UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - $3^{\underline{a}}$ Série

1. a) Mostre que para um fluido incompressível a equação de Navier-Stokes

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* - \eta \nabla \times \Omega$$

se pode escrever

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \eta \nabla^2 \mathbf{u}.$$

b) Mostre que um tensor de ordem dois se pode escrever

$$T_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{mm} + \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3}\delta_{ij}T_{mm}\right) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}),$$

onde o primeiro tensor é isotrópico, o segundo é simétrico e o terceiro anti-simétrico. Escreva os tensores das tensões e das taxas de deformação nesta forma e discuta o significado físico de cada um deles.

2. Mostre que a dissipação viscosa num fluido de Navier-Stokes em escoamento se escreve (ver Sec. 6.5 do Faber):

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

3. Considere um plano com inclinação α com a horizontal onde temos uma camada de fluido de espessura d. O fluido, de viscosidade η, tem uma superfície livre e está sujeito a um campo gravitacional g. a) Calcule a velocidade em função da distância da placa e a taxa de escoamento para uma espessura constante e uniforme d. b) Discuta as aproximações necessárias para que se possa considerar o escoamento como estacionário.

4. Considere um escoamento viscoso para baixo num tubo de seção transversal circular com $r = a$ sob gradiente de pressão constante $P = -dp/dz$. a) Mostre que

$$u_z = \frac{P}{4\eta}(a^2 - r^2), \quad u_r = u_\theta = 0.$$

b) Calcule a taxa de escoamento no tubo. Este escoamento é conhecido com Hagen-Poiseuille. A instabilidade formada em números de Reynolds mais elevados constitui um problema importante em mecânica dos fluidos (veja, por exemplo, `www.youtube.com/watch?v=yOWRJtXvpSo`).

5. a) Usando $t_i = T_{ij}n_j$ e $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, obtemos $t_i = -pn_i + \eta n_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, onde t_i é a componente i da tensão no elemento de superfície com normal n_i. Mostre que

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \eta[2(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u})].$$

b) Use o resultado da alínea "a" e as identidades matemáticas necessárias para mostrar que a força resultante exercida num volume de fluido pelo fluido circundante é

$$\int_S \mathbf{t}dS = \int_V (-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u})dV,$$

onde S é a superfície do volume de fluido. Deduza que se o volume for pequeno, a força resultante excluindo a gravidade é $-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}$ por unidade de volume, em acordo com a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

6. a) Verifique que no caso de um escoamento $\mathbf{u} = [u(y),\, 0,\, 0]$, a tensão se reduz a

$$\mathbf{t} = \left[\eta \frac{du}{dy},\, -p,\, 0\right]$$

quando $\mathbf{n} = (0,\, 1,\, 0)$. b) Mostre que os termos $\eta(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j)$ do tensor das tensões são nulos para um escoamento uniformemente circular $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}$, onde $\mathbf{\Omega}$ é um vetor constate.

7. Considere um fluido inicialmente em repouso entre duas placas paralelas: uma em $y = d/2$ com velocidade constante U e outra em $y = -d/2$ estacionária. a) Calcule o campo de velocidades. b) Calcule a taxa de escoamento. c) Calcule a tensão de corte nas duas placas.

8. Um fluido escoa lentamente através de uma bolha esférica de raio a constituída de ar. Considere que a tensão tangencial é nula, $t_\theta = 0$, em $r = a$. a) Mostre que a componente normal do stress em $r = a$ é $t_r = (3\eta U/a)\cos\theta$. b) Mostre que a força de arrasto na bolha é $D = 4\pi\eta U a$ na direção do escoamento livre. c) Considere agora que, no lugar da bolha de ar, temos uma gota constituída de outro fluido de viscosidade $\bar{\eta}$. Mostre que a força de arrasto é

$$D = 4\pi\eta U a \left(\frac{\eta + 3\bar{\eta}/2}{\eta + \bar{\eta}}\right).$$

d) Discuta os limites $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow 0$ e $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow \infty$.

9. O problema de um escoamento viscoso 2D através de um cilindro circular de raio a envolve calcular o campo de velocidades $\mathbf{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$ que satisfaz

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot u,$$

com as condições de fronteira

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } x^2 + y^2 = a^2; \quad \mathbf{u} \longrightarrow (U,\, 0,\, 0) \text{ em } x^2 + y^2 \longrightarrow \infty.$$

Reescreva esse problema na forma adimensional usando as variáveis adimensionais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/a, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}/U, \quad p' = p/(\rho U^2)$$

em vez de $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ e p. Sem tentar resolver o problema, mostre que o padrão de linhas de corrente depende de ν, a e U apenas através da combinação $Re = Ua/\nu$. Usando o código fornecido (code2-cilinder.py), verifique que escoamentos com o mesmo número de Reynolds são geometricamente similares (varie estas 3 quantidades de forma a manter Re constante).

10. a) Calcule a velocidade $u(y)$ num escoamento viscoso entre duas placas paralelas estacionárias em $y = 0$ e $y = L$ onde o fluido, de viscosidade cinemática $\nu = \eta/\rho$, escoa na direção x devido a uma força (e.g., gravidade) $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{h}}$. b) Compare a solução analítica com a obtida numericamente usando o código fornecido (code3-Poiseuille.py) para os mesmos parâmetros. Discuta o que acontece quando se altera a separação entre as placas L e a viscosidade ν de forma que L/ν permaneça constante.