EXERCÍCIOS – FOLHA 7

7.1. Localize os valores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

7.2. Usando o teorema de Geršgorin, justifique que $0 \in \mathbb{C}$ não é valor próprio da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

e conclua que $\mathbf{A}$ é invertível.

7.3. Usando o teorema de Geršgorin, justifique que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

tem pelo menos dois valores próprios reais. [*Sugestão.* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \implies \overline{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A})$.]

7.4. Dizemos que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tem DIAGONAL DOMINANTE se $|a_{i,i}| \geqslant r_i(\mathbf{A})$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$, e que tem DIAGONAL ESTRITAMENTE DOMINANTE se $|a_{i,i}| > r_i(\mathbf{A})$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz com diagonal estritamente dominante. Prove que:

(a) $\mathbf{A}$ é invertível.

(b) Se $a_{i,i} \in \mathbb{R}^+$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$, então qualquer valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tem parte real positiva.

(c) Se $\mathbf{A}$ for hermítica e $a_{i,i} \in \mathbb{R}^+$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$, então $\mathbf{A}$ é definida positiva (isto é, $\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$).

7.5. Verifique que:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tem diagonal dominante mas não é invertível (de modo que "diagonal dominante" $\nRightarrow$ "invertível").

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, para $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon < 1$, é invertível mas não tem diagonal estritamente dominante (de modo que "invertível" $\nRightarrow$ "diagonal estritamente dominante").

7.6. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz com entradas diagonais não-nulas. Prove que, se $\mathbf{A}$ tiver diagonal dominante e $|a_{i,i}| > r_i(\mathbf{A})$ para pelo menos $n-1$ índices $1 \leqslant i \leqslant n$, então $\mathbf{A}$ será invertível.

7.7. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, sejam $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$ os discos de Grešgorin de $\mathbf{A}$ e seja $\mathcal{G}(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$; denotamos por $\operatorname{int}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$ o interior de $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ e por $\operatorname{fr}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$ a fronteira de $\mathcal{G}(\mathbf{A})$. Prove que:

(a) $\lambda \notin \operatorname{int}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$ se e só se $|\lambda - a_{i,i}| \geqslant r_i(\mathbf{A})$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$.

(b) Se $\lambda \in \operatorname{fr}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$, então $|\lambda - a_{i,i}| \geqslant r_i(\mathbf{A})$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$.

(c) $\mathbf{A}$ terá diagonal dominante se e só se $0 \notin \operatorname{int}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$.

7.8. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ e $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Sejam $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$ os discos de Grešgorin de $\mathbf{A}$, seja $\mathcal{G}(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$ e suponhamos que $\lambda \notin \operatorname{int}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$. Prove que:

(a) Se $1 \leqslant k \leqslant n$ for tal que $|v_k| = \|\mathbf{v}\|_\infty$, então $|\lambda - a_{k,k}| = r_k(\mathbf{A})$.

(b) Se $1 \leqslant k \leqslant n$ for tal que $|v_k| = \|\mathbf{v}\|_\infty$, então $|v_j| = \|\mathbf{v}\|_\infty$ para qualquer $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que $a_{k,j} \neq 0$.

7.9. Dizemos que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tem a PROPRIEDADE SC se, para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$, existirem $1 \leqslant k_1, \ldots, k_t \leqslant n$ tais que $k_1 = i$, $k_t = j$ e $a_{k_s,k_{s+1}} \neq 0$ para qualquer $1 \leqslant s < t$. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ e $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Sejam $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$ os discos de Grešgorin de $\mathbf{A}$, seja $\mathcal{G}(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$ e suponhamos que $\lambda \notin \operatorname{int}\big(\mathcal{G}(\mathbf{A})\big)$. Prove que, se $\mathbf{A}$ tiver a propriedade SC, então:

(a) $|\lambda - a_{i,i}| = r_i(\mathbf{A})$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$.

(b) $\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i|$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$.

(c) $\mathbf{A}$ é invertível sempre que $\mathbf{A}$ tiver diagonal dominante e existir $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $|a_{i,i}| > r_i(\mathbf{A})$.