EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
FOLHA E

FERNANDO FERREIRA

MARÇO DE 2017

(1) Uma classe $\mathcal{C}$ de estruturas do cálculo de predicados numa dada linguagem $\mathcal{L}$ diz-se *elementar* se existir uma teoria T tal que $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os modelos de T.

Considere a $\mathcal{L}$ linguagem pura do cálculo de predicados com igualdade.

(a) Dado n um número natural não nulo, mostre que a classe das estruturas finitas de $\mathcal{L}$ com exactamente n elementos é elementar.

(b) Mostre que a classe das estruturas infinitas de $\mathcal{L}$ é elementar.

(c) Mostre que a classe das estruturas finitas de $\mathcal{L}$ não é elementar.

(d) Mostre que a classe das estruturas infinitas de $\mathcal{L}$ não é uma *classe elementar básica*, i.e., não existe uma fórmula fechada ϕ tal que uma estrutura $\mathfrak{M}$ é infinita sse $\models_{\mathfrak{M}} \phi$.

(2) Considere a linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo de predicados com igualdade com apenas uma constante 0 e um símbolo funcional unário S. Seja S a teoria com os axiomas (1) $\forall x(S(x) \neq 0)$, (2) $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \to x = y)$ e o axioma esquema de indução para cada fórmula da linguagem $\mathcal{L}$.

(a) Mostre que (3) $\mathsf{S} \models \forall x(x \neq 0 \to \exists y(S(y) = x))$.

(b) Mostre que, para cada natural n, se tem (4_n) como abaixo

$$\mathsf{S} \models \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \, (S(x_0) \neq x_1 \vee S(x_1) \neq x_2 \vee \cdots \vee S(x_n) \neq x_0).$$

(c) Mostre que S é $\aleph_1$-categórica e, portanto, completa.

(d) Mostre que a teoria S também se pode axiomatizar por (1), (2), (3) e o esquema (4_n).

(3) Seja $(\mathcal{M})_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de interpretações duma dada linguagem do cáculo de predicados com igualdade. Suponha que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura de $\mathcal{M}_{i+1}$. Define-se a estrutura $\mathcal{M}_\infty$ de acordo com as seguintes especificações:

i. $|\mathcal{M}_\infty| = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} |\mathcal{M}_i|$.

ii. $R^{\mathcal{M}_\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^{\mathcal{M}_i}$, para os símbolos relacionais R da linguagem.

iii. $f^{\mathcal{M}_\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{\mathcal{M}_i}$, para os símbolos funcionais f da linguagem (aqui, as funções são encaradas como conjuntos de pares ordenados).

iv. $c^{\mathcal{M}_\infty} = c^{\mathcal{M}_0}$, para as constantes c da linguagem.

a) Mostre que a estrutura $\mathcal{M}_\infty$ está bem definida e que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura de $\mathcal{M}_\infty$.

b) Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas Π_2. Admita que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é modelo de Γ. Mostre que $\mathcal{M}_\infty$ é modelo de Γ.

c) Admita que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura elementar de $\mathcal{M}_{i+1}$. Mostre que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura elementar de $\mathcal{M}_\infty$.