Exercícios de Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II

Capítulo 3

1. Determine, e represente graficamente, os domínios das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = \sin(xy) + \dfrac{\log(x+y+1)}{\sqrt{x}}$;

   b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{xy} - \log(4-x^2-y^2)$;

   c) $f(x,y) = \sqrt{y(1-|x|)}$;

   d) $f(x,y) = \log(xy-1)$;

   e) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-2}}{\log\left(\sin^2 x\right)}$;

   f) $f(x,y) = \arcsin(y-x) + \sqrt{-xy}$.

2. Para cada uma das seguintes funções, determine e represente graficamente as curvas de nível indicadas:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, para $k = 0, 1, 2, 3$;

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, para $k = 0, 1, 2, 3$, e compare com a);

   c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$, para $k = 0, 1, 4$;

   d) $f(x,y) = y - 2x + 1$, para $k = 0, 1, 2$;

   e) $f(x,y) = e^{xy}$, curvas de nível que passam nos pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$, respectivamente.

3. Determine, se existirem, os seguintes limites:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+y^2-2}{x+y}$;

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^3}{2x^4+y^4}$;

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1}$;

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^2-4x^2y}{x^2+y^2}$;

   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$;

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(1+x^2)\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$;

   i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$;

   j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2+y^2}$.

4. a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 7, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

   ii) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x^2y^3+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   b) Diga, justificando, se é possível redefinir $f(0,0)$ ou $g(0,0)$ de forma a que a função resultante seja contínua no ponto $(0,0)$.

5. Para cada uma das seguintes funções calcule as derivadas parciais indicadas:

   a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3$; $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;

   b) $f(x,y) = x^2 \sin\left(xy^2\right)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{\pi})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{\pi})$;

   c) $f(x,y,z) = e^{xy}\log(xyz)$; $f_x, f_z, f_{zy}, f_{zyx}$;

   d) $f(x,y,z) = x \arctan(yz)$; f_x, f_y, f_{yz};

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2(1+\cos y)}$; f_x, f_y;

   f) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{x-2y} e^{t^2}\,dt$; f_x, f_y, f_{xy}.

6. Mostre que a função $u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, (r \neq 0).$$

7. Mostre que a função $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, é solução da equação diferencial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

8. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{y^2-2x^2}{3x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Calcule $\nabla f(1,0)$ e $\nabla f(0,0)$.

   b) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

9. Considere a função $f(x,y,z) = e^x\sin(yz) + \log(y^2+z^2)$.

   a) Determine $\nabla f(x,y,z)$.

   b) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,1,0)$ na direcção e sentido do vector $(1,-2,1)$.

   c) Calcule o valor máximo da derivada direccional de f no ponto $(0,1,0)$. Em que direcção e sentido ocorre?

10. a) Sendo f uma função de classe C^1, mostre que f decresce mais rapidamente num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ na direcção e sentido do vector $-\nabla f(x)$.

    b) Determine a direcção e sentido em que a função $f(x,y) = 4x^3y^2 - 2x^2y + y^2$ decresce mais rapidamente no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

    c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ na direcção e sentido do vector $(1,3)$.

11. Considere as funções $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ e $g(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4y$. Para o ponto $(2,-1)$ determine a taxa de variação de f na direcção e sentido em que g aumenta mais rapidamente.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que, no ponto $(1,2)$, a sua derivada dirigida na direcção e sentido do vector $(2,2)$ é igual a 2 e na direcção e sentido do vector $(1,-1)$ é igual a -2.

    a) Determine $\nabla f(1,2)$.

    b) Calcule, no ponto $(1,2)$, a derivada direccional de f na direcção e sentido do vector $(3,4)$.

13. Determine uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

    a) $\nabla f(x,y) = (2xy, 1+x^2)$;

    b) $\nabla f(x,y) = (x + \sin y, x\cos y - 2y)$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que a função $u(x,y) = f(e^{xy})$ é solução da equação diferencial $xu_x - yu_y = 0$.

15. Seja $z = f(x,y)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $x = \sqrt{t}$, $y = \dfrac{t-4}{t+4}$. Determine $\dfrac{dz}{dt}(4)$ sabendo que $z_x(2,0) = z_y(2,0) = 8$.

16. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2. Mostre que a função

$$u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$$

é solução da equação diferencial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

17. Seja $w(x,y,z) = f\,(xz, yz)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostre que se tem

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} - z\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

18. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $g(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$.

    a) Mostre que se tem $y\dfrac{\partial g}{\partial x} + x\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

    b) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

19. Considere a função $\Phi(x,y) = f(x + g(y))$, onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^2. Sabendo que $g(2) = 3$, $f(4) = 5$, $g'(2) = f'(4) = 2$, $g''(2) = f''(4) = 3$, calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de Φ no ponto $(1,2)$.

20. Considere a equação diferencial $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$ e a função $f(u,v) = u^2 + v^2$. Sendo $z(t) = f(x(t), x'(t))$,

    a) determine $z'(t)$ em função de $x(t)$, $x'(t)$ e $x''(t)$;

    b) mostre que se $x(t)$ satisfaz a equação diferencial anterior então z é uma função crescente em $\mathbb{R}$ (sugestão: escreva $z'(t)$ em função apenas de $x'(t)$);

    c) sabendo que $x(0) = 1$ e que $x'(0) = 0$ determine $x(t)$.

21. Determine um vector unitário normal à hipérbole $xy = 1$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

22. Suponha que a temperatura num aberto Ω do plano é dada pela função

$$T(x,y) = 3yx^2 - x^3 + 60.$$

Determine, no ponto $(1,-1) \in \Omega$, um vector unitário tangente à linha isotérmica que passa nesse ponto.

23. Considere a função $F(x,y) = f(u) + f(v)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $u = x + 2y$, $v = 3x - 2y$. Supondo que $f'(0) = f''(0) = \dfrac{1}{2}$,

    a) calcule $\nabla F(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)$;

    b) escreva uma equação da recta tangente à curva de nível da função F que passa em $(0,0)$;

    c) sabendo que a superfície $z = F(x,y)$ passa na origem do referencial, calcule $f(0)$.

24. Em cada um dos seguintes casos determine equações do plano tangente e da recta normal à superfície dada no ponto indicado:

    a) $z = 3x^2 + 2xy + y^2$, $(1,1,6)$;

    b) $z = x^2 \log(2y^2 - 1) + e^{xy}$, $(1,1,e)$;

    c) $2x^2 - xz + y^2 - yz = -5$, $(1,3,4)$.

25. Considere a função $f(x,y) = e^{x^2 y} + \log(x+y) - \log(x-y)$.

   a) Determine, e represente graficamente, o domínio de f.
   b) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(1,0)$ na direcção e sentido do vector $(3,4)$.
   c) Determine um vector normal à curva dada por $f(x,y) = 1$ no ponto $(1,0)$.
   d) Escreva uma equação do plano tangente à superfície definida por $f(x,y) - e^z = 0$ no ponto $(1,0,0)$ e mostre que esse plano é perpendicular ao plano $x = 0$.
   e) Seja $F(t) = f(t, g(t))$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Calcule $F(1)$ e $F'(1)$ sabendo que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$.

26. Considere a superfície definida por $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$, onde $y \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostre que em todos os pontos desta superfície o plano tangente passa na origem do referencial.

27. a) Mostre que o plano tangente à superfície $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a,b,c \neq 0)$, no ponto (x_0, y_0, z_0) dessa superfície, tem por equação
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$
   b) Determine em que pontos é que o plano tangente é paralelo ao plano yz.
   c) Calcule os pontos para os quais o plano tangente é perpendicular ao vector $(1,1,1)$.

28. Determine os pontos da superfície $z^2 = 3x^2 + 2xy + y^2 - 32$ onde a recta normal é paralela ao vector $(-2, 2, -2)$.

29. Considere a função $g(x,y) = 5ye^y + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x+y)\right) + x - 3$.

   a) Mostre que a equação $g(x,y) = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,0)$.
   b) Calcule $y'(1)$ e mostre que a recta tangente ao gráfico da função $y(x)$ no ponto $(x,y) = (1,0)$ passa no ponto $(6,-1)$.

30. Mostre que a equação $xy + y - e^{xy} = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(0,1)$ e calcule $y'(0)$ e $y''(0)$.

31. Seja $h(x,y,z) = x^4 z - 2xy^3 + yz^3 + 2$.

   a) Mostre que a equação $h(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (1,1,0)$.
   b) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.
   c) Escreva uma equação do plano tangente à superfície $h(x,y,z) = 0$ no ponto indicado.

32. Mostre que a equação $xy - z\log y + e^{xz} = 1$ define implicitamente uma função $y = g(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (0,1,1)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(0,1)$.

33. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e suponha que a equação $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, define x como função implícita de y e y como função implícita de x numa vizinhança de um ponto (x_0, y_0) solução da equação. Nestas condições, que relação há entre $\dfrac{dx}{dy}(y_0)$ e $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$?

34. Determine e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$;
   b) $f(x,y) = x^2 y - e^y$;
   c) $f(x,y) = x^2 - y^3$;

d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$;

e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$;

f) $f(x,y) = \sin x \sin y$, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

35. Determine os valores máximo e mínimo absolutos das funções dadas nos conjuntos indicados:

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$;

b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

c) $f(x,y) = 2xy$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 8\}$.

36. Seja $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 3)$.

a) Determine os extremos locais de f em $\mathbb{R}^2$.

b) Diga, justificando, se f tem extremos absolutos em $\mathbb{R}^2$.

c) Determine os extremos absolutos de f no círculo $x^2 + y^2 \leq 3$.

37. Determine números não negativos x, y, z tais que a sua soma seja 18 e o seu produto seja máximo.

38. Determine os pontos da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para os quais o quadrado da distância ao ponto $(2,1,2)$ é, respectivamente, máximo e mínimo.

39. Pretende-se construir um contentor em forma de paralelepípedo, aberto em cima, e com capacidade de 32 litros. Determine as dimensões que deve ter o contentor de forma a usar o mínimo de material possível (sabendo que este mínimo existe).

40. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$

a) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de f das rectas $y = x$ e $y = -x$.

b) Mostre que $f'_{(1,1)}(x,y)$ é constante para qualquer ponto (x,y) pertencente à recta de equação $x + y = 1$.

c) Determine, e represente graficamente, o domínio da função $g(x,y) = \log\left(\frac{v}{u}\right)$, onde u e v são as funções dadas.

41. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x + y, x - y)$.

a) Determine a imagem por meio de f do triângulo T limitado pelas rectas $y = 0$, $x + y = 6$ e $x - y = 2$.

b) Verifique que

$$|\det J_f(x,y)| = \frac{A(f(T))}{A(T)},$$

onde $J_f(x,y)$ é a matriz jacobiana da função f no ponto (x,y), e $A(T)$, $A(f(T))$ representam as áreas de T e de $f(T)$ respectivamente.

42. Considere função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

a) Calcule $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

b) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de F das curvas $r = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $r > 0$.

43. Seja $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ onde $u(x,y) = -2x\cos y$ e $v(x,y) = x^2 \sin y$.

a) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de F das rectas $y = \frac{\pi}{2}$ e $x = -2$.

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $f(x) = u(x, g(x))$. Sabendo que $g(1) = \frac{\pi}{4}$ e que $g'(1) = 2$, calcule $f'(1)$.

c) Calcule $F'_{(2,3)}(1,0)$.

d) Mostre que o sistema $\begin{cases} u = -2x\cos y \\ v = x^2 \sin y \end{cases}$ permite definir implicitamente x e y como funções de u e v numa vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (1,0,-2,0)$.

e) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ no ponto $(-2,0)$.

44. a) Mostre que o sistema $\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x^3 + \sin y - \sin t = 0 \end{cases}$ define implicitamente uma linha $t \to (x(t), y(t))$ numa vizinhança do ponto $(x,y,t) = (0,0,0)$.

b) Determine a equação cartesiana da recta tangente à linha $(x(t), y(t))$ no ponto $(0,0)$.

c) Calcule $x''(0)$.

45. a) Mostre que o sistema $\begin{cases} y\cos x + \log(1 + xzw) + z = 0 \\ \sin(y^2 + z^2) + e^z - 2x = 1 \end{cases}$ define implicitamente y e z como funções de x e w numa vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (0,0,0,0)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial y}{\partial w}(0,0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial w}(0,0)$.