído por fórmulas (fechadas) universais. Decorre imediatamente que a sua expansão de Herbrand $\mathscr{H}(\Gamma^S \cup IG)$ é proposicionalmente satisfazível. Daqui infere-se que $\Gamma^S \cup IG$ tem um modelo (não necessariamente normal) cujo domínio é constituído pelos termos fechados da linguagem de $\mathcal{L}^S$. Portanto, $\Gamma^S \cup IG$ tem um modelo, não necessariamente normal, de cardinalidade $\leq \kappa$. Passando ao quociente, obtemos um modelo *normal* de cardinalidade $\leq \kappa$ de $\Gamma^S \cup IG$ (e, por conseguinte, de Γ). □

Corolário 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade de cardinalidade κ. Considere-se Γ um conjunto de fórmulas fechadas que tenha um modelo infinito. Então, para qualquer cardinal $\nu \geq \kappa$, existe um modelo de Γ de cardinalidade ν.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ um modelo infinito (normal) de Γ. Considere-se a expansão $\mathcal{L}'$ da linguagem $\mathcal{L}$ juntando-lhe um conjunto de *novas* constantes C de cardinalidade ν. Seja Γ' o conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{c \neq d : c \text{ e } d \text{ constantes distintas de } C\}$. Note-se que toda a parte finita de Γ' tem um modelo pois, dado um qualquer subconjunto finito F de C, o conjunto

$$\Gamma \cup \{c \neq d : c \text{ e } d \text{ constantes distintas de } F\}$$

tem como modelo uma qualquer expansão a $\mathcal{L}'$ da estrutura $\mathfrak{M}$ que interprete cada constante de F de modo diferente (e isso é possível, pois $|\mathfrak{M}|$ é infinito). Pelo teorema da compacidade para o cálculo de predicados com igualdade, Γ' tem um modelo (normal). Visto que a cardinalidade de $\mathcal{L}'$ é ν, pelo teorema anterior Γ' tem um modelo $\mathfrak{N}$ de cardinalidade $\leq \nu$. Ora, como $\{c^{\mathfrak{N}} : c \in C\}$ tem cardinalidade ν, conclui-se que $\mathfrak{N}$ tem exactamente cardinalidade ν. A redução de $\mathfrak{N}$ à linguagem original $\mathcal{L}$ tem as propriedades desejadas. □

Os axiomas da aritmética de Peano, formulada na linguagem *numerável* da aritmética, têm como modelo a estrutura (infinita) *standard* $\mathbb{N}$. Logo, pelo teorema anterior, tem modelos de qualquer cardinalidade infinita. Necessariamente, se a cardinalidade não for numerável, o modelo não é (isomorfo a) $\mathbb{N}$. Tratam-se de modelos *não-standard* dos axiomas de Peano. O argumento anterior não é peculiar aos axiomas de Peano. Seja $\mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as fórmulas fechadas ϕ da linguagem da aritmética que são verdadeiras no modelo *standard*, i.e., tais que $\models_{\mathbb{N}} \phi$. Um raciocínio semelhante ao acima permite concluir que $\mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$ tem modelos não-standard.

No que resta desta secção vamos ainda formular e demonstrar outros teoremas do tipo acima. Em particular, vamos refinar a forma "ascendente" do teorema de Löwenheim-Skolem dada pelo corolário anterior. Para o fazer necessitamos de introduzir alguns conceitos simples. Em primeiro lugar, já falámos várias vezes de estruturas *isomorfas*. O conceito é claro mas vamos de seguida articulá-lo explicitamente: sejam $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ duas estruturas duma linguagem $\mathcal{L}$. Diz-se que $\mathfrak{M}$ é isomorfa a $\mathfrak{N}$ se existe uma bijecção $B : |\mathfrak{M}| \mapsto |\mathfrak{N}|$ tal que,

(i) Para cada símbolo relacional n-ário R de $\mathcal{L}$ se tem,
$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}}$ se, e somente se $(B(a_1), \ldots, B(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}}$,
para todos os elementos $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$.
(ii) Para cada símbolo funcional n-ário ($n \neq 0$) de $\mathcal{L}$ se tem,
$B(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(B(a_1), \ldots, B(a_n))$,
para todos os elementos $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$.
(iii) Para cada constante c de $\mathcal{L}$, $B(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$.

Vê-se facilmente, por indução na complexidade das fórmulas, que se B é um isomorfismo entre as estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ então, para toda a fórmula ϕ e atribuição s de valores às variáveis em $\mathfrak{M}$ se tem,

$\models_{\mathfrak{M}} \phi[s]$ se, e somente se, $\models_{\mathfrak{N}} \phi[s^B]$,

onde s^B é a atribuição de valores às variáveis em $\mathfrak{N}$ definida por $s^B(x) = B(s(x))$. Note-se que, em particular, se ϕ é uma fórmula fechada então $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ sse $\models_{\mathfrak{N}} \phi$.

Uma estrutura $\mathfrak{M}$ é *subestrutura* de $\mathfrak{N}$, e escrevemos $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, se $|\mathfrak{M}| \subseteq |\mathfrak{N}|$ e (i) para cada símbolo relacional n-ário R, $R^{\mathfrak{N}} \cap |\mathfrak{M}|^n = R^{\mathfrak{M}}$; (ii) para cada símbolo funcional n-ário ($n \neq 0$) f, a restrição de $f^{\mathfrak{N}}$ a $|\mathfrak{M}|^n$ é $f^{\mathfrak{M}}$; e (iii) para cada constante c da linguagem, $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}$.

Através da combinação das duas noções anteriores, dizemos que há um *mergulho* de $\mathfrak{M}$ em $\mathfrak{N}$ se há uma subestrutura de $\mathfrak{N}$ isomorfa a $\mathfrak{M}$. A uma estrutura $\mathfrak{M}$ duma dada linguagem $\mathcal{L}$ podemos associar o seu diagrama. Passamos a explicar. Considera-se a expansão $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ da linguagem original juntando-lhe uma *nova* constante c_a para cada elemento $a \in |\mathfrak{M}|$. É claro que $\mathfrak{M}$ é a redução da estrutura $\mathfrak{M}_{dg}$ de $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$, onde nesta se interpreta cada nova constante c_a por a, i.e., definindo $c_a^{\mathfrak{M}_{dg}}$ como sendo a. O *diagrama* $\mathfrak{M}$ é o conjunto de todas as fórmulas atómicas fechadas de $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$, e negações destas, que são verdadeiras em $\mathfrak{M}_{dg}$. O leitor pode facilmente convencer-se de que $\mathfrak{M}$ pode ser sempre mergulhado nos modelos do seu diagrama (considerando a redução destes à linguagem original).

Definição 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. Duas estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ para essa linguagem dizem-se* elementarmente equivalentes*, e escreve-se $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, se para toda a fórmula fechada ϕ, $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ se, e somente se, $\models_{\mathfrak{N}} \phi$.*

Como vimos, estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes. O recíproco não é, em geral, verdade. A título de exemplo, seja $\mathfrak{A}$ um modelo de $\mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$ de cardinalidade não numerável. Então $\mathbb{N}$ e $\mathfrak{A}$ não são isomorfos, se bem que sejam elementarmente equivalentes. Com efeito, seja ϕ uma fórmula fechada da linguagem da aritmética e suponhamos que $\models_{\mathbb{N}} \phi$, i.e., $\phi \in \mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$. Sai $\models_{\mathfrak{A}} \phi$. Reciprocamente, se $\not\models_{\mathbb{N}} \phi$, vem $\models_{\mathbb{N}} \neg\phi$, i.e., $\neg\phi \in \mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$. Sai $\models_{\mathfrak{A}} \neg\phi$ e, por conseguinte, $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi$.

Definição 2. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade e $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ duas estruturas de $\mathcal{L}$. Diz-se que $\mathfrak{M}$ é* subestrutura elementar *de $\mathfrak{N}$ (ou que $\mathfrak{N}$ é uma* extensão elementar *de $\mathfrak{M}$), e escreve-se $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, se $\mathfrak{M}$ é subestrutura de $\mathfrak{N}$ e se, para todas as fórmulas ϕ e atribuição s de valores das variáveis em $|\mathfrak{M}|$, se tem $\models_{\mathfrak{M}} \phi[s]$ sse $\models_{\mathfrak{N}} \phi[s]$.*

Note-se que se $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, então $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Diz-se que há um *mergulho elementar* duma estrutura $\mathfrak{M}$ numa estrutura $\mathfrak{N}$ se a primeira estrutura é isomorfa a uma subestrutura elementar da segunda. A uma estrutura $\mathfrak{M}$ numa dada linguagem $\mathcal{L}$ podemos associar o seu diagrama elementar. O *diagrama elementar* de $\mathfrak{M}$ é o conjunto de todas as fórmulas fechadas de $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ que são verdadeiras em $\mathfrak{M}_{dg}$. O leitor pode facilmente convencer-se de que $\mathfrak{M}$ pode ser sempre mergulhado elementarmente nos modelos do seu diagrama elementar (considerando a redução destes à linguagem original).

Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade de cardinalidade κ e seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura infinita de $\mathcal{L}$ de cardinalidade ζ. Se ν é um cardinal tal que $\nu \geq \max\{\kappa, \zeta\}$, existe uma extensão elementar de $\mathfrak{M}$ de cardinalidade ν.*

Demonstração. Considere-se Γ o diagrama elementar de $\mathfrak{M}$. É claro que $\mathfrak{M}_{dg}$ é um modelo (infinito) de Γ. Visto que a linguagem $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ tem cardinalidade $\max\{\kappa, \zeta\}$, pelo corolário do teorema de Löwenheim-Skolem, Γ tem um modelo de cardinalidade ν. Como observámos, este modelo contém uma subestrutura elementar isomorfa a $\mathfrak{M}$. O resultado agora é imediato. $\square$

Proposição 1. *Tem-se $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ e para todas as fórmulas ϕ e atribuições s de variáveis em $|\mathfrak{M}|$,*

se $\models_{\mathfrak{N}} \exists x\phi\,[s]$, então existe $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \phi\,[s^x_a]$.

Demonstração. Uma direcção é muito simples. Se $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ vem imediatamente $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Além disso, dada uma fórmula ϕ e uma atribuição s de variáveis em $|\mathfrak{M}|$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \exists x\phi\,[s]$ vem, por definição de subestrutura elementar, que $\models_{\mathfrak{M}} \exists x\phi\,[s]$. Logo, existe $a \in |\mathfrak{M}|$ com $\models_{\mathfrak{M}} \phi\,[s^x_a]$. Novamente por definição de subestrutura elementar, sai $\models_{\mathfrak{N}} \phi\,[s^x_a]$. Reciprocamente, suponhamos a hipótese. Mostra-se, por indução na complexidade de ψ que, para toda a atribuição de valores às variáveis em $|\mathfrak{M}|$ se tem, $\models_{\mathfrak{M}} \psi\,[s]$ sse $\models_{\mathfrak{N}} \psi\,[s]$. Se ψ é atómica, a equivalência sai pelo facto de $\mathfrak{M}$ ser subestrutura de $\mathfrak{N}$. Não tem dificuldade argumentar o passo de indução para os conectivos proposicionais. Suponhamos que $\models_{\mathfrak{N}} \exists x\psi\,[s]$. Por hipótese, existe $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \psi\,[s^x_a]$. Logo, por hipótese de indução, $\models_{\mathfrak{M}} \psi\,[s^x_a]$ e, portanto, $\models_{\mathfrak{M}} \exists x\psi\,[s]$. A direcção contrária é ainda mais simples. Finalmente, o caso do quantificador universal reduz-se aos casos anteriores. $\square$

Teorema de Löwenheim-Skolem Descendente. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade de cardinalidade κ e seja $\mathfrak{N}$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ de cardinalidade $\nu \geq \kappa$. Então, dado um qualquer conjunto $X \subseteq |\mathfrak{N}|$ de cardinalidade $\leq \zeta$ com $\kappa \leq \zeta \leq \nu$, existe uma subestrutura elementar de $\mathfrak{N}$ de cardinalidade ζ que contém X.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos tomar X de cardinalidade ζ. Para cada fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ e cada n-tuplo $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de X tais que

$$\models_{\mathfrak{N}} \exists x\phi(x, x_1, \ldots, x_n)\,[a_1, \ldots, a_n],$$

escolha-se um elemento $a \in |\mathfrak{N}|$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \phi(x, x_1, \ldots, x_n)\,[a, a_1, \ldots, a_n]$. Seja X_1 o conjunto de todos os elementos escolhidos deste maneira. Note-se que $X \subseteq X_1$ (pense na fórmula $\exists x(x = x_1)$). Como o número de fórmulas ϕ nas condições anteriores não excede κ e o número de sequências finitas de elementos de X é ζ, conclui-se que X_1 tem cardinalidade ζ. Podemos, assim, iterar este processo e formar uma cadeia de subconjuntos de $|\mathfrak{N}|$ de cardinalidade ζ,

$$X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$$

Seja $X_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$. Note-se que X_∞ tem cardinalidade ζ. Verifica-se facilmente que o conjunto X_∞ contém os elementos da forma $c^{\mathfrak{N}}$ (c constante da linguagem) e é fechado para as funções $f^{\mathfrak{N}}$ (f símbolo funcional da linguagem). Considere-se $\mathfrak{M}$ a subestrutura de $\mathfrak{N}$ com domínio X_∞. Vamos ver que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ utilizando o critério dado pela proposição anterior. Considere-se $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ e suponhamos que $\models_{\mathfrak{N}} \exists x\phi(x, x_1, \ldots, x_n)\,[a_1, \ldots, a_n]$, com $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$. Tome-se um número natural m suficientemente grande de tal modo que $a_1, \ldots, a_n \in X_m$. Por construção, existe $a \in X_{m+1}$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \phi(x, x_1, \ldots, x_n)\,[a, a_1, \ldots, a_n]$. Como $X_{m+1} \subseteq X_\infty$, vem $a \in |\mathfrak{M}|$. $\square$

O teorema anterior está na origem do *paradoxo de Skolem*. Uma pasmosa descoberta do início do século XX foi a de que praticamente toda a matemática se pode desenvolver no âmbito da teoria de conjuntos. Esta teoria pode formalizar-se na linguagem do cálculo de predicados com igualdade com apenas um símbolo relacional binário '$\in$'. Consideremos, por exemplo, a teoria ZC de Zermelo com o axioma da escolha. Esta teoria formaliza praticamente toda a matemática usual, incluindo o desenvolvimento dos sistemas numéricos fundamentais: números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos. Como se sabe, o conjunto da hierarquia cumulativa $V_{\omega+\omega}$, munido da relação de pertença, é um modelo de ZC. Denotemos este modelo por $(V_{\omega+\omega}, \in)$. Obviamente, os elementos de $V_{\omega+\omega}$ que satisfazem em $(V_{\omega+\omega}, \in)$ as fórmulas de ser o conjunto dos números naturais e de ser o seu conjunto potência são (respectivamente) ω e $\mathscr{P}(\omega)$. Se tomarmos no teorema anterior $X = \omega \cup \{\omega\} \cup \{\mathscr{P}(\omega)\}$, conclui-se que existe uma subestrutura elementar de $(V_{\omega+\omega}, \in)$ que tem cardinalidade *numerável* e tal que $\omega \cup \{\omega\} \cup \{\mathscr{P}(\omega)\}$ é subconjunto do domínio desta estrutura. Por definição, o domínio desta subestrutura é um subconjunto numerável A de $V_{\omega+\omega}$, a interpretação do sinal de pertença é a relação de pertença e, por construção, $\omega \subseteq A$, $\omega \in A$ e $\mathscr{P}(\omega) \in A$. Denotamos esta subestrutura por $(A, \in)$: vem $(A, \in) \preccurlyeq (V_{\omega+\omega}, \in)$. Ora, no domínio A da estrutura $(A, \in)$ existe um único elemento que satisfaz a definição formal de ser o conjunto dos números naturais: por elementaridade, este elemento é ω. Tem-se, $\{a \in A : \models_{(A,\in)} a \in \omega\} = \{a \in A : a \in \omega\} = \omega \cap A = \omega$. Em $(A, \in)$ existe também um único elemento que satisfaz a definição formal de ser o conjunto potência dos números naturais. Novamente por elementaridade, este elemento é $\mathscr{P}(\omega)$. Ora,

$$\{a \in A : \models_{(A,\in)} a \in \mathscr{P}(\omega)\} = \{a \in A : \ a \in \mathscr{P}(\omega)\} = \mathscr{P}(\omega) \cap A$$

e, portanto, este conjunto é numerável. Ora, como é bem sabido, em teoria de conjuntos demonstra-se que o conjunto dos números naturais ω não está em bijecção com o seu conjunto potência $\mathscr{P}(\omega)$ (teorema de Cantor). A situação causa alguma perplexidade mas não é paradoxal. Certamente que a estrutura $(A, \in)$ não tem no seu domínio A nenhum elemento que satisfaça a propriedade formal de ser uma bijecção entre ω e o *seu* $\mathscr{P}(\omega)$. Note-se que os elementos (em A) deste *seu* $\mathscr{P}(\omega)$ são exatamente os subconjuntos de ω que estão em A. Mas, é claro, existe uma bijecção *fora* do modelo entre ω e $\mathscr{P}(\omega) \cap A$. Dito de um modo mais pitoresco: do ponto de vista de quem vive em $(A, \in)$, ω e o *seu* $\mathscr{P}(\omega)$ não estão em bijeção; porém, do ponto de vista de observadores de fora, esses dois conjuntos são equipotentes.

Apesar de não ser realmente uma antinomia, o paradoxo de Skolem mostra que as noções de cardinalidade não são, se assim o podemos dizer, *absolutas* quando caracterizadas através do cálculo de predicados com igualdade. São *relativas* ao universo ambiente de conjuntos em que nos encontramos.