

Projecto de Engenharia Geográfica



Sumário

- Formatos de dados
- Redes Triangulares
- Redes regulares
- Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay;
- Métodos de interpolação e/ou estimação
- Produtos e aplicações

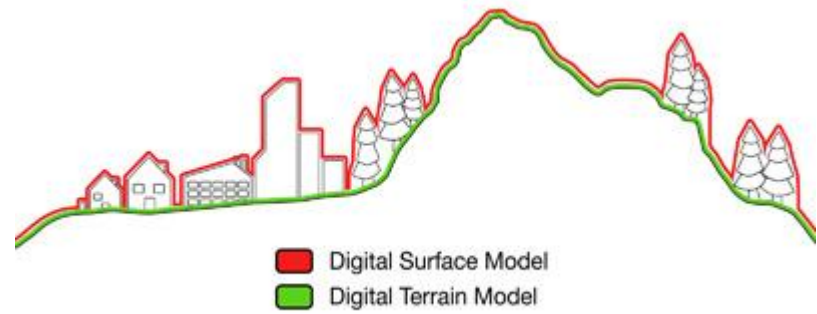
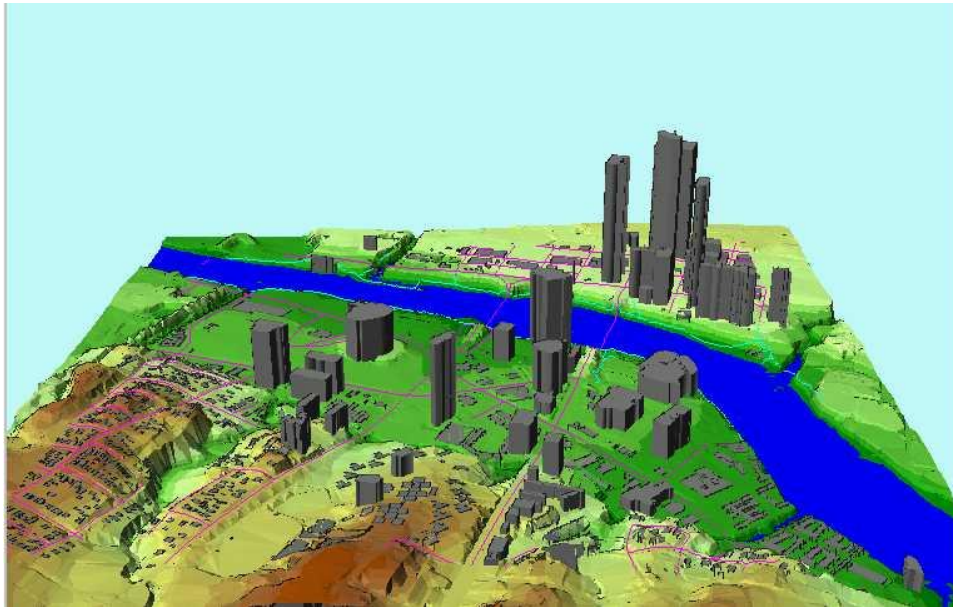
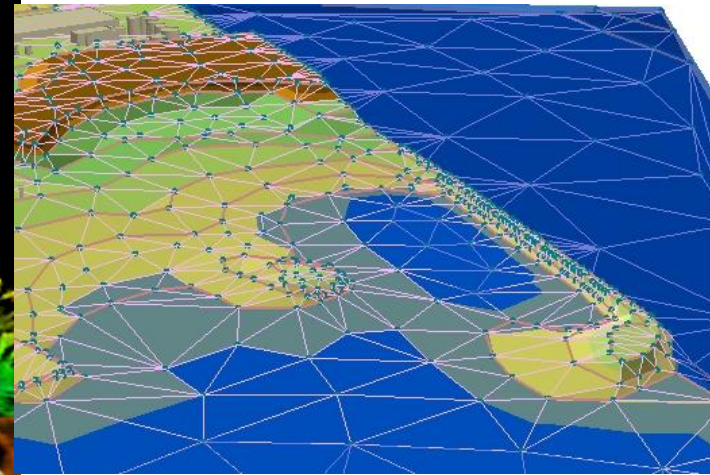
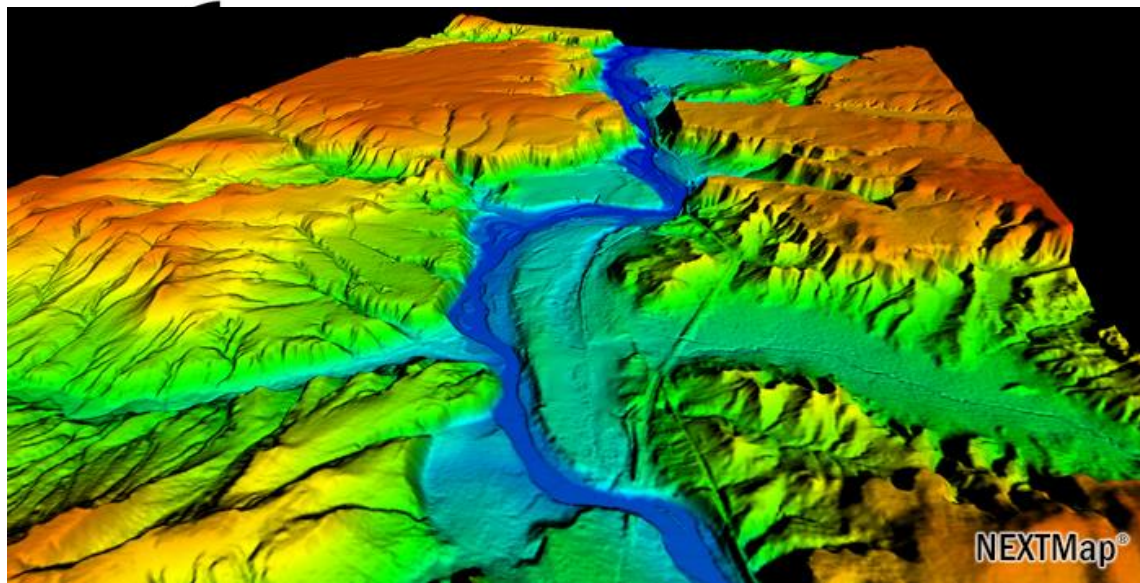
O que é um MDT?

Um Modelo Digital do Terreno é uma estrutura computacional de dados que representa a forma e relevo de uma região.

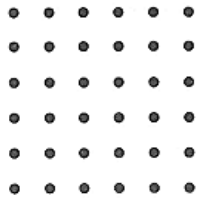
O modelo pode ser definido por:

redes retangulares, redes triangulares e contornos.

Outros termos são por vezes utilizados em lugar de MDT, como por exemplo, Modelo Digital de Elevação (MDE) ou Altimétrico (MDA) ou Modelo Numérico do Terreno (MNT) ou Modelo Digital de Superfície (MDS).



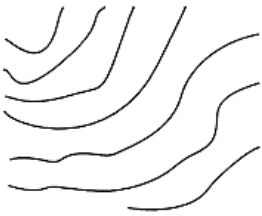
Sampling points/lines



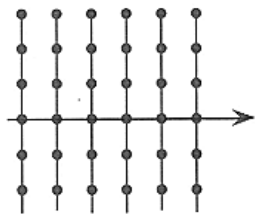
(a) Grid Points



(b) Random Points

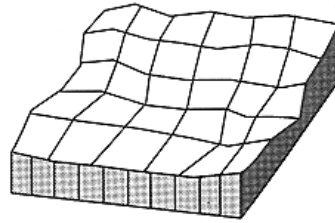


(c) Contour Lines

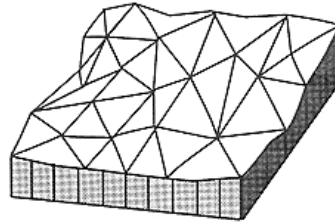


(d) Profile

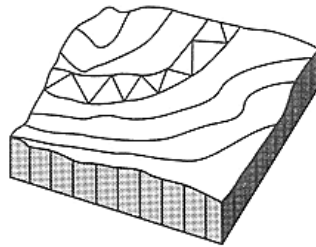
DEM



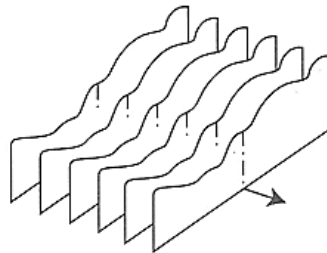
Bi - Linear Model



TIN Model



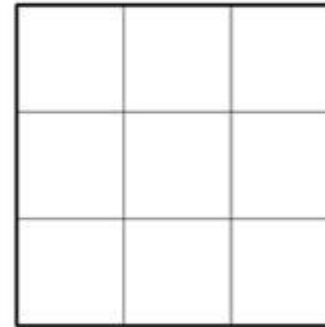
TIN model with Contours



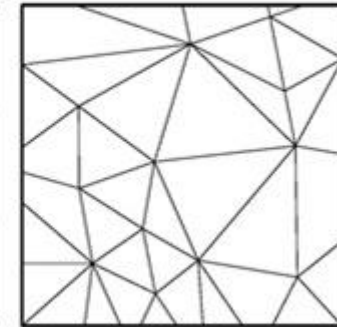
Bi - Linear or TIN Model

DEM

DTM



DEM (Grid)



DTM (Triangles)



É um ficheiro com a altitude da superficie topográfica (MDT), podendo incluir a altitude dos elementos sobre a superficie (MDS).

Como construir um MDT?

Como obter uma superfície bidimensional que aproxime da melhor forma um conjunto de pontos distribuído irregularmente no plano?

A construção de um MDT está estritamente relacionada com a interpolação de uma superfície bidimensional

Formulação do problema

Dados N pontos (x_i, y_i) e N números f_i $i=1,2,\dots,N$, encontrar uma função $f(x,y)$ de uma determinada classe e definida em todo o plano (pelo menos numa região que contenha todos os pontos) para a qual $f(x,y) = f_i$ para $i=1,2,\dots,N$.

Métodos de Interpolação

Não é possível a obtenção de uma solução analítica para a representação do relevo, por isso, a construção do MDT pode ser encarada matematicamente como um problema de interpolação de uma superfície bidimensional.

A interpolação é o procedimento segundo o qual se faz a estimação de valores desconhecidos de pontos da amostra, através de valores conhecidos na sua vizinhança.

Existem duas grandes classes de métodos de interpolação:

Globais

Locais

Métodos de Interpolação

Os **métodos globais** ajustam uma determinada função ao conjunto dos dados de tal forma que todos os pontos pertencem à superfície.

Embora os métodos globais pareçam ideais, pois todos os pontos são interpolados, a quantidade de memória que necessitam é demasiado grande quando se lidam com conjuntos de muitos milhares de pontos, pelo que apenas se utilizam para pequenos conjuntos de pontos.

Exemplos: Series de Fourier, regressão polinomial, mínimos quadrados, etc.

Métodos de Interpolação

Os **métodos locais** de interpolação produzem superfícies contínuas, uma vez que é assumido um efeito autocorrelativo, com a distância ao ponto a ser interpolado. Estes métodos são geralmente sustentados em estruturas de dados triangulares ou rectangulares.

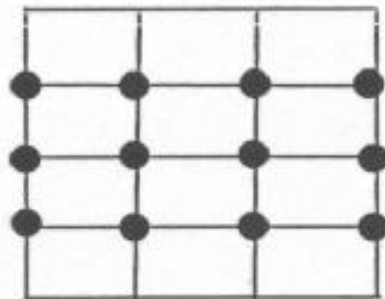
Exemplos: polinomial, Splines, médias móveis, krigging, etc.

Os dados podem provir de:

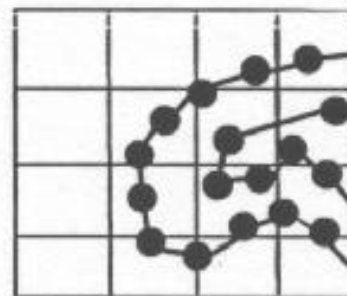
- ☐ Levantamento Topográfico
- ☐ Restituição fotogramétrica;
- ☐ Rasterização da informação e posterior digitalização;

- ☐ Outro meio que nos forneça as coordenadas planimétricas e altitude dos pontos.

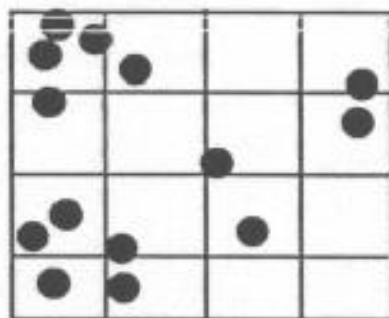
Os dados



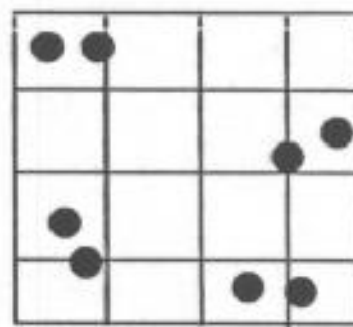
(i)



(ii)

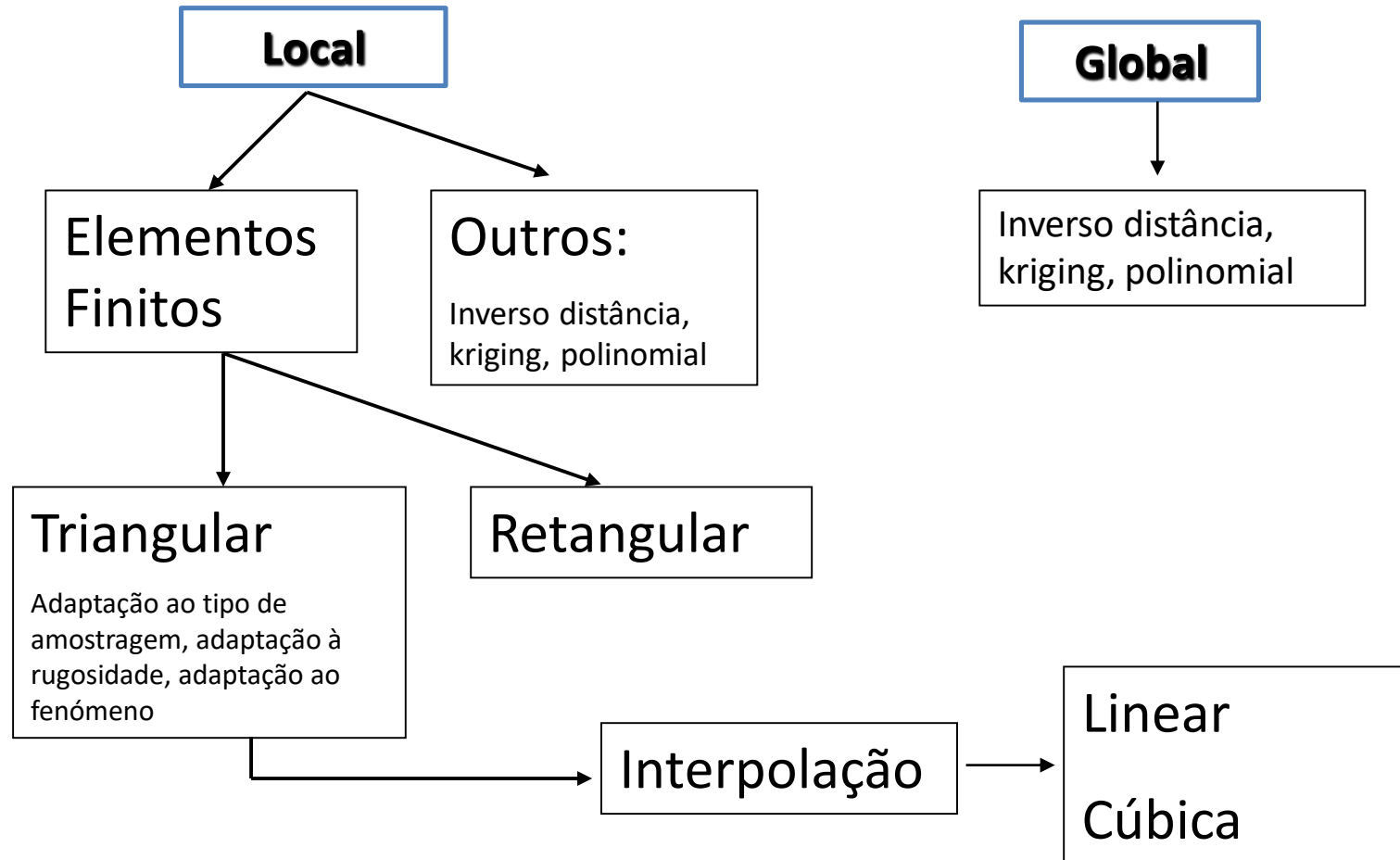


(iii)

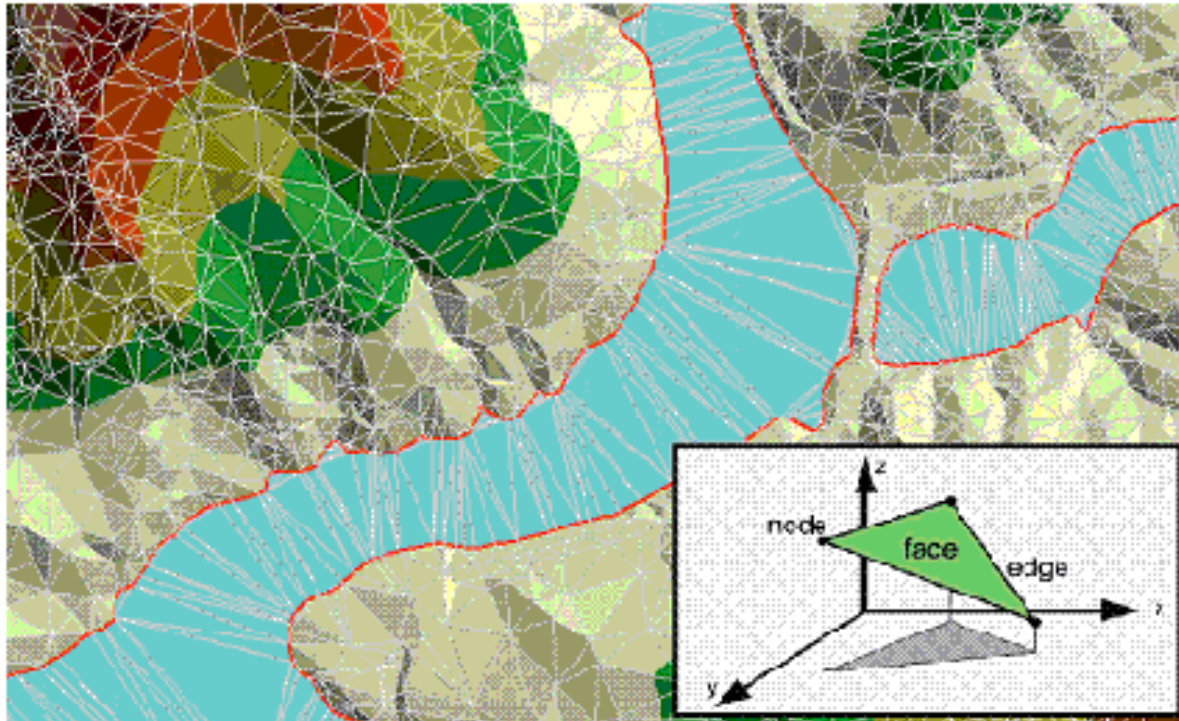


(iv)

Qual o método de interpolação?



Método dos Elementos Finitos



Esta figura ilustra a discretização finito de uma porção da superfície topográfica

Método dos Elementos Finitos

Definição do processo:

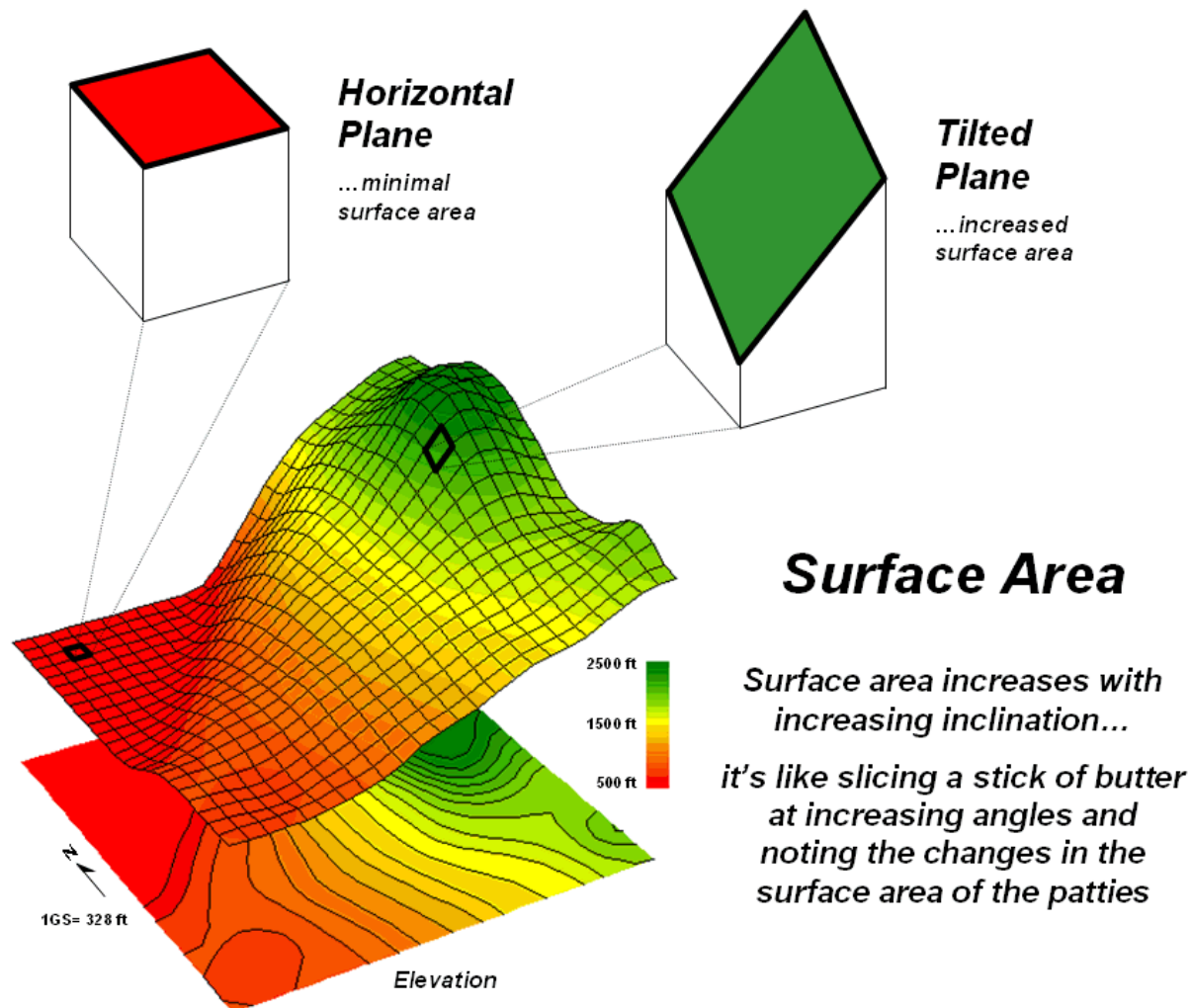
O contínuo é dividido num número finito de partes em que o comportamento de cada um é especificado por um número finito de parâmetros.

Ao contrário do método global, o método dos elementos finitos procede à interpolação localmente, sub-intervalo por sub-intervalo.

Em cada sub-intervalo, A , podemos construir uma interpolação única, a qual é aplicada aos valores (x,y) pertencentes a essa área.

As componentes de cada problema de interpolação em cada sub-intervalo determina um elemento finito.

Método dos Elementos Finitos



Modelo Rectangular (GRID)

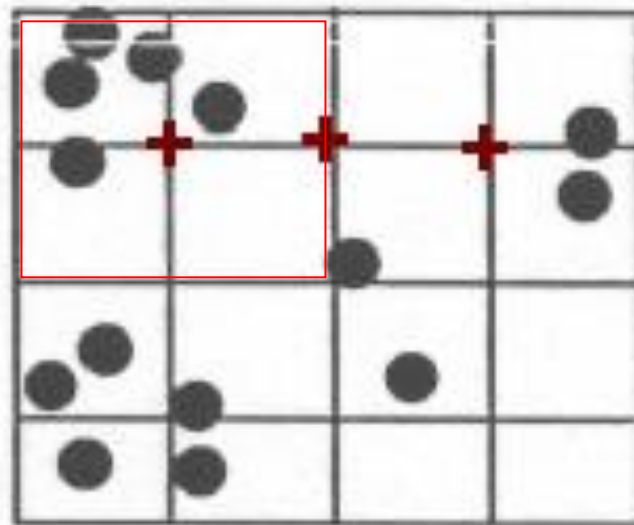
O modelo Retangular consiste numa representação regular do terreno, com pontos espaçados uniformemente, formando uma rede retangular que pode ser mais ou menos precisa atendendo ao número de pontos que a formam.

Quando o modelo retangular está construído, a altitude de qualquer ponto do terreno é fornecido realizando uma interpolação aos pontos do mesmo.

Existem vários tipos de interpolação passíveis de ser utilizadas, destacando-se a interpolação bilinear, splines e polinómios de Bezier.

Modelo Rectangular (GRID)

Os valores da função nos pontos da grelha (+) são determinados com base nos pontos interiores a cada região rectangular.



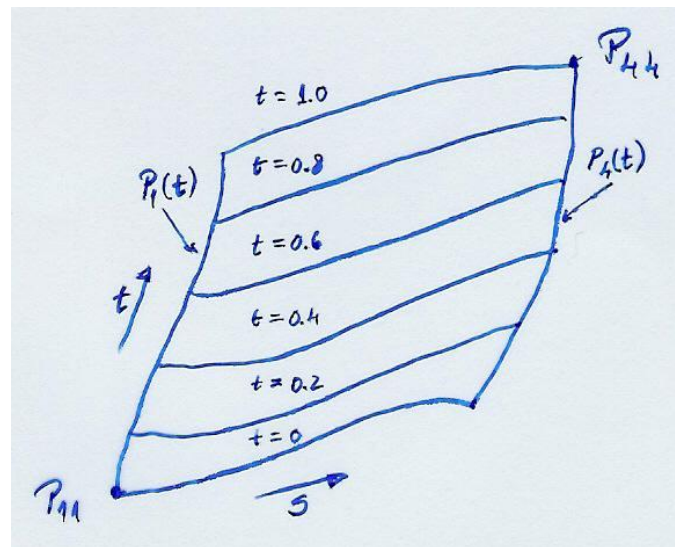
A superfície obtida por esta técnica é bastante suave, apresentando o inconveniente da função não assumir o valor dos elementos da amostra

Interpolação de superfícies

$$\begin{aligned}
 x(s,t) = & a_{11}s^3t^3 + a_{12}s^3t^2 + a_{13}s^3t + a_{14}s^3 \\
 & a_{21}s^2t^3 + a_{22}s^2t^2 + a_{23}s^2t + a_{24}s^2 \\
 & a_{31}st^3 + a_{32}st^2 + a_{33}st + a_{34}s \\
 & a_{41}t^3 + a_{42}t^2 + a_{43}t + a_{44}
 \end{aligned}$$

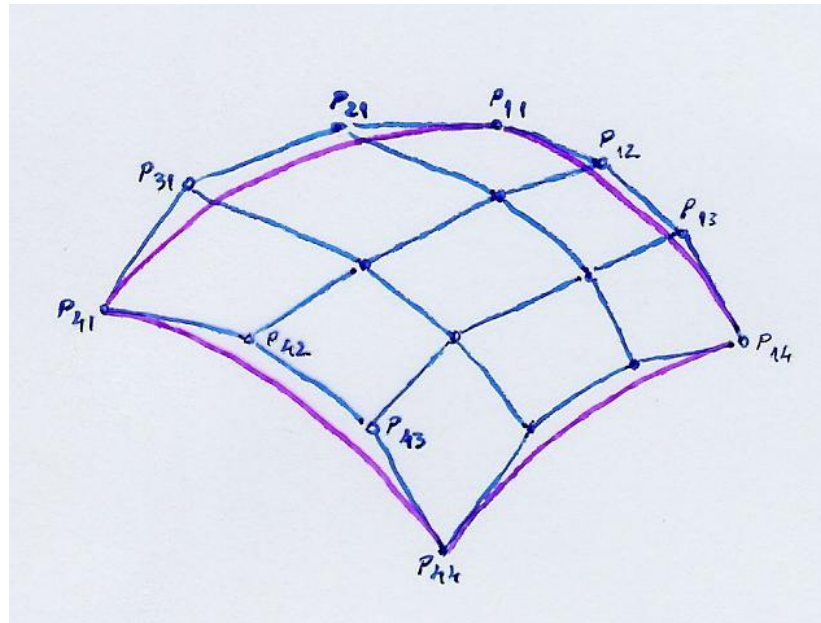
Matricialmente:

$$x(s,t) = S \cdot C_x \cdot T^T$$



Superfícies de Bezier

$$x(s,t) = S \cdot M_b \cdot P_x \cdot M_b^T \cdot T^T$$



$$x(s,t) = S \cdot M_s \cdot P_x \cdot M_s^T \cdot T^T$$

$$P_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = P_{11}; x_2 = P_{12}; \dots x_{16} = P_{44}$$

Outros processos de interpolação

Kriging

Mínima curvatura

Vizinho mais próximo

Inverso da distância

Modelo Triangular

A importante aplicação que as redes triangulares têm na análise numérica conduziu ao desenvolvimento de um elevado número de métodos de representação triangular da superfície.

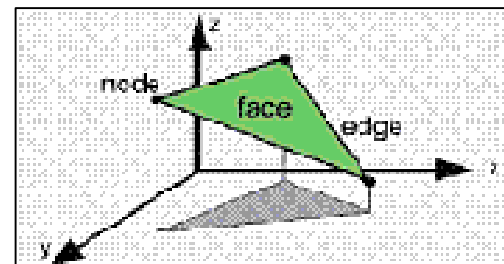
A divisão do plano em triângulos é obtida ligando cada 3 pontos vizinhos a um triângulo. Cada triângulo fica referenciado aos três triângulos vizinhos estabelecendo-se assim uma relação de vizinhança entre pontos da rede.

Rede Triangular Regular

Neste tipo de rede os triângulos estão distribuídos regularmente no plano, permitindo a interpolação no seu interior por B-splines.

Poder-se-á adotar, como alternativa aos B-splines, a interpolação bilinear em função dos três vértices do triângulo:

$$z = f(x,y) = ax + by + c$$



Os três coeficientes a , b , c são obtidos por resolução de um sistema de 3 equações, correspondentes aos 3 pontos do triângulo.

Rede Triangular Irregular (TIN)

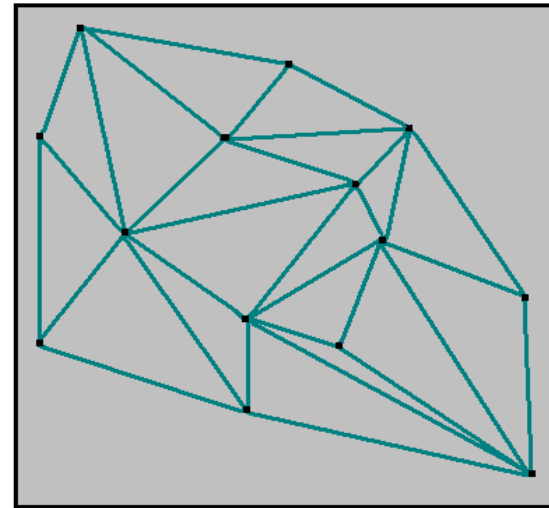
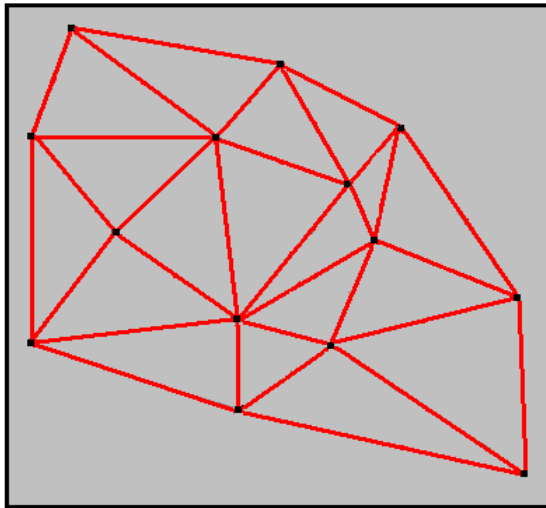
Esta rede é representada por um conjunto de triângulos que ligam pontos da superfície de forma contínua, distribuídos irregularmente no plano.

Este tipo de rede permite descrever todos os tipos de superfícies.

Definição: Designamos por melhor triangulação a que contiver o maior número de triângulos equiláteros.

Rede Triangular Irregular (TIN)

Existem vários métodos para gerar uma rede triangular, a partir de pontos no plano o que conduz à obtenção de redes triangulares diferentes para o mesmo conjunto de pontos, isto porque, cada método tem um critério diferente para estabelecer a ligação entre os pontos.



Construção da Rede Irregular

Problema 1:

Dados n pontos no plano, pretende-se estabelecer a sua ligação por segmentos que não se intersectem, de forma a que cada região convexa seja um triângulo.

Para que os pontos sejam ligados por segmentos que não se intersectem é necessário estabelecer relações de proximidade entre todos os pontos da rede.

Construção da Rede Irregular

O problema de proximidade entre pontos do plano pode ser enunciado da seguinte forma:

Dado um conjunto S de pontos no plano, para cada ponto p_i em S , qual é o lugar de pontos (x,y) no plano mais próximo de p_i que de qualquer outro de S ?

A solução deste problema, percebe-se intuitivamente, é a partição do plano em regiões, em que cada região é o lugar dos pontos (x,y) mais próximos de um ponto de S e somente deste ponto.

Polígono de Voronoi

Dados dois pontos p_i e p_j , o conjunto de pontos mais próximo de p_i que de p_j é o semi – plano que contém p_i definido pela perpendicular que bissecta o segmento $p_i p_j$. O semi – plano será designado por $H(p_i, p_j)$.

O polígono de Voronoi associado a p_i , representado por $V(p_i)$, é o lugar dos pontos mais próximos de p_i que de qualquer outro ponto, ou seja, é a intersecção de $n-1$ semi – planos e é um polígono convexo com menos de $n-1$ lados:

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i p_j)$$

Diagrama de Voronoi

A partição do plano em n regiões convexas é conhecida como Diagrama de Voronoi, representado por $\text{Vor}(s)$, ou Dirichelet ou Wigner-Seitz ou Thiessen. Os vértices deste diagrama são os vértices de Voronoi e os segmentos são os segmentos de Voronoi.

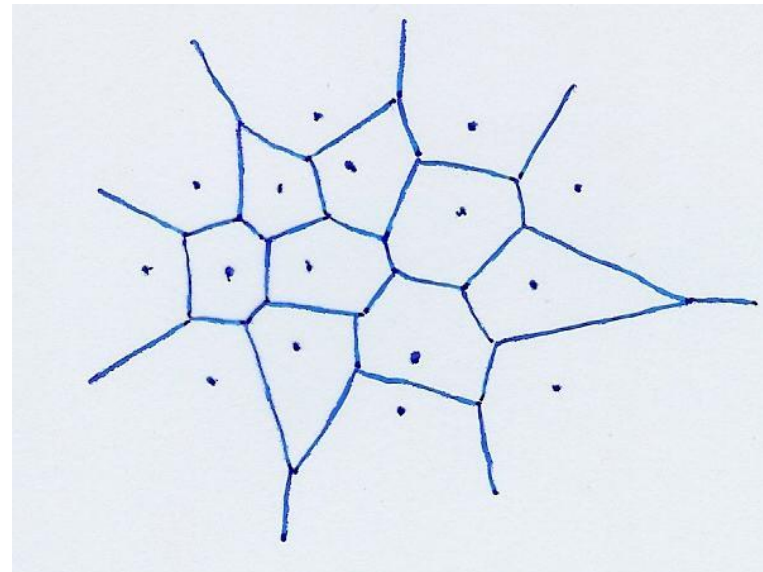
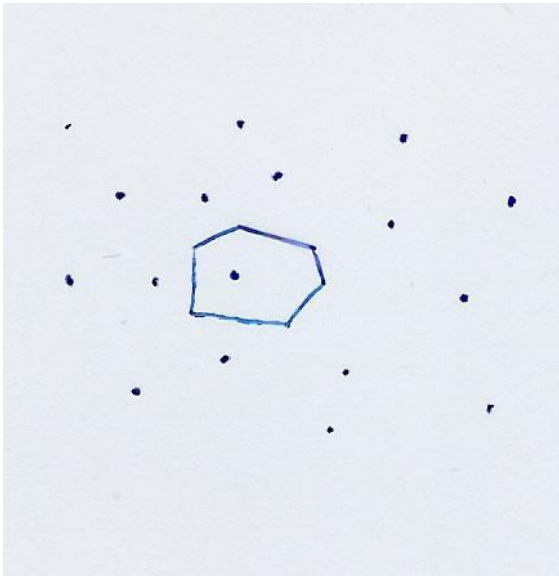


Diagrama de Voronoi - propriedades

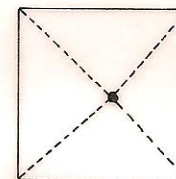
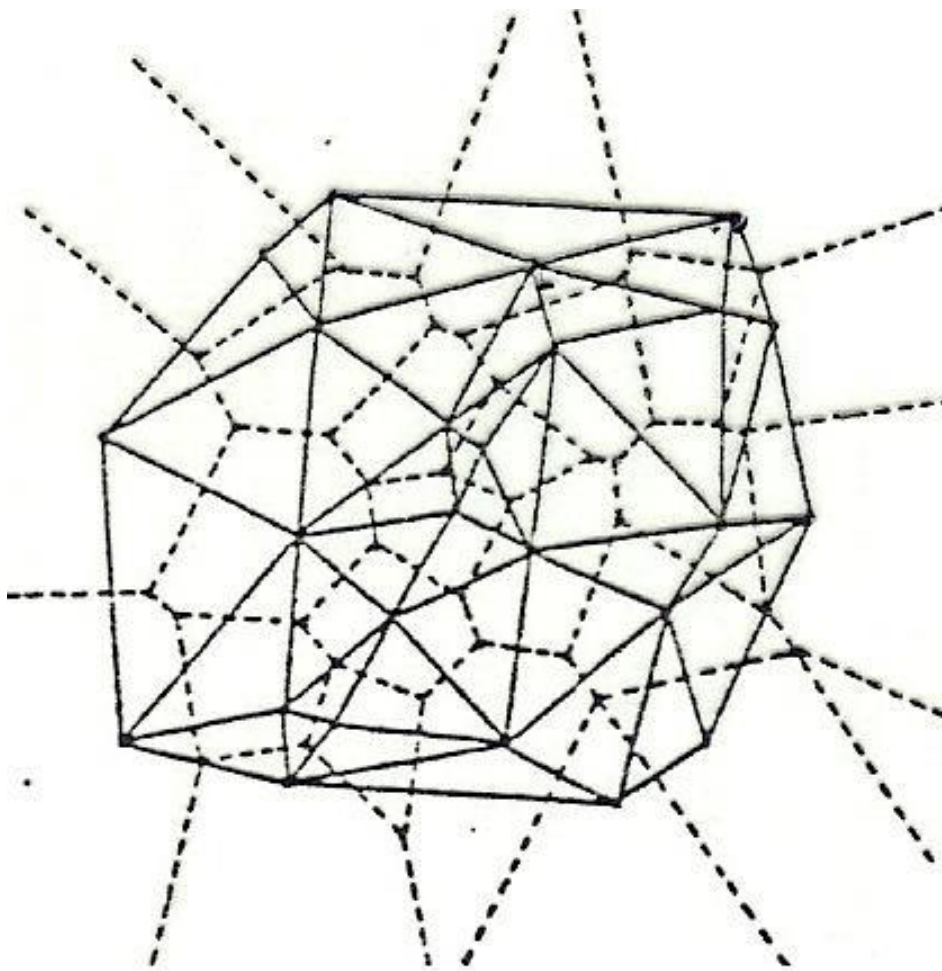
Se considerarmos o dual do diagrama de Voronoi, ou seja, o grafo no plano obtido pela união de pares de pontos de S que partilham um segmento de Voronoi. O resultado é um grafo sobre os n pontos originais.

O grafo dual do diagrama de Voronoi é uma triangulação de S . Portanto, o diagrama de Voronoi pode ser usado para resolver a triangulação no plano.

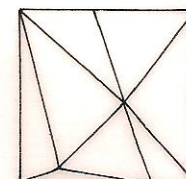
Teorema Delaunay:

O diagrama de Voronoi conduz-nos, por ligação de pontos de células vizinhas, a uma triangulação de S .

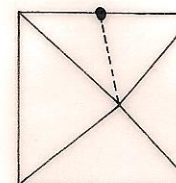
Triangulação Delaunay



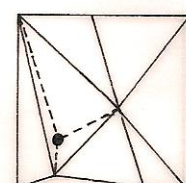
a)



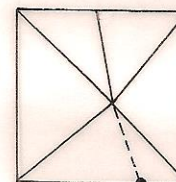
e)



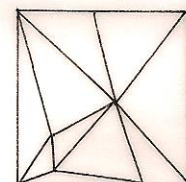
b)



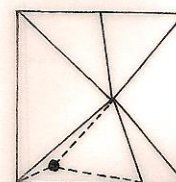
f)



c)

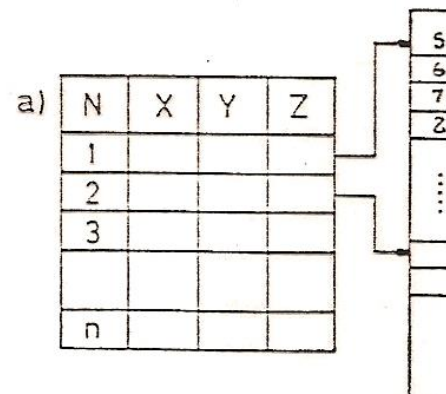
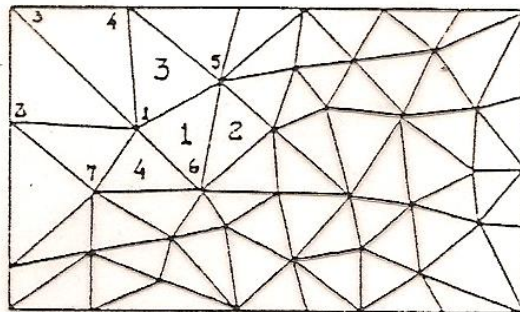


g)



d)

Estrutura dos dados



b)

	N	X	Y	Z
1	.	.	.	
.				
.				
n				

Segmentos

S	P ₁	P ₂	T ₁	T ₂
1	5	6	1	2
2	1	5	3	1

c)

N	X	Y	Z
1	.	.	.
.			
.			
n			

Triângulos

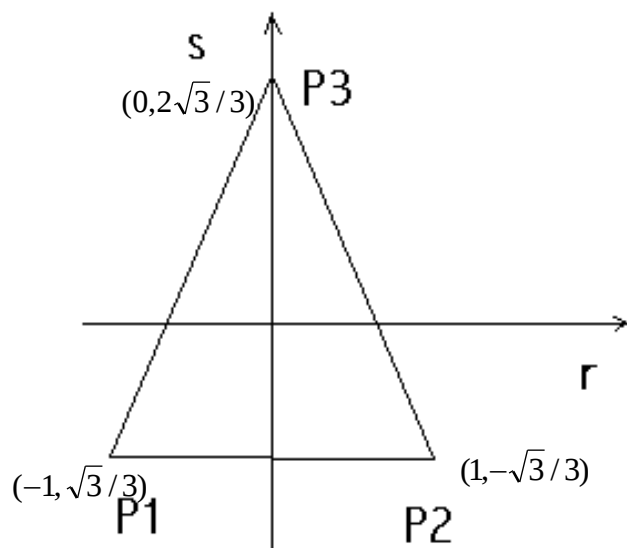
T	S ₁	S ₂	S ₃
1	1	2	3
.			
.			
t			

T	P ₁	P ₂	P ₃	T ₁	T ₂	T ₃
1	1	6	5	4	2	3
.						
.						
t						

Interpolação

- Funções de forma bilineares;
- Funções de forma não lineares;
- Funções de forma de Zienkiewicz;
- Funções de forma de Clough – Tocher.

Coordenadas naturais



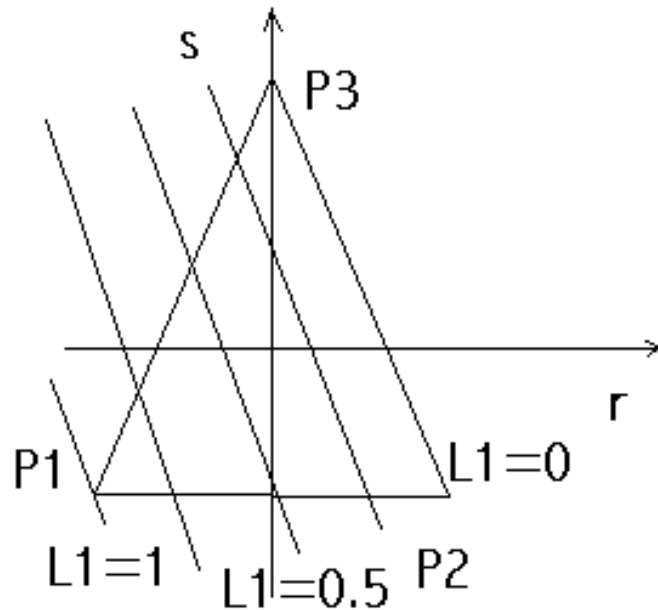
$$z = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{3}/3 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3}/3 \\ 1 & 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1/6 (-3r - \sqrt{3}s + 2) \\ 1/6 (3r - \sqrt{3}s + 2) \\ 1/3 (\sqrt{3}r + 1) \end{bmatrix}$$

$$z = \sum_{i=1}^3 N_i f_i$$

Coordenadas areais



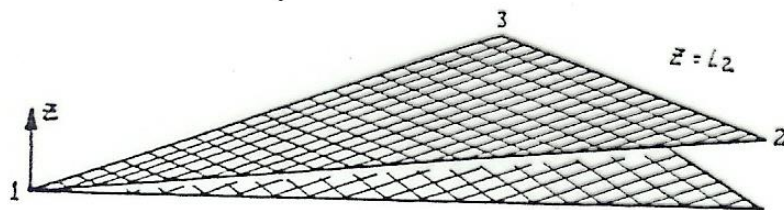
$$\begin{cases} x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\ L_1 + L_2 + L_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = (a_1 + b_1x + c_1y) / \Delta \\ L_2 = (a_2 + b_2x + c_2y) / \Delta \\ L_3 = (a_3 + b_3x + c_3y) / \Delta \end{cases}$$

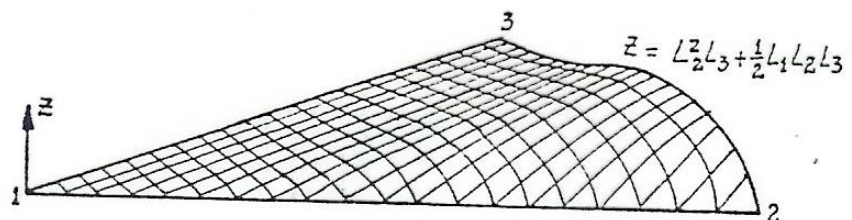
$$\begin{cases} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Funções de forma de Zienkiewicz

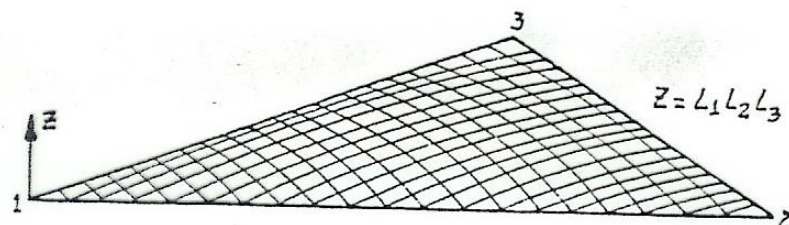


$$z = \sum_{i=1}^9 N_i a_i$$



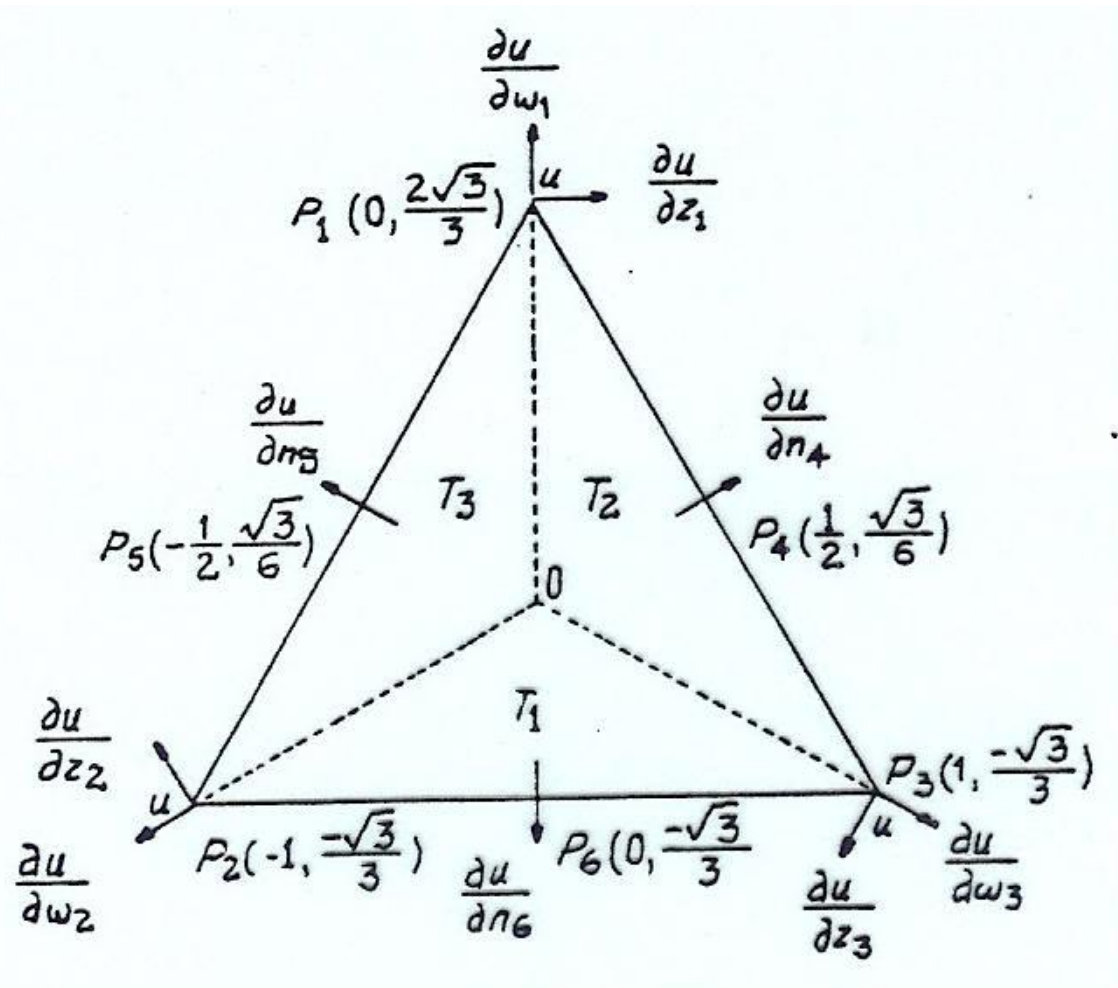
$$a_1 = f(x_1, y_1)$$

$$a_4 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)$$



$$a_7 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)$$

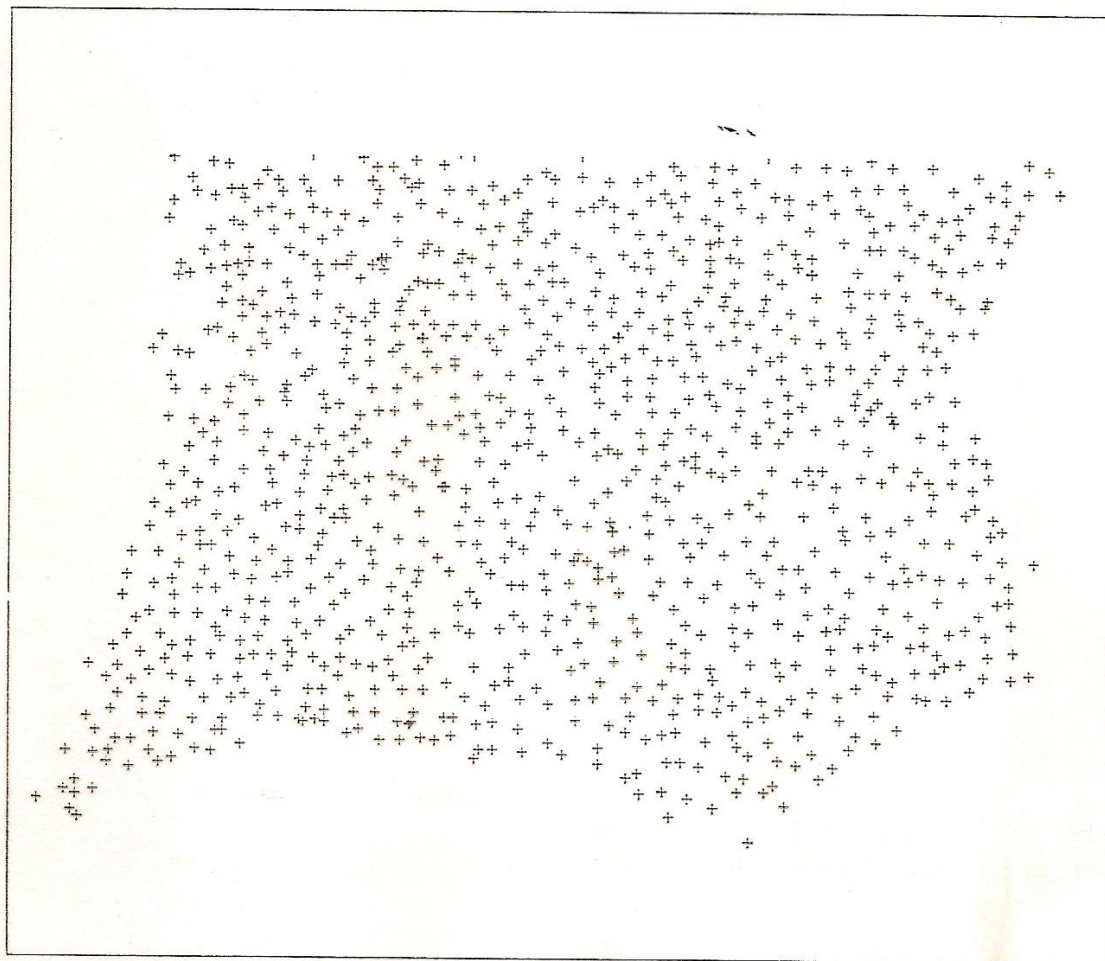
Triângulo de Clough-Tocher



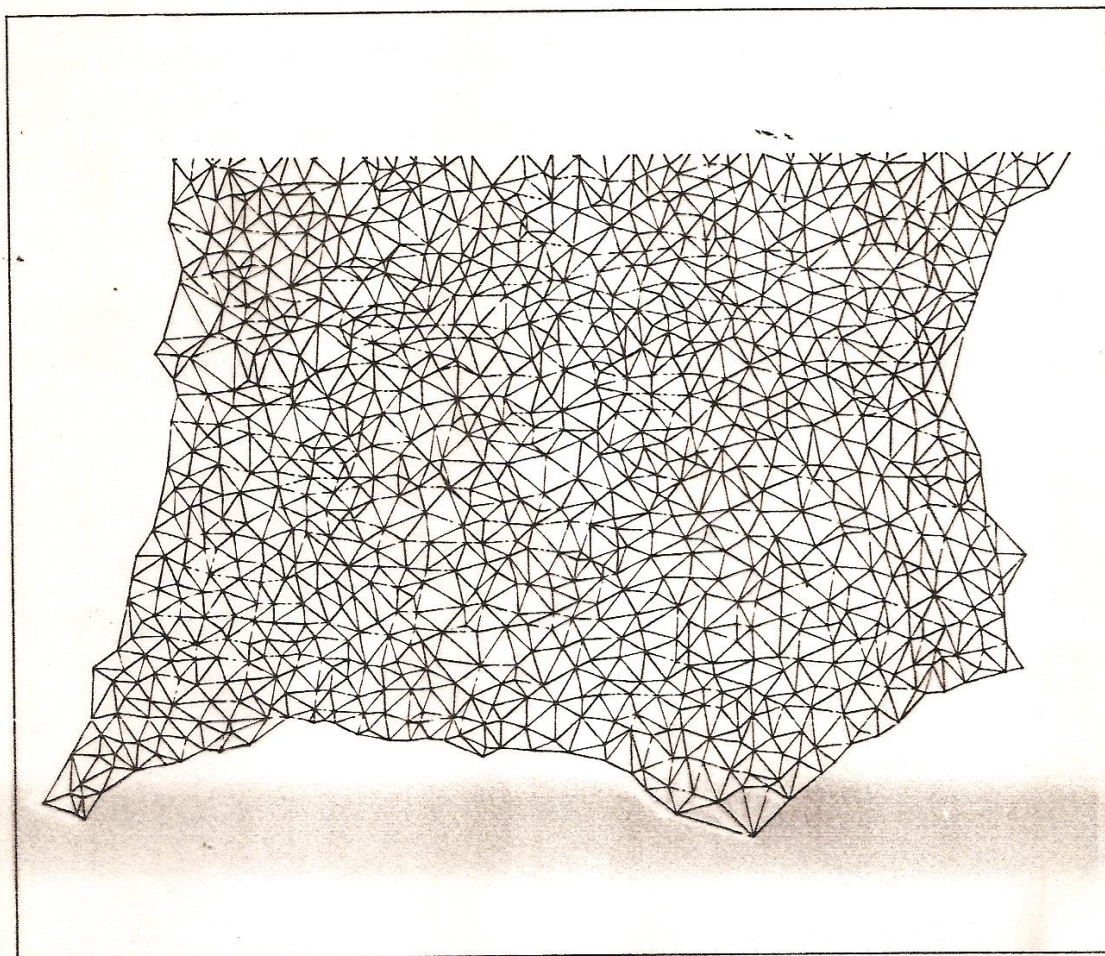
Produtos Derivados

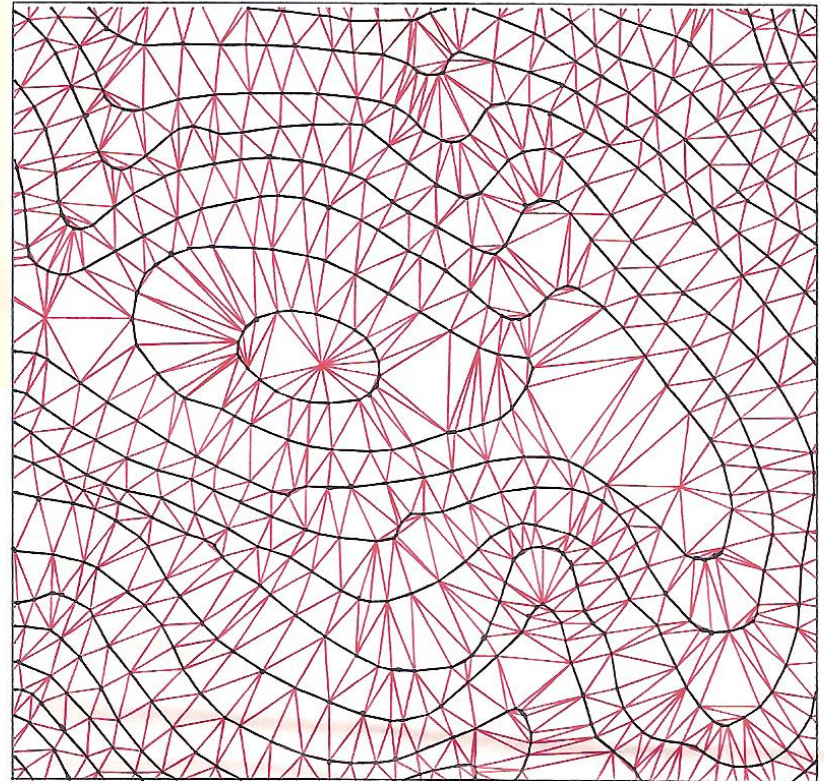
Aplicações

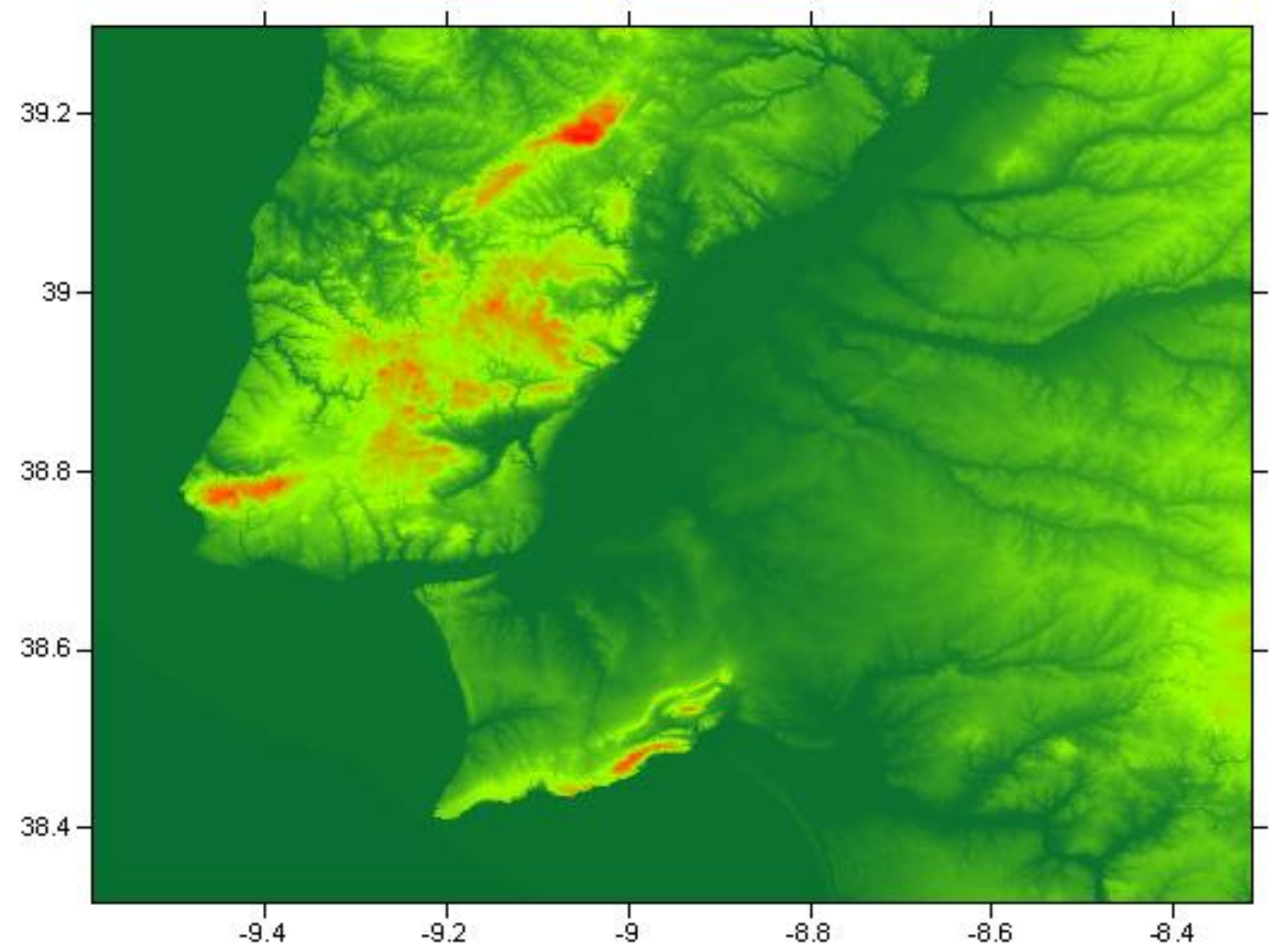
Vértices geodésicos

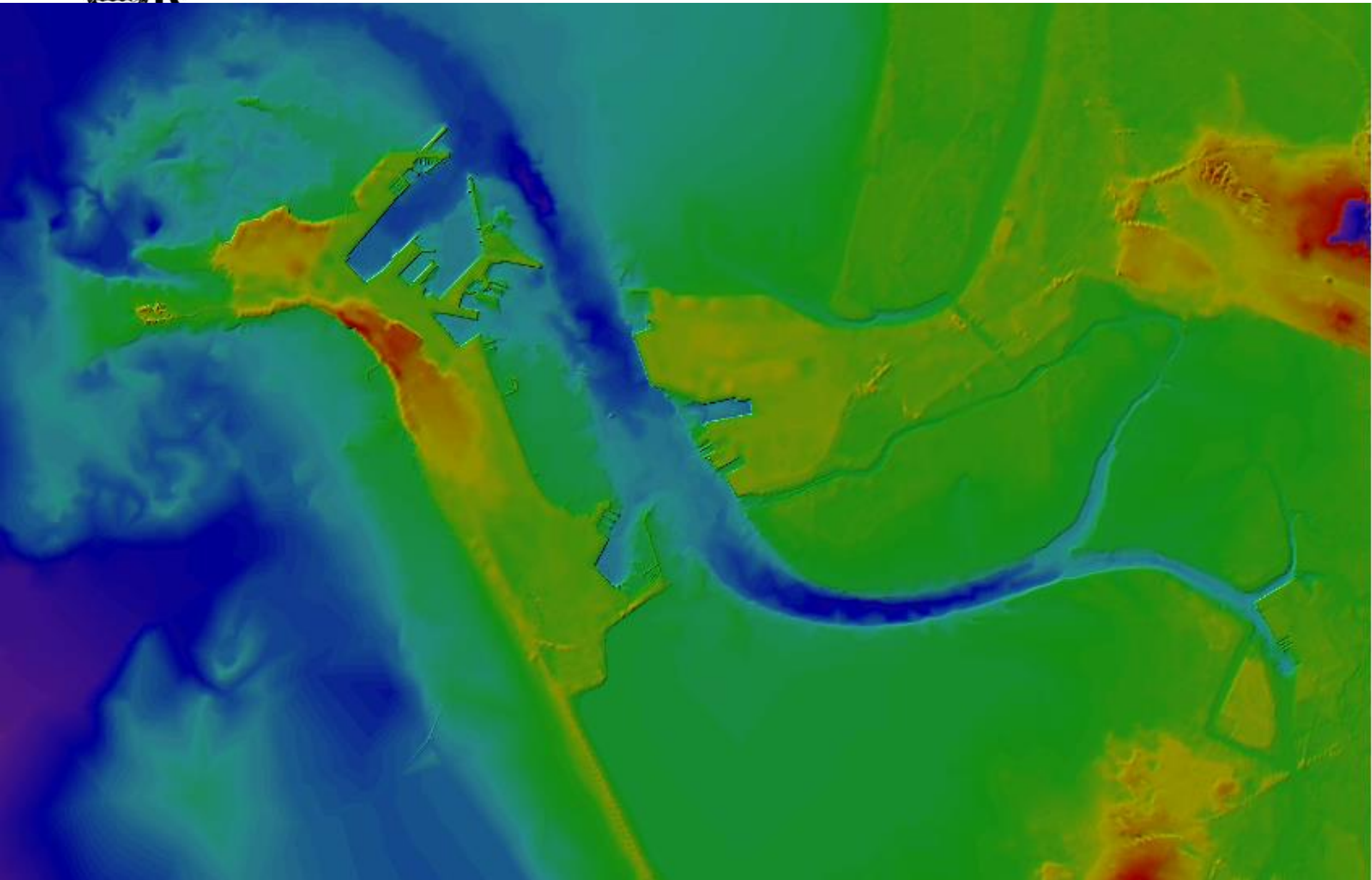


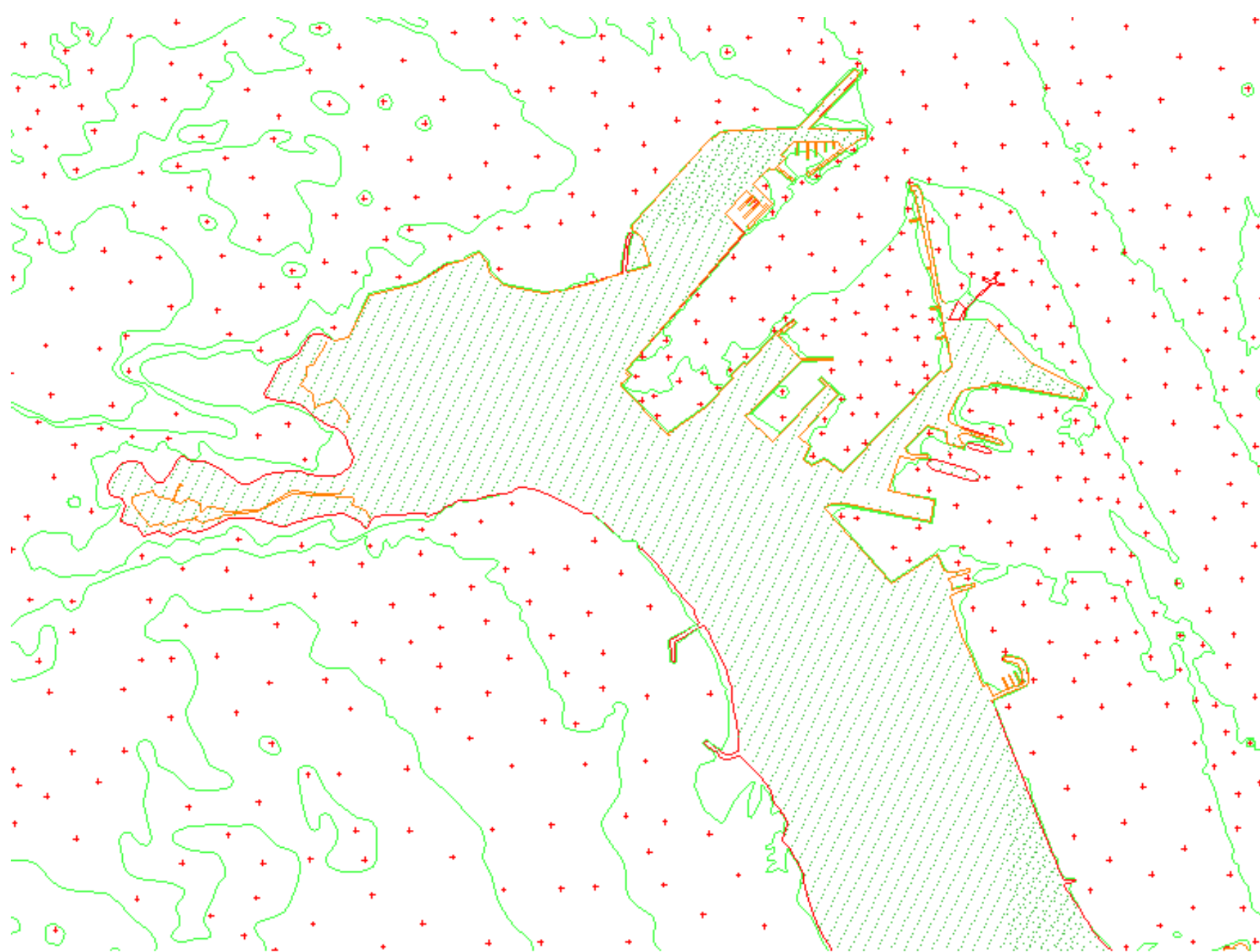
Triangulação Delaunay

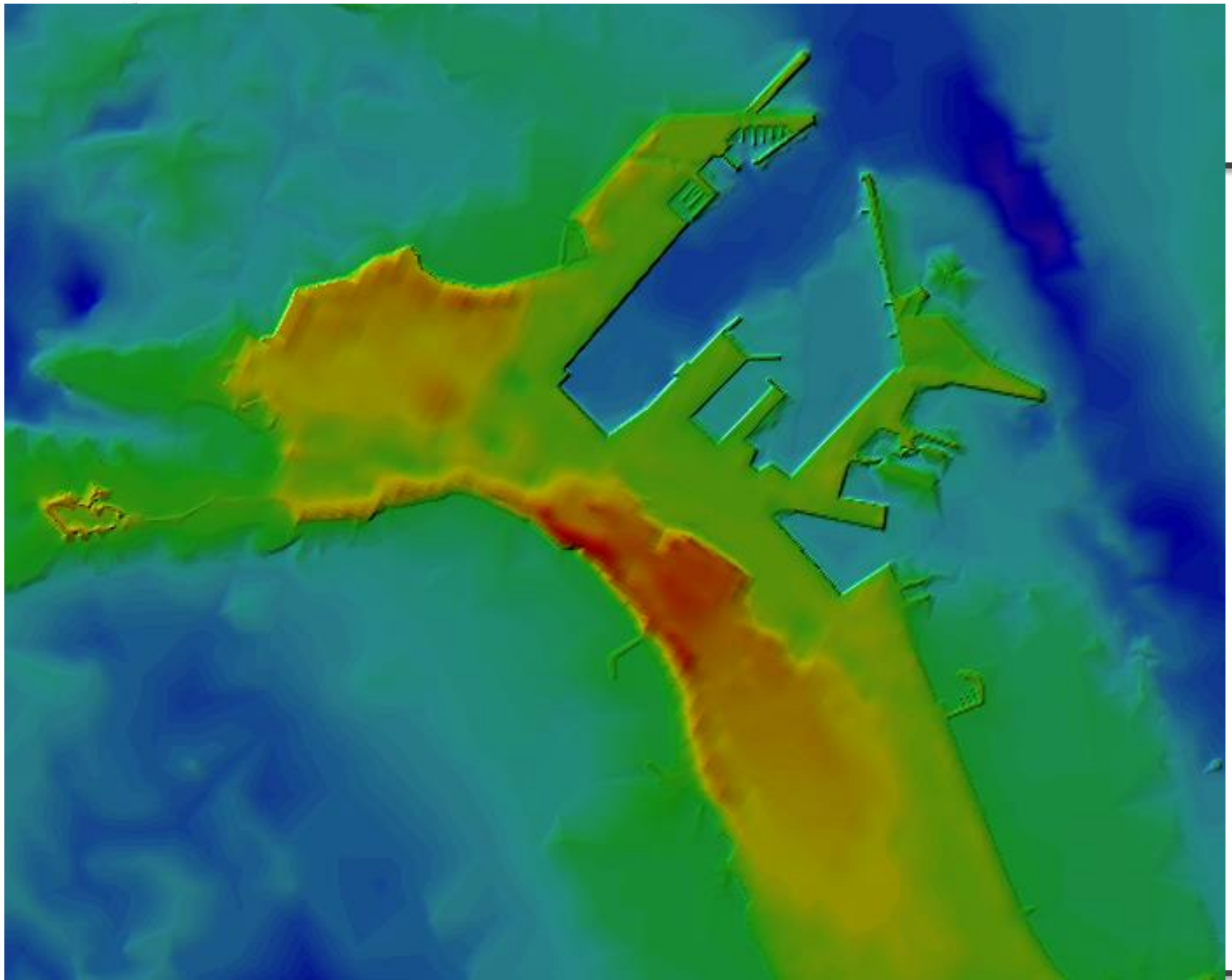




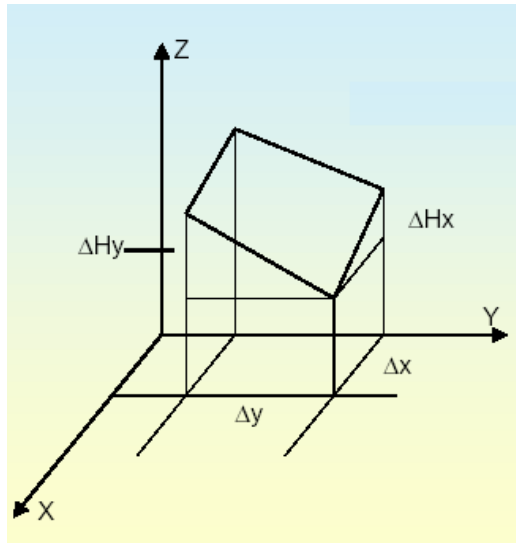






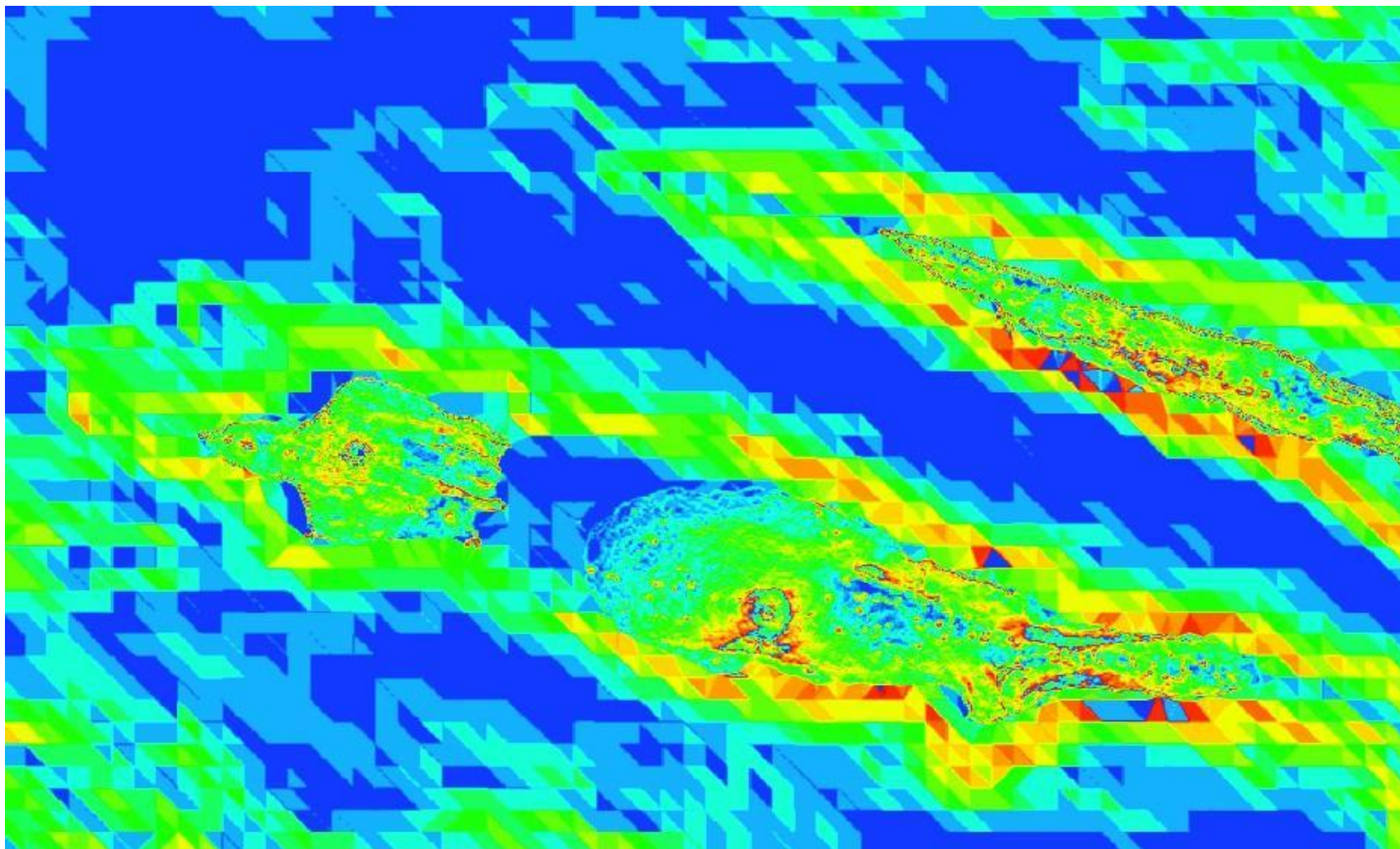


Declive – Com o MDT podemos obter o declive, numa determinada direcção, para um ponto qualquer da rede. O declive compreende duas componentes, o gradiente (G) e a orientação (E). O gradiente é a máxima taxa de variação de altitude e a orientação é a direcção (azimute) em que ela ocorre.

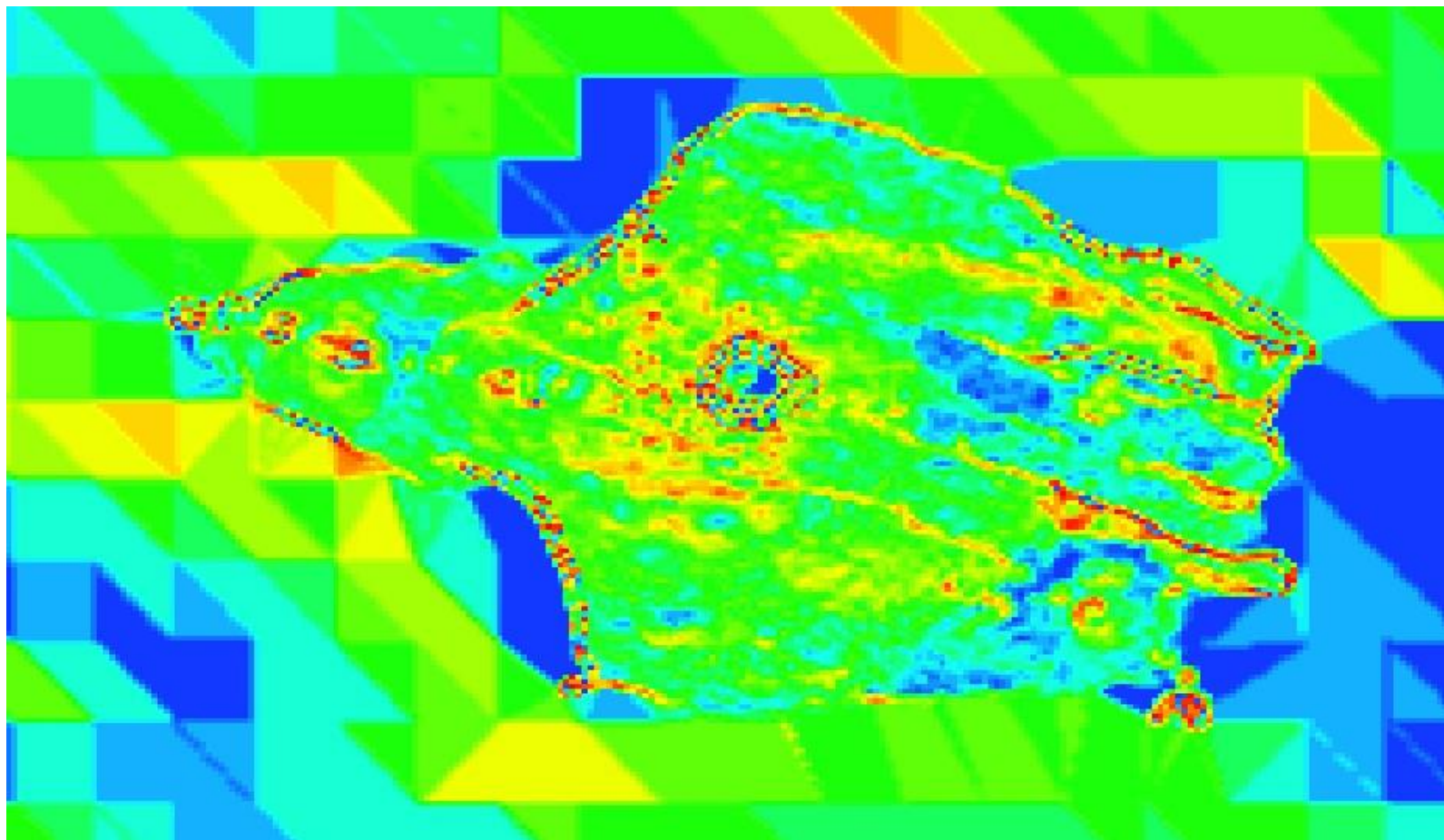


$$Declive = \sqrt{\left(\frac{\Delta H_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_y}{\Delta y}\right)^2}$$

Mapa de Declives

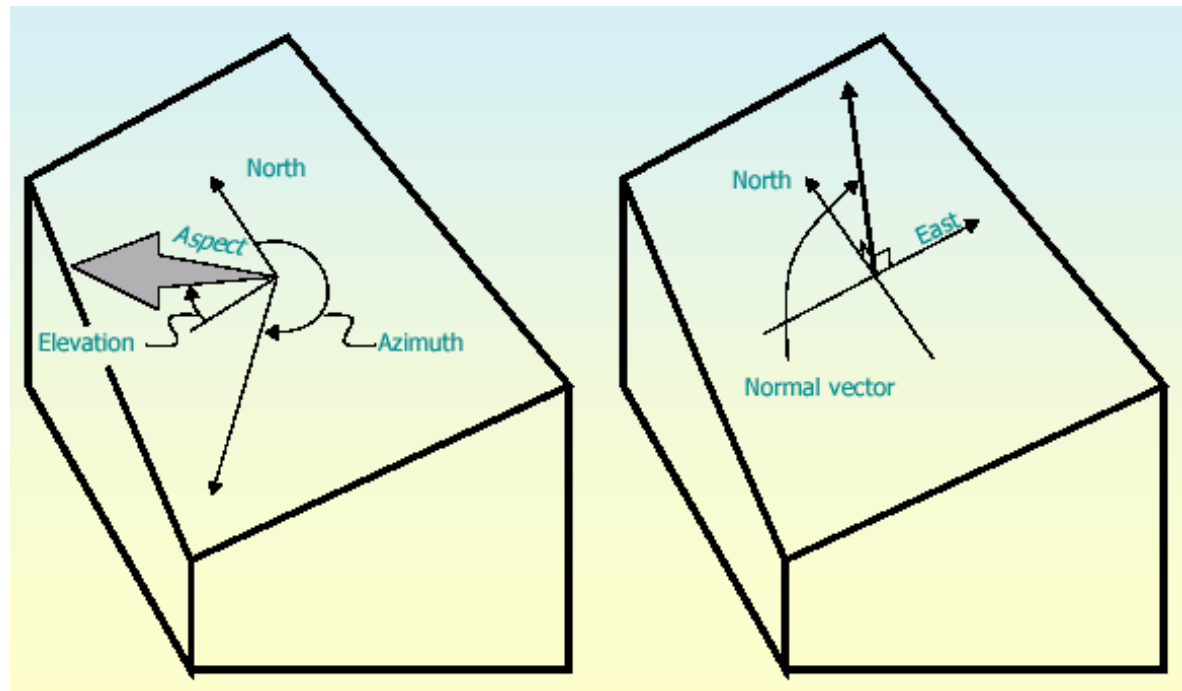


Mapa de Declives

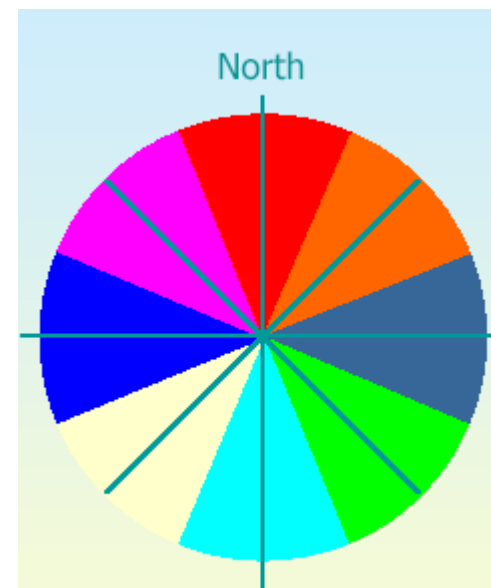
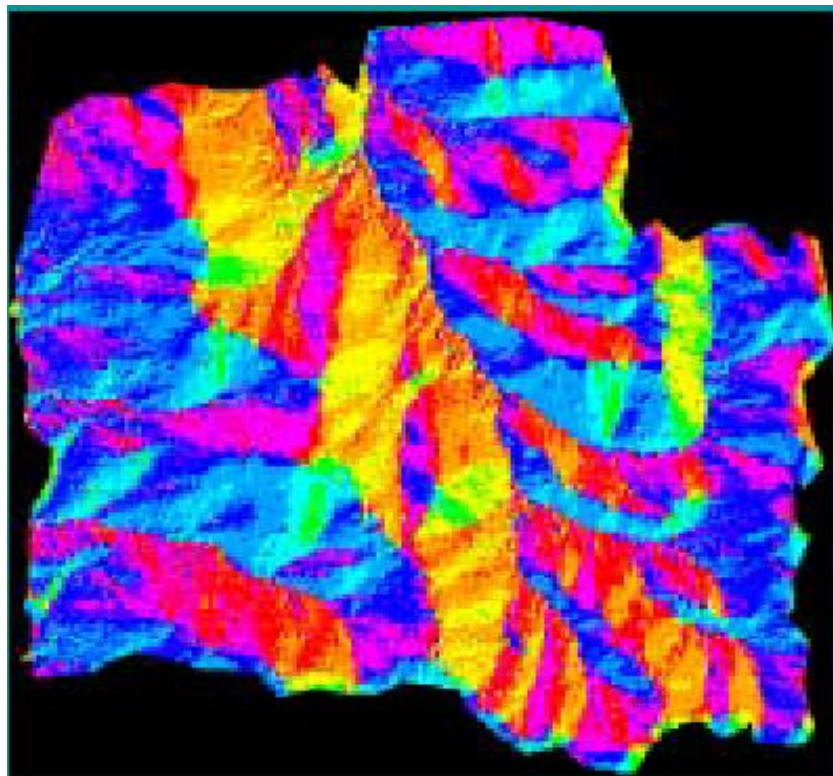


Exposição

Direcção do vector normal em graus medido a partir do Norte (azimute da normal à superfície).

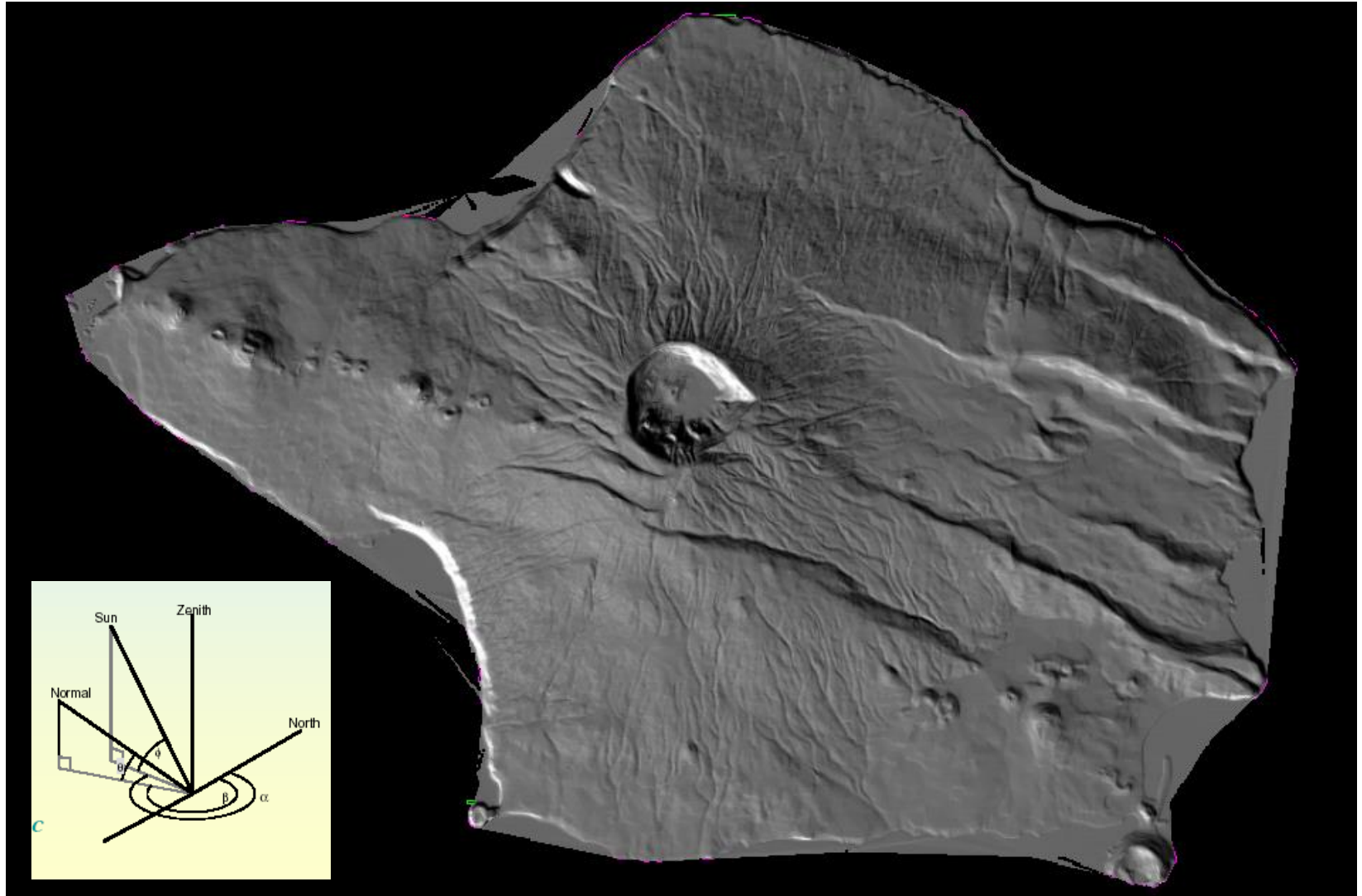


Mapa de Exposição



Zonas de Sombra – Através do MDT é possível reproduzir o efeito das antigas cartas sombreadas. Depois de escolhida a fonte de iluminação é calculada para cada elemento uma tonalidade proporcional à intensidade da luz reflectida pelo terreno. Geralmente a fonte luminosa é colocada a NW da carta a uma altura de 45 graus, podendo o utilizador fazer rodar a fonte de luz em azimute e altura.

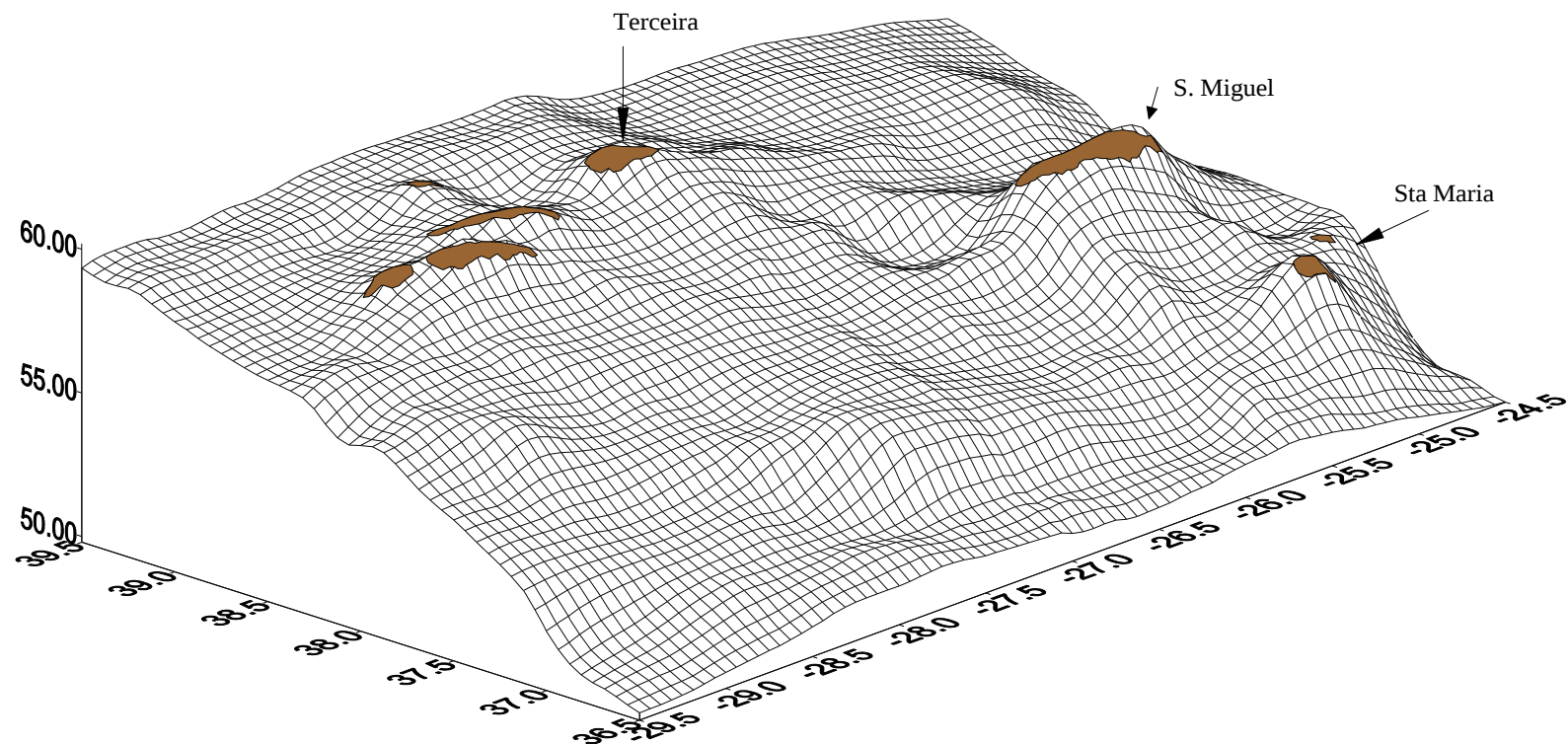
Mapa de Iluminação-Sombra



Vista Tridimensional

Vista Tridimensional – A partir de um MDT é possível gerar uma imagem tridimensional do terreno, sendo possível simular o ponto de vista de um observador sobre o terreno. Para a obtenção da imagem tridimensional é frequente utilizar-se a projecção perspectiva, pois esta, é especialmente intuitiva. Os algoritmos de construção de vistas tridimensionais devem proceder à eliminação de linhas invisíveis e, eventualmente, ao cálculo de luminosidade reflectida, sombras e gradações de cor sobre superfícies.

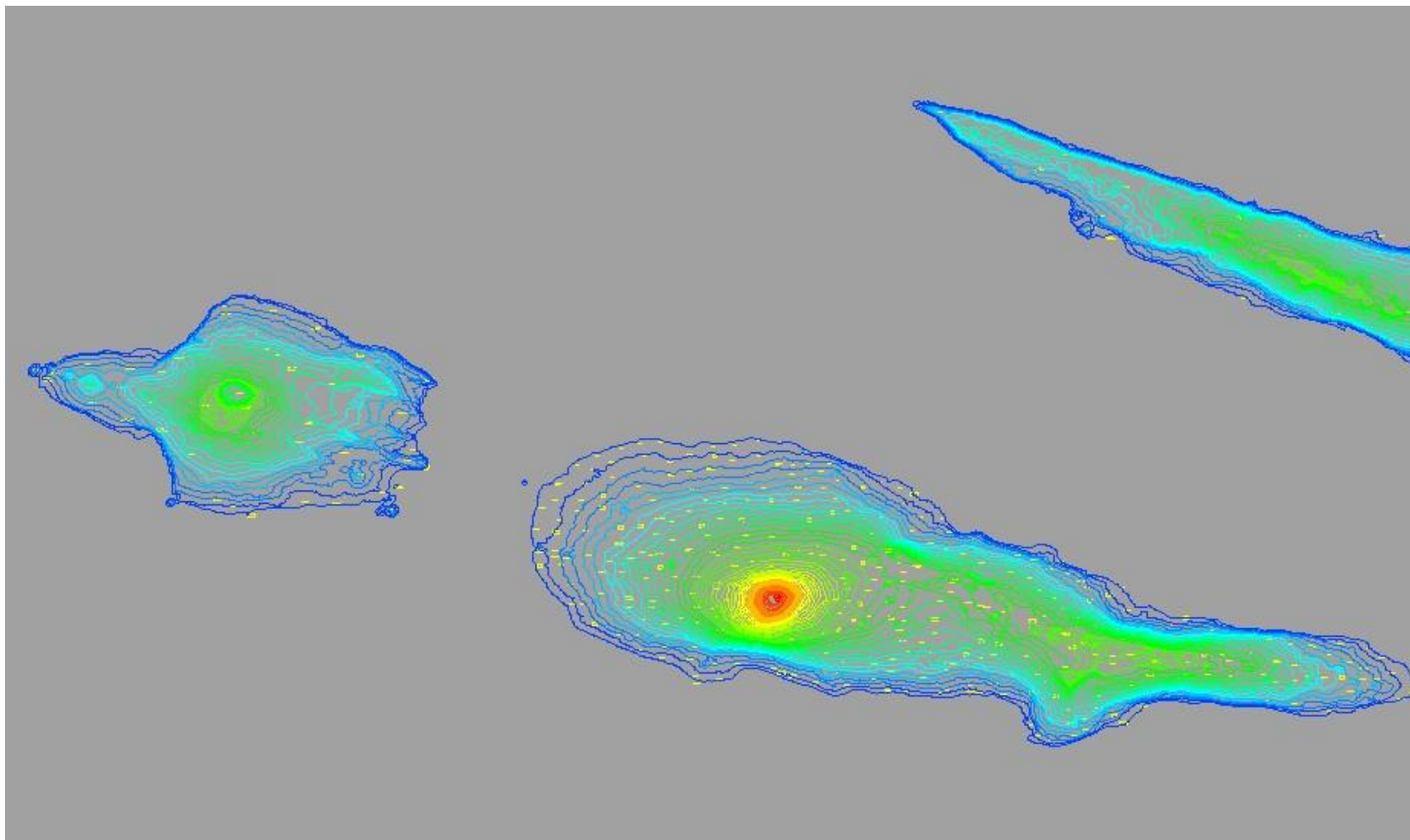
Vista Tridimensional



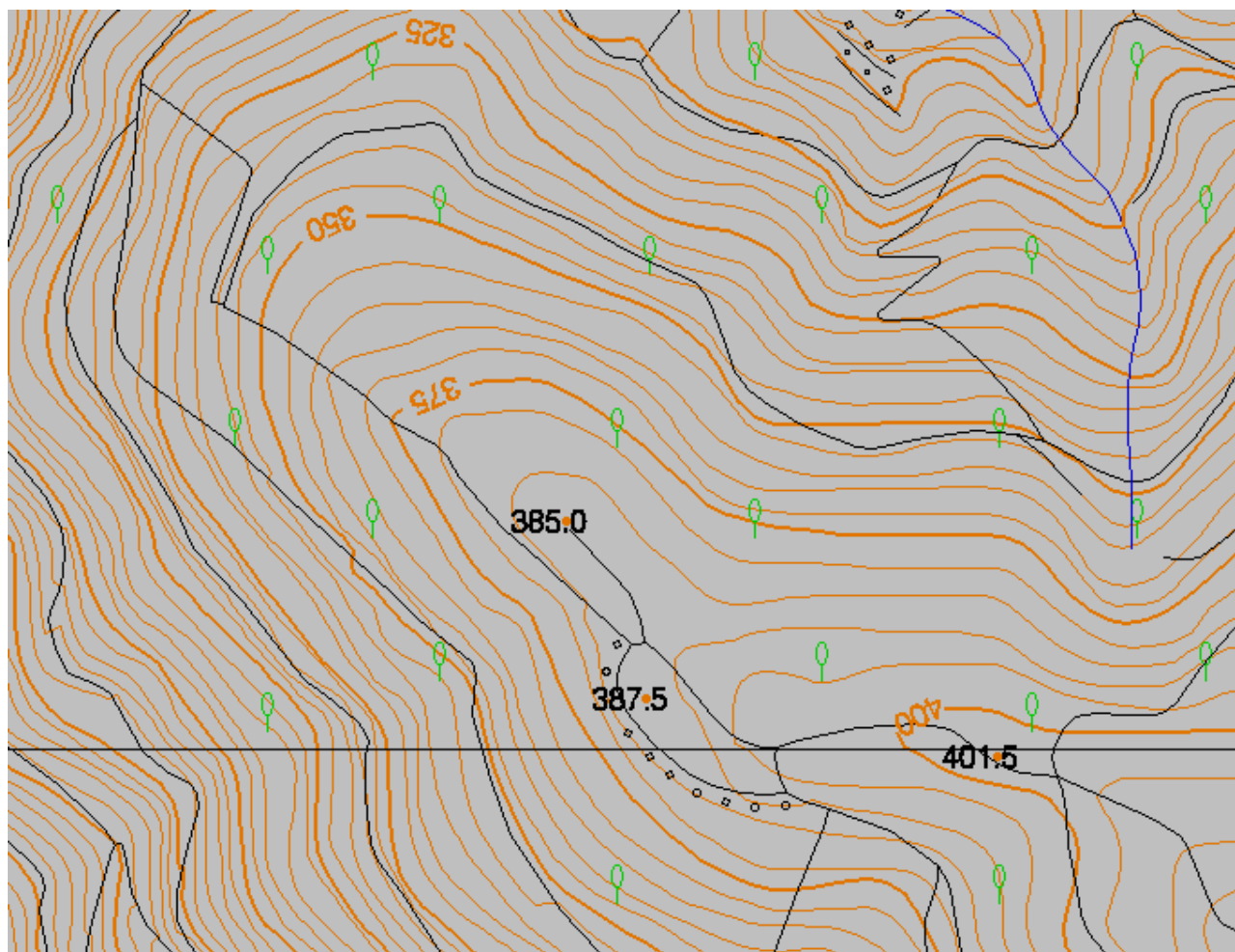
Curvas de nível

Curvas de nível – As curvas de nível podem existir previamente à construção do modelo, e serem utilizadas na sua construção, ou serem derivadas do próprio modelo. As curvas de nível podem ser desenhadas por interpolação ao longo das arestas de um TIN ou por interpolação entre elementos de uma matriz de cotas.

Curvas de nível

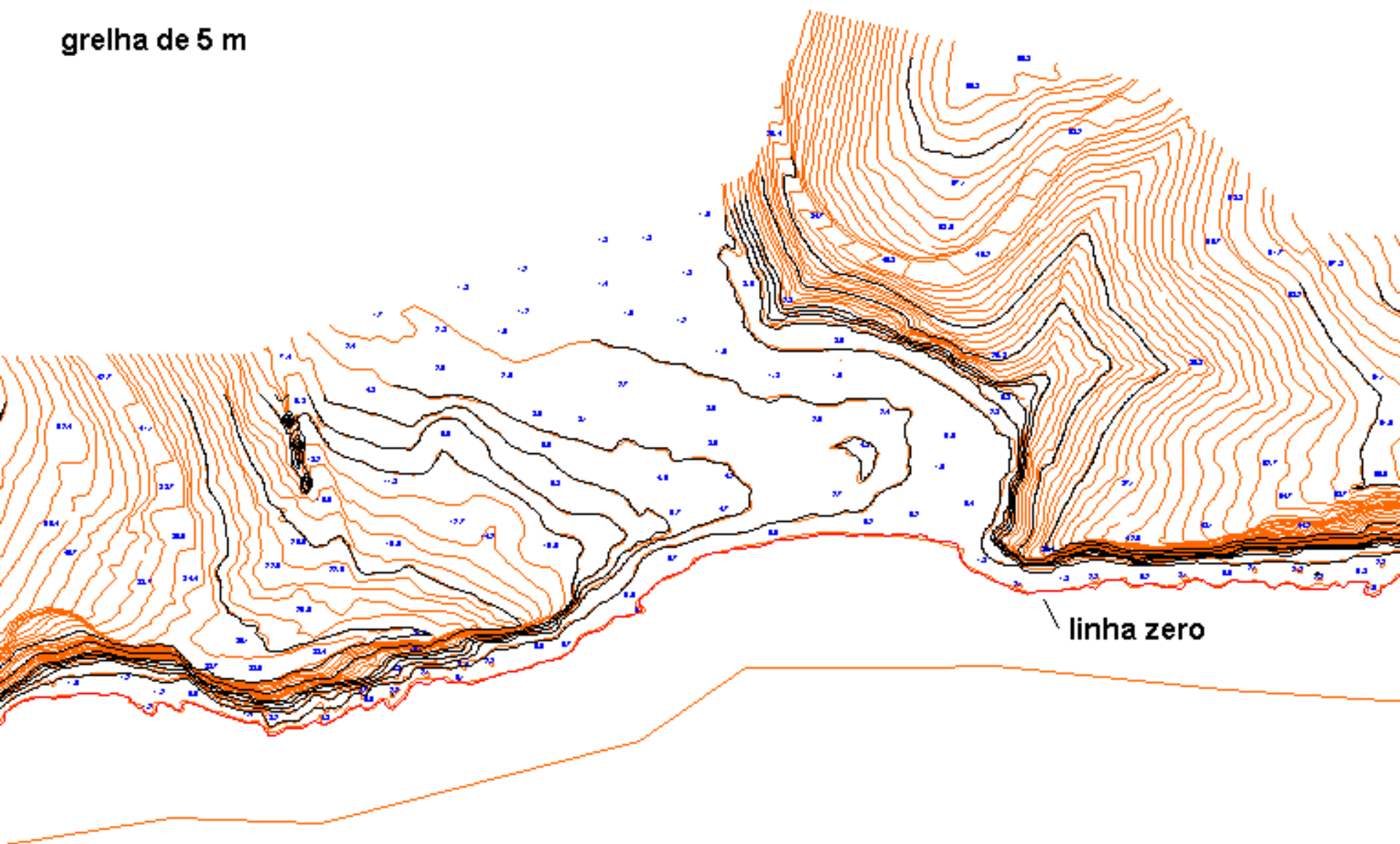


Curvas de nível



Boca Rio

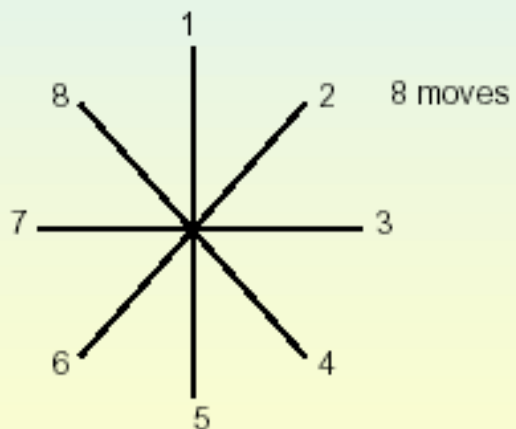
grelha de 5 m



Direcção do fluxo de água

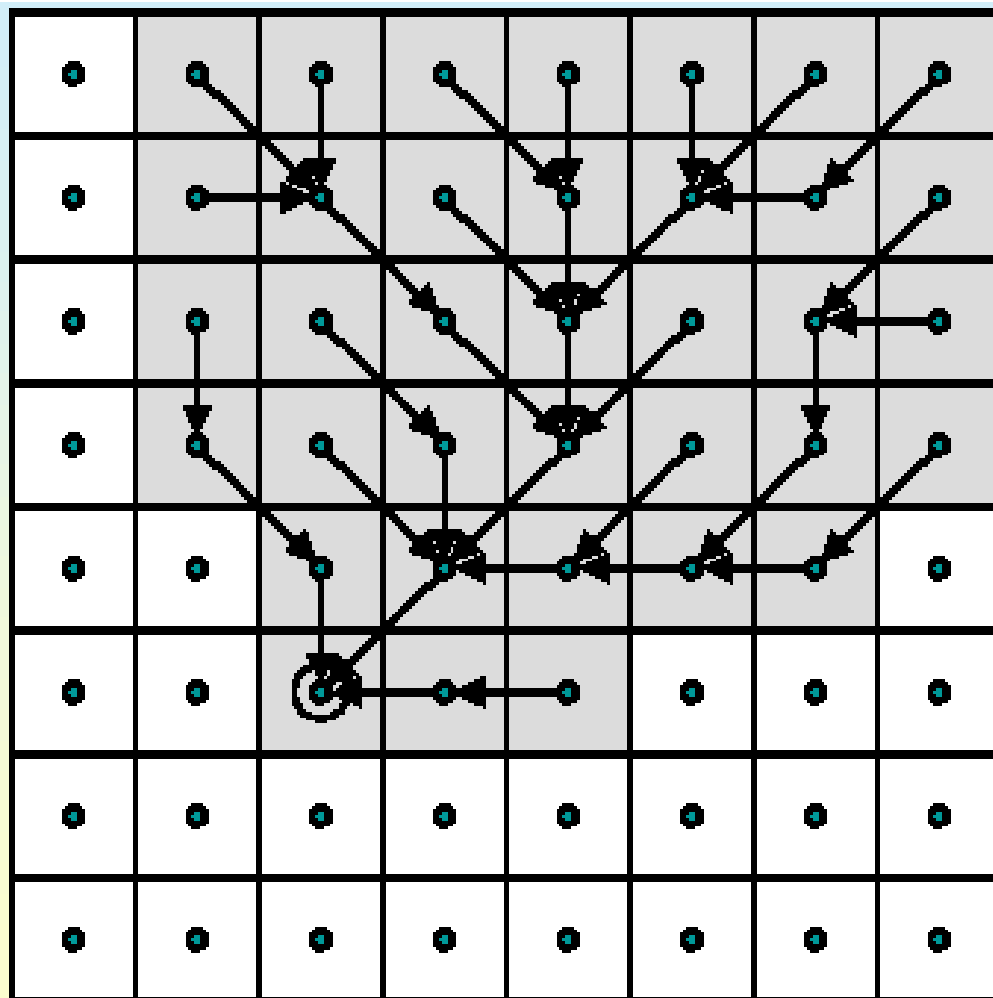
10	9	11	12
8	7	6	7
5	4	3	4
5	0	1	5

Flow Directions:

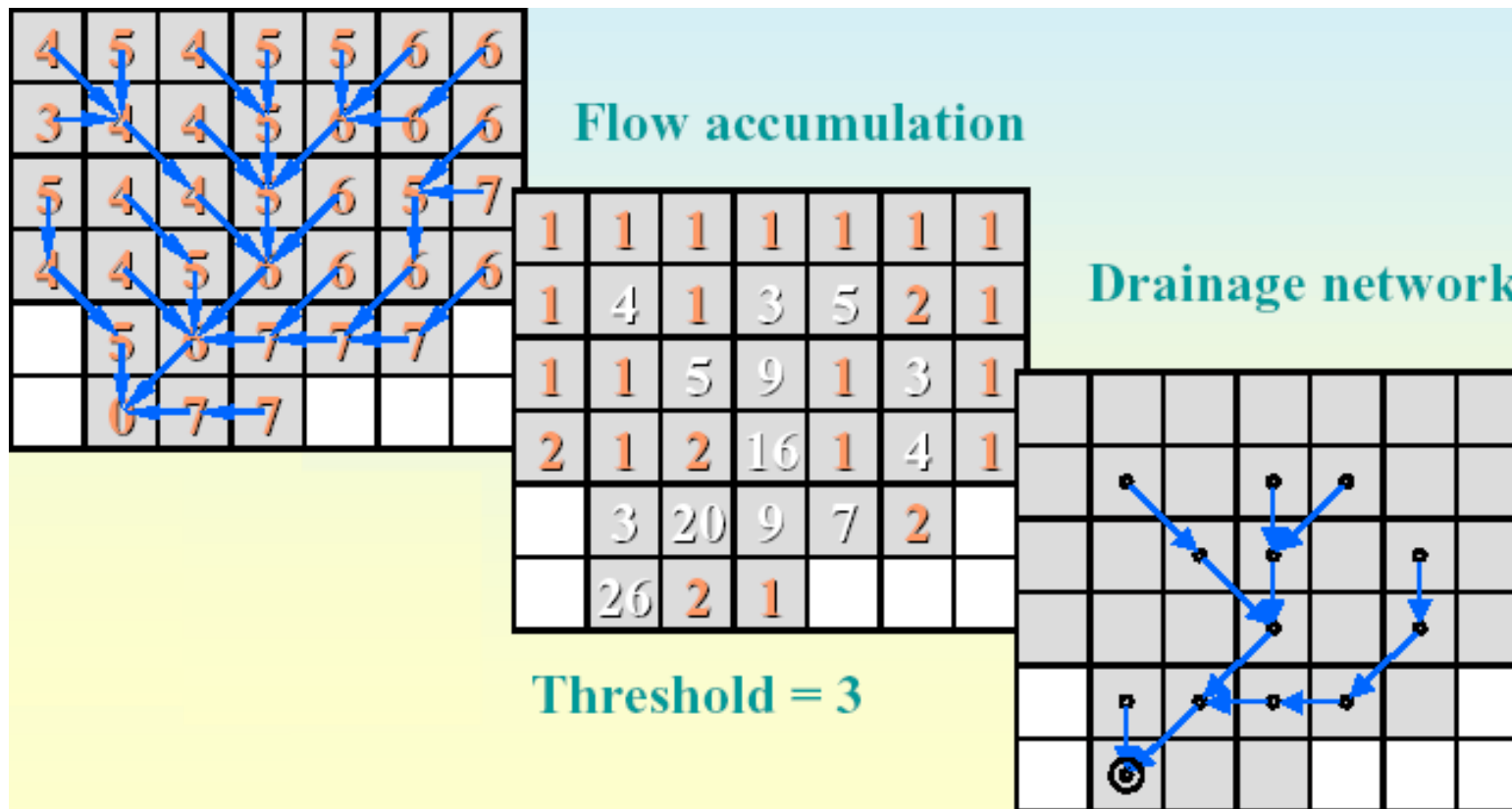


4	4	5	6
4	4	5	6
4	5	6	6
3	0	7	7

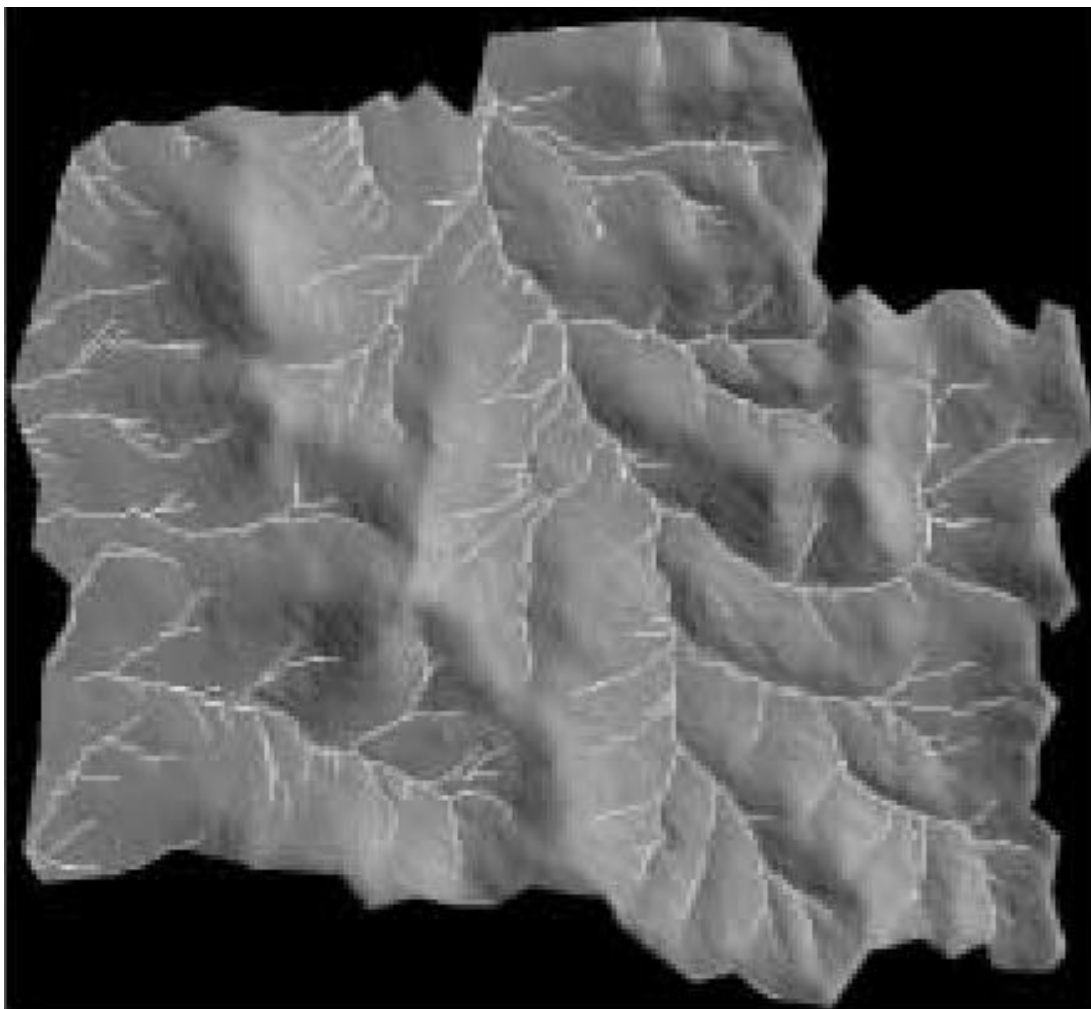
Nascente (Linha de Festo, watershed)



Redes de Drenagem



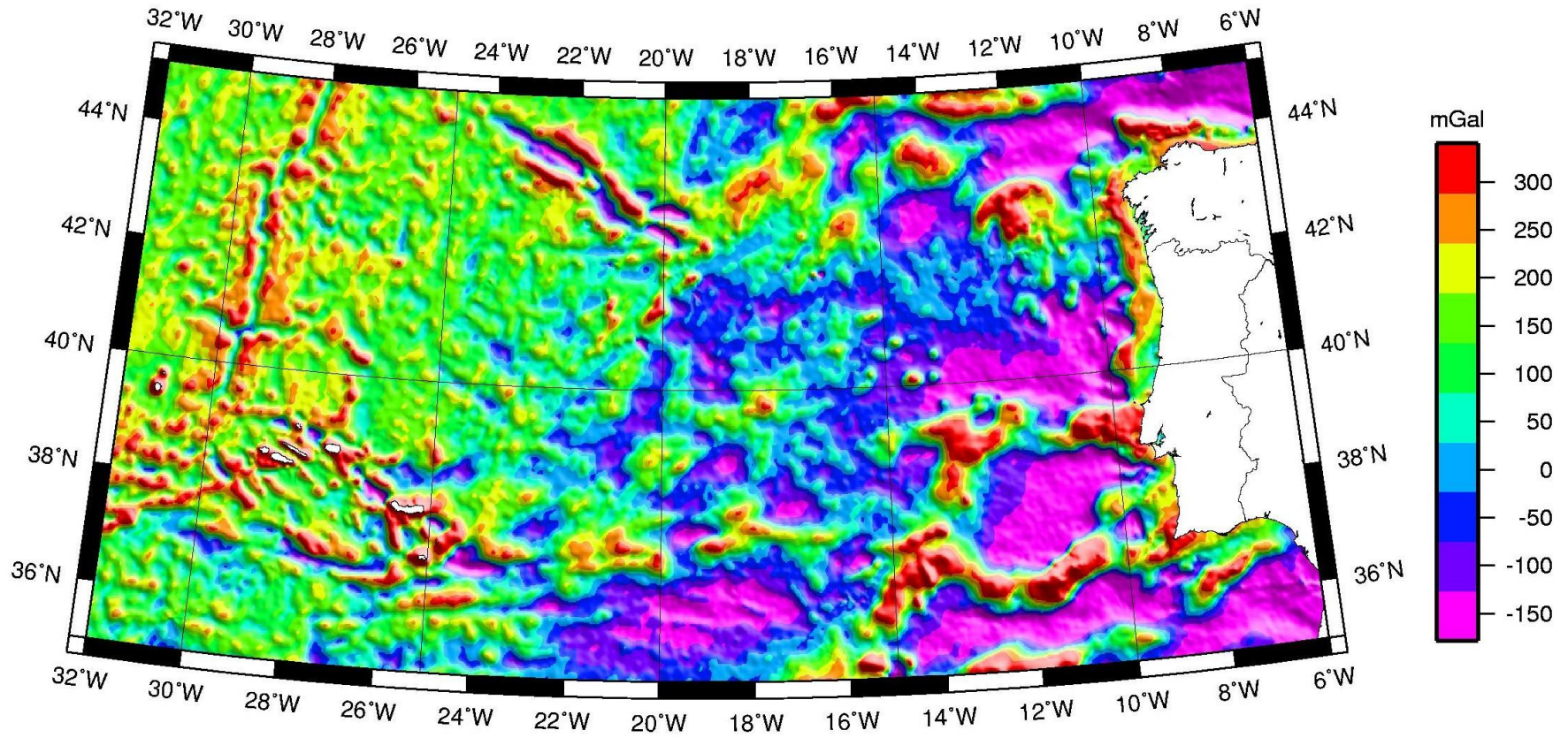
Redes de Drenagem

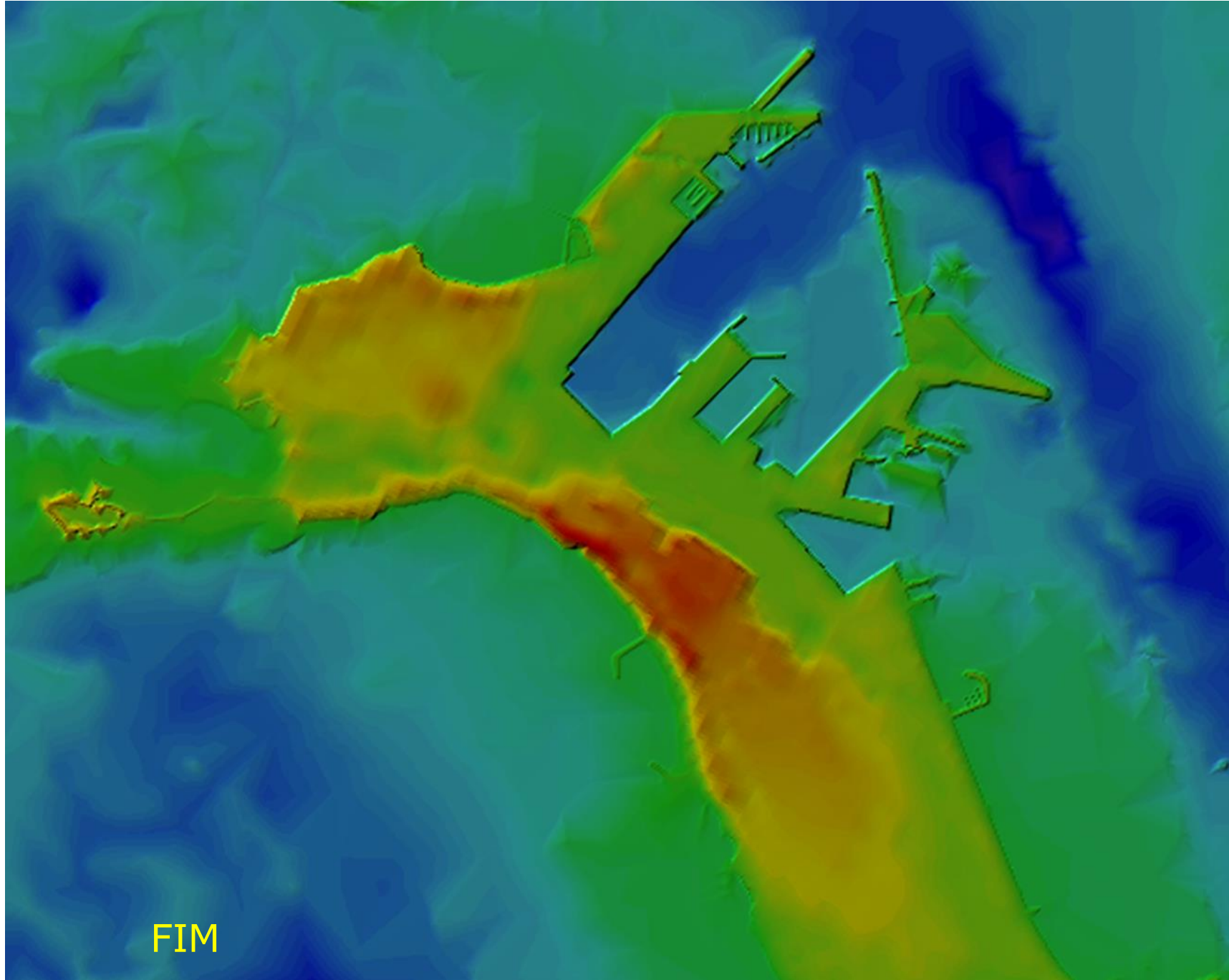




FACULDADE
DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Hipsometria





FIM



FACULDADE
DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DE LISBOA
