49. Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ munido de produto interno $(\cdot\,|\,\cdot)$. Seja $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ base de V. Seja $G_{\mathcal{B}}$ a matriz cuja entrada (i,j) é $(e_j|e_i)$, $i,j=1,\cdots,n$. Se $x\in V$ denotemos por $[x]_{\mathcal{B}}$ o vector (em $\mathbb{C}^{n\times 1}$) das componentes de x na base $\mathcal{B}$.

(a) Mostre que se $x,y\in V$ então

$$(x|y)=\overline{[y]_{\mathcal{B}}}^{\mathrm{T}}\,G_{\mathcal{B}}\,[x]_{\mathcal{B}}.$$

(b) Seja $\mathcal{B}'=(e_1',\cdots,e_n')$ outra base de V. Mostre que

$$G_{\mathcal{B}'}=\overline{P}^{\mathrm{T}}G_{\mathcal{B}}P,$$

onde $P=M(\mathrm{id};\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

(c) Mostre que $G_{\mathcal{B}}$ é invertível e que $G_{\mathcal{B}}=\overline{G_{\mathcal{B}}}^{\mathrm{T}}$.

50. Determine a matriz transconjugada, $X^*=\overline{X}^{\mathrm{T}}$, para cada uma das matrizes X seguintes:

(a) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\-1&4&5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$; (b) $B=\begin{bmatrix}1-i&2&-1\\-i&-3&-4i\\\sqrt{2}&0&-2-5i\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$;

(c) $C=\begin{bmatrix}1&-2+i&-5&-i\sqrt{2}\\-2-i&0&\frac{1}{3}&-i\\-5&\frac{1}{3}&-27&4-3i\\i\sqrt{2}&i&4+3i&-201\end{bmatrix}$.

51. Diga se as matrizes seguintes pertencem: à classe das matrizes normais; à classe das matrizes hermíticas; à classe das matrizes unitárias;

(a) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$; (b) $B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{-1+i}{2}&\frac{1-i}{2}\end{bmatrix}$; (c) $C=\begin{bmatrix}1&-2+i&-5&-i\sqrt{2}\\-2-i&0&\frac{1}{3}&-i\\-5&\frac{1}{3}&-27&4-3i\\i\sqrt{2}&i&4+3i&-201\end{bmatrix}$.

52. (a) Mostre que se $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ e $k\in\mathbb{N}$ então $(A^*)^k=(A^k)^*$.

(b) Mostre que se $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ é normal então A^k também é normal, para qualquer $k\in\mathbb{N}$.

(c) Mostre que se $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ é normal e invertível então A^{-1} também é normal.

53. A matriz $K\in\mathbb{C}^{n\times n}$ chama-se *anti-hermítica* se $K^*=-K$. Se $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, mostre que existem $H,K\in\mathbb{C}^{n\times n}$ tais que H é hermítica, K é anti-hermítica e $A=H+K$.

54. Determine $Q,T\in\mathbb{C}^{3\times3}$ tais que Q é unitária, T é triangular superior e

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&2&-1\\6&0&4\end{bmatrix}=Q^*TQ.$$

55. Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Tomamos $\mathbb{C}^{n\times1}$ com o seu produto interno canónico, $(\cdot\,|\,\cdot)$.

(a) Mostre que se λ é valor próprio de A então $\overline{\lambda}$ é valor próprio de A^*.

(b) Mostre que se A é normal então se tem $\|Ax\|=\|\mathrm{A}^*x\|$, $\forall x\in\mathbb{C}^{n\times1}$.

(c) Mostre que se A é normal e $\lambda\in\mathbb{C}$ então $A-\lambda I_n$ é normal.

(d) Mostre que se A é normal e se $v\in\mathbb{C}^{n\times1}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio $\lambda\in\mathbb{C}$ então v é vector próprio de A^* associado a $\overline{\lambda}$.

(e) Suponha que A é normal e que $v_1,v_2\in\mathbb{C}^{n\times1}$ são vectores próprios de A associados a valores próprios distintos. Mostre que $(v_1|v_2)=0$.

DMFCUL, ALGA II
2º Semestre 2016/2017 Exercícios - Folha 8

56. Para cada uma das matrizes seguintes determine uma base ortonormada de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ou $\mathbb{R}^{3\times 1}$, (ambos com respeito ao produto interno canónico) formada por vectores próprios da matriz bem como uma decomposição espectral da matriz (ou seja, $A = Q^*\Delta Q$, Q unitária, Δ diagonal).
(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; (b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; (d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

57. Para cada uma das matrizes A calcule matrizes B, simétricas reais, tais que $B^2 = A$.
(a) $A = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ (determine 2 matrizes). (b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$ (determine 3 matrizes)
(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (determine 3 matrizes).

58. Diga se as seguintes formas quadráticas são ou não definidas positivas (semidefinidas positivas):
(a) $f(X_1, X_2) = 3X_1^2 - 2X_1X_2 + 3X_2^2$, em $\mathbb{R}^2$;
(b) $f(X_1, X_2, X_3) = 5X_1^2 + 2X_1X_2 - 10X_1X_3 + 5X_2^2 - 10X_2X_3 + 11X_3^2$, em $\mathbb{R}^3$;
(c) $f(X_1, X_2, X_3) = 27X_1^2 - 18X_1X_2 - 18X_1X_3 + 9X_2^2 + 18X_2X_3 + 9X_3^2$, em $\mathbb{R}^3$.

59. Determine uma solução real para cada uma das seguintes equações:
(a) $7X_1^2 - 10X_1X_2 - 10X_1X_3 + X_2^2 + 2X_2X_3 + X_3^2 = -6$;
(b) $7X_1^2 - 10X_1X_2 - 10X_1X_3 + X_2^2 + 2X_2X_3 + X_3^2 = 6$;
(c) $-X_1^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3 - X_2^2 - 2X_2X_3 - X_3^2 = 2$;
(d) $-X_1^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3 - X_2^2 - 2X_2X_3 - X_3^2 = -2$ (2 soluções (X_1, X_2, X_3) que sejam linearemente independentes)

60. Seja $f(X_1, \cdots, X_n)$ uma forma quadrática de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ associada à matriz simétrica A. Diz-se que f é semidefinida negativa (definida negativa) se

$$f(a_1, \cdots, a_n) \leq 0 \ (<0), \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

(a) Mostre que f é semidefinida negativa (definida negativa) se e só se $-f$ é semidefinida positiva (definida positiva).
(b) Mostre que f é semidefinida negativa se e só se todos os valores próprios de A são menores ou iguais a zero.
(c) Mostre que f é definida negativa se e só se

$$(-1)^t \det A_t = (-1)^t \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tt} \end{bmatrix} > 0, \ t = 1, \cdots, n$$

61. Sem determinar os valores próprios determine os sinais dos valores próprios das matrizes:
(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; **(b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

62. Seja A uma matriz hermítica definida positiva. Mostre que existe T triangular superior, (com as entradas diagonais em $\mathbb{R}_{>0}$) tal que $A = T^*T$. (A *decomposição de Cholesky de* A).