ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Ano Letivo 2019/2020

Exercícios

1. Sejam A, B e C três acontecimentos associados a determinada experiência aleatória. Exprima, em notação de conjuntos, os seguintes acontecimentos:
   a) "realiza-se exactamente um dos acontecimentos",
   b) "realiza-se pelo menos um dos acontecimentos A, B ou C",
   c) "realizam-se exactamente dois acontecimentos",
   d) "não se realizam mais de dois acontecimentos".

2. Numa prospeção de mercado foram entrevistadas várias pessoas acerca das suas preferências em relação a três produtos A, B e C. Os resultados foram os seguintes:

210 pessoas compram o produto A;	100 pessoas não compram nenhum dos 3 produtos;
210 pessoas compram o produto B;	60 pessoas compram os produtos A e B;
250 pessoas compram o produto C;	70 pessoas compram os produtos A e C;
20 pessoas compram os 3 produtos;	50 pessoas compram os produtos B e C.

   a) Quantas pessoas foram entrevistadas?
   b) Quantas pessoas compram:
      i) apenas o produto A?
      ii) apenas o produto B?
      iii) apenas o produto C?
      iv) os produtos A e B e não o produto C?
      v) dois dos 3 produtos?

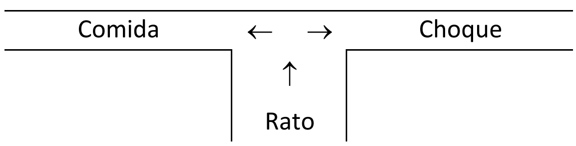
3. Um par de dados é lançado uma vez e observam-se as faces que ficam viradas para cima.
   a) Descreva o espaço de resultados associado a esta experiência.
   b) Se em vez de lançar dois dados uma vez, lançasse um dado duas vezes, como descreveria o espaço de resultados associado a esta nova experiência?
   c) Descreva os seguintes acontecimentos:
      i) A soma do número de pintas das faces observadas nos dois dados é igual a 6 .
      ii) O produto do número de pintas das faces observadas nos dois dados é um número ímpar .

4. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda ao ar até sairem duas caras consecutivas ou terem sido feitos 4 lançamentos. Descreva o espaço de resultados associado a esta experiência.

5. Sabendo que $P(A)=2/3$, $P(B)=1/2$ e $P(A\cap B)=1/3$, determine: $P(A-B)$, $P(A\cup B)$, $P(A^c\cup B^c)$, $P(A^c\cap B)$, $P(A\cup B^c)$.

6. Considere dois acontecimentos A e B tais que $P(A)=0.5$ e $P(A\cup B)=0.6$. Calcule $P(B)$ se:
   a) A e B forem disjuntos.
   b) A e B forem independentes.
   c) $P(A|B)=0.4$.

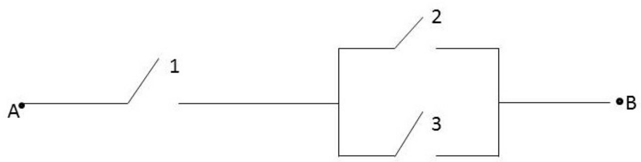
7. Imagine a seguinte experiência laboratorial efectuada com um rato:



   Se o rato virar à direita leva um choque e se virar à esquerda recebe comida.
   À primeira vez o rato tem igual probabilidade de virar à esquerda ou à direita. À segunda vez, o rato, se recebeu comida à primeira vez, vira à esquerda com probabilidade 0.6 e se recebeu um choque à primeira vez, vira à direita com probabilidade 0.2.

a) Calcule a probabilidade de o rato virar à direita à segunda vez.
b) Qual a probabilidade de o rato ter virado à esquerda à primeira vez, se virou à direita à segunda vez?

8. Considere o seguinte troço de um circuito eléctrico



e designe por F_i o acontecimento *"o interruptor i está fechado"*, *i*=1, 2, 3. Suponha que F_1 e F_2 são independentes, com probabilidades iguais a ½ e que F_3 tem uma probabilidade condicional de 1/8 quando os interruptores 1 e 2 estão fechados e uma probabilidade condicional de 1/10 quando apenas o interruptor 1 está fechado.
a) Prove que F_1 e $\bar{F}_2$ são independentes.
b) Calcule a probabilidade de o interruptor 2 estar fechado dado que há corrente entre os terminais A e B.

9. Supondo que em 60% dos dias de Dezembro chove e que um dado clube de futebol ganha 40% dos jogos disputados em dias de chuva e 50% nos dias sem chuva, determine:
a) a probabilidade do clube ganhar um jogo disputado em Dezembro.
b) a probabilidade de ter estado um dia chuvoso, sabendo que nesse dia o clube ganhou o jogo.

10. Um teste é constituído por uma pergunta com n alternativas. O indivíduo que o faz ou conhece a resposta ou responde ao acaso. Seja p a probabilidade de um indivíduo conhecer a resposta. Admitindo que a probabilidade de um indivíduo responder correctamente à questão dado que conhece a resposta é 1 e que a probabilidade de responder correctamente dado que responde ao acaso é $1/n$:
a) Verique que a probabilidade de um indivíduo não ter respondido ao acaso dado que respondeu correctamente é $\frac{np}{1+(n-1)p}$.
b) Calcule a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não responder correctamente à questão, supondo n = 5 e p = 0.2.

11. Seja X a v.a. que representa o número de automóveis procurados por dia num certo "stand". A função massa de probabilidade de X é dada por:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X= x_i)$	1/20	*a*	*b*	1/3	1/4

a) Sabendo que em 75% dos dias são procurados pelo menos dois automóveis, calcule *a* e *b*.
b) Calcule a probabilidade de virem a ser procurados três automóveis num dia em que a procura foi de pelo menos dois.
c) Determine a função de distribuição de X.
d) Calcule o valor esperado para a procura diária de automóveis e o respectivo desvio padrão.

12. O número de minerais que compõem as rochas de determinado tipo é uma v.a. X cuja função de distribuição é a seguinte:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/6 & 1\le x<2 \\ 1/2 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

a) Determine a correspondente função massa de probabilidade.
b) Determine o valor das seguintes probabilidades: $P\{1.5 < X \le 3\}$; $P\{1\le X < 3\}$; $P\{2 \le X \le 5\}$ e $P\{X > 2\}$.

13. A percentagem de álcool num composto pode ser considerada uma v.a. X cuja f.d.p. é:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   a) Calcule: $P\{X \le 2/3\}$, $P\{1/2 < X < 3/2\}$, $P\{X \le 2/3 \mid 1/2 < X < 3/2\}$
   b) Suponha que o preço de venda desse composto depende da percentagem de álcool: se $1/3<X<2/3$ o composto é vendido por A1 euros por litro; caso contrário por A2 euros por litro. Determine a distribuição de probabilidade do lucro líquido por litro, supondo que o custo é de B euros por litro.

14. As auditorias são feitas às empresas com a finalidade de fiscalizar a sua contabilidade. Os empregados das empresas fazem erros nos registos de entrada em cerca de 5% das vezes. Suponhamos que um auditor inspeciona aleatoriamente três entradas.
   a) Determine a distribuição de probabilidade de Y, que representa o n.º de erros detectados pelo auditor.
   b) Represente graficamente a f.m.p. de Y e calcule E(Y) e Var(Y).
   c) Qual a probabilidade de o auditor encontrar mais do que um erro?

15. De 60 candidatos a determinada universidade inglesa, 20 são estrangeiros. Escolhidos 10 candidatos ao acaso, determine a probabilidade de:
   a) 5 serem estrangeiros;
   b) no máximo 2 serem estrangeiros.

16. O número de nascimentos por hora numa certa maternidade é uma v.a. de Poisson. Sabe-se que a probabilidade de não haver nascimentos durante uma hora é 0.368.
   a) Determine a probabilidade de ocorrerem pelo menos três nascimentos numa hora.
   b) Qual a probabilidade de em três horas haver no máximo 2 nascimentos?
   c) Qual a probabilidade de em duas horas haver quanto muito um nascimento em cada uma delas?

17. Num armazém encontra-se um lote de 10000 latas e um certo produto alimentar que esta a ser preparado para ser distribuído. 500 dessas latas já ultrapassaram o prazo de validade. É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 15 embalagens escolhidas ao acaso com reposição. A inspecção rejeita o lote se forem encontradas mais do que duas latas fora do prazo de validade nessa amostra.
   a) Qual a probabilidade de rejeição do lote?
   b) Qual o número esperado de latas fora do prazo de validade?
   c) Suponha que as latas são inspeccionadas sucessivamente (com reposição) até ser encontrada uma fora do prazo de validade.
      i) Qual a probabilidade de ser necessário inspeccionar 4 ou mais latas?
      ii) Qual o número esperado de latas inspeccionadas?

18. Um motor de arranque usado em veículos espaciais tem uma elevada taxa de fiabilidade e tem probabilidade 0.99999 de arrancar em qualquer ocasião. Qual é a probabilidade de haver pelo menos uma falha nos próximos 10 000 arranques?

19. Para um carro que viaje a 48 km/h, a distância requerida para travar até parar é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 15 metros e desvio-padrão 2 metros. Suponha que está a viajar numa zona residencial a 48 km/h e que um carro surge de repente no seu caminho a uma distância de 18 metros.
   a) Se aplicar os travões, qual é a probabilidade de parar no máximo em 12 metros? E em 15 metros ou menos?
   b) Se a única forma de evitar uma colisão for travar até parar, qual é a probabilidade de evitar um acidente?

20. Admitindo que as notas da prova escrita no exame de Probabilidades e Estatística seguem uma distribuição Gaussiana de valor médio 11 e desvio-padrão 3, calcule:
    a) A percentagem de alunos que se espera obtenham notas nos seguintes intervalos
       [0, 4[[4, 8[[8, 12[[12, 16[[16, 20]
    b) Dos 50 alunos que fazem prova escrita:
       i) quantos se espera que reprovem? (menos de 8.5)
       ii) Qual o número esperado de alunos que vão fazer oral (nota no intervalo [10, 12[ou >16).
       iii) Qual a nota máxima esperada no grupo dos 12 alunos de pior nota?

21. O tempo (em horas) que um gestor demora a avaliar um projecto é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio igual a 10 horas e desvio-padrão igual a 2 horas.
    a) Determine a probabilidade do gestor demorar entre 9 e 11 horas a avaliar um determinado projecto.
    b) Se ao gestor fosse pedido para prever o tempo necessário para avaliar um dado projecto, de modo a que a probabilidade de o estudo não estar concluído nesse tempo fosse apenas igual a 0.025, que valor indicaria?
    c) O gestor recebe uma compensação monetária sempre que termina a avaliação de um projecto em menos de 8 horas. Admitindo que o gestor recebeu 7 projectos distintos para avaliar, calcule a probabilidade de ser compensado em pelo menos 2 projectos (exame 17/6/09).

22. Um dos elevadores dum grande edifício público transporta, no máximo, 20 pessoas de cada vez. A carga máxima transportada pelo elevador é de 1300 Kg. Os utilizadores deste elevador pertencem a um largo estrato duma população em que se verificou que o peso duma pessoa é aproximadamente normal com valor esperado 61 Kg e desvio padrão 10 Kg.
    a) Calcule a probabilidade do peso destes 20 utilizadores exceder a carga máxima.
    b) Sabendo que estão 15 pessoas no elevador com um peso de 950 Kg e que se espera a entrada de mais 5 pessoas para completar a lotação e iniciar a viagem, determine a probabilidade do peso total destes 20 passageiros exceder a carga máxima.
    c) Qual a probabilidade de haver nas 20 pessoas, que em certo momento viajam no elevador,
       i) quando muito 2 com peso superior a 85 Kg?
       ii) pelo menos 1 com peso inferior a 40 Kg?
    d) Acha que, em face do tipo de população que utiliza o elevador, a carga máxima indicada é adequada? Explique a sua opinião.

23. Numa certa população, 15% das pessoas têm sangue tipo Rh-negativo. Um banco de sangue recebeu 92 dadores num determinado dia.
    a) Qual a probabilidade de que 10 ou menos sejam Rh-negativo?
    b) Qual a probabilidade de que entre 15 a 20 (inclusive) dos dadores sejam Rh-negativo?
    c) Qual a probabilidade de que mais do 80 dadores sejam Rh-negativo?

24. Numa fábrica há máquinas de tipo I e tipo II a funcionar. A probabilidade de que uma máquina vá para o estaleiro para reparação ao fim de um certo período de tempo é p1= 0.2 e p2= 0.4 se for de tipo I ou II respectivamente. O número total de máquinas de tipo I em serviço é n1=1000 e de tipo II é n2= 1500.
    i) Calcule a probabilidade de uma máquina daquela fábrica ir para reparação.
    ii) Calcule um valor aproximado da probabilidade do número de máquinas de ambos os tipos que estão em reparação estar compreendido entre 750 e 850.
    iii) Qual deve ser a capacidade do estaleiro de modo a satisfazer todos os pedidos de reparação com probabilidade igual a 0.99?

25. O número de pessoas X que dão entrada por dia na UCI (unidade de cuidados intensivos) de um determinado hospital, é uma v.a. com distribuição de Poisson de valor médio 5.
    a) Qual a probabilidade de que entrem duas pessoas na UCI num determinado dia? E no máximo duas?
    b) Qual a probabilidade de entrarem no máximo 4 pessoas na UCI, num dia em que na UCI entram mais de duas pessoas?
    c) Fazendo as hipóteses que achar convenientes, calcule a probabilidade de no ano de 2003 terem dado entrada na UCI entre 1800 a 1900 pessoas? Justifique.

26. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de probabilidade conjunta dada por:

X/Y	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

    Mostre que Cov(X, Y) = 0 mas que X e Y não são independentes.

27. A emissão de uma fonte radioativa é tal que o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos, X, tem distribuição de Poisson com $E(X^2) = 6$.
    a) Observada a emissão durante 7 períodos consecutivos de 10 segundos, qual a probabilidade de, em pelo menos um desses períodos, serem emitidos 4 ou mais partículas?
    b) Um contador Geiger-Muller, que vai registando as emissões sucessivas, tem uma probabilidade 0.9 de registar cada partícula que é emitida.
        i) Sabendo que o número de partículas registadas em x ($x \geq 1$) partículas emitidas por período tem uma distribuição binomial, mostre que o número de partículas registadas por período tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0.9 \times 2$.
        ii) Determine o valor esperado do número de partículas registadas por período.

28. A tabela seguinte apresenta o número de palavras usadas em 57 poemas de um dos Cancioneiros medievais portugueses (Cancioneiro da Ajuda):

68	65	12	22	63
43	32	43	42	25
49	27	27	74	38
49	30	51	42	28
36	36	27	23	28
42	31	19	32	28
50	46	79	31	38
30	27	28	21	43
22	25	16	49	23
45	24	12	24	12
69	44	25	57	47
51	23			

    a) Ordene a amostra com recurso a um diagrama de caule-e-folhas.
    b) Faça a representação gráfica dos dados que achar mais adequada.
    c) Calcule a média, a variância, a mediana e a amplitude inter-quartis. Comente os resultados obtidos.
    d) Represente a caixa-com-bigodes correspondente. Que pode dizer sobre a simetria da distribuição?

29. Os seguintes dados representam o tempo de vida em anos, arredondado às décimas, de 30 bombas de combustível semelhantes:

2.0	0.4	0.2	1.8	1.5
3.0	0.2	2.3	4.7	0.5
0.3	6.0	1.5	0.7	2.5
3.3	5.5	4.0	4.5	5.0
1.3	6.5	5.9	0.3	1.0
6.0	5.6	6.0	1.2	0.2

a) Represente os dados anteriores, e interprete as representações obtidas, utilizando:
   i) um diagrama de caule-e-folhas; ii) um histograma.
b) Calcule as características amostrais: média, mediana, quartis e desvio-padrão.
c) Construa a *box-plot*.

30. Os dados que a seguir se apresentam correspondem aos valores de tensão intra-ocular (mmHg) registados em 20 indivíduos idosos. Os 10 indivíduos que formam o Grupo I colocaram diariamente, durante um certo período de tempo, uma gota de um medicamento cujo objectivo é controlar os valores da tensão. Os indivíduos que constituem o Grupo II servem de controlo (exame 17/6/09).

Grupo I	16.2 12.7 14.8 15.6 14.7 13.8 16.7 13.7 16.8 14.7
Grupo II	16.1 16.3 14.0 16.2 15.2 16.5 14.4 16.3 16.9 13.7

a) Calcule a média, a variância e o desvio padrão dos dados de cada um dos grupos.
b) Calcule a mediana e os 1º e 3ºs quartis relativos aos dados dos Grupos I e II. Haverá *outliers* em alguma das amostras?
c) Construa caixas-com-bigodes paralelas para os dados dos dois grupos. O que pode deduzir?

31. O quadro que se segue apresenta o número de golos por jogo, da 1ª Liga Profissional de Futebol portuguesa, na época 1999/2000:

Nºde golos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nºde jogos	27	67	80	69	29	19	12	2	1

a) Represente graficamente esta informação da forma que entender mais adequada.
b) Será que se pode considerar os jogos com mais de 6 golos como sendo outliers?
c) Determine a média e o desvio padrão do número de golos por jogo.

32. Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s associadas a n pesagens independentes de um certo corpo, em gramas. Assumindo que seguem uma distribuição Gaussiana de valor médio μ e desvio padrão 0.5, quantas pesagens devem ser feitas de modo a que a média destas não se afaste do valor médio do peso do corpo mais de 0.20 gramas, com probabilidade 0.99?

33. Para determinar a altura média dos estudantes de uma dada universidade, mediram-se as alturas de uma amostra aleatória de 25 estudantes, tendo-se obtido os valores 170 cm e 5 cm, respectivamente para a média e para o desvio-padrão da amostra. Supondo que a altura dos estudantes é uma v.a. gaussiana, construa um intervalo de 99% de confiança para o valor médio da altura dos estudantes da universidade em causa.

34. Numa sondagem realizada pela Motorpress a 100 automobilistas que tinham adquirido viatura há 12 meses, verificou-se que 87 tinham percorrido, naquele ano, mais de 10 000 km.
a) Baseado neste resultado determine um intervalo de 95% de confiança para a probabilidade de um condutor percorrer mais de 10 000 km no primeiro ano em que adquire o carro.
b) Determine ainda o número de condutores a incluir na sondagem de modo a garantir um erro de estimação inferior a 5%, com probabilidade 95%.

35. Os seguintes valores correspondem aos volumes (em m3) de madeira obtidos pelo abate de 40 árvores de uma determinada região:

7.1	7.2	7.2	8.5	8.5	8.6	9.1	9.2	9.3	9.5
9.7	9.8	9.9	10.0	10.0	10.1	10.1	10.2	10.3	10.5
10.6	10.7	10.7	10.8	10.8	10.9	10.9	11.0	11.1	11.2
11.2	11.3	11.6	11.7	12.0	12.1	12.4	12.5	13.0	14.1

Estime a proporção de árvores com volume de madeira ***inferior a*** *12.0 m^3*. Construa um intervalo de **90%** de confiança para a verdadeira **proporção** de árvores com volume de madeira ***inferior a*** *12.0 m^3*.

36. A produção anual (em litros) de leite de vacas de determinada espécie é uma v.a. gaussiana com variância 123.21 litros^2. Numa vacaria de 100 vacas desta espécie, a produção anual média é de 68 litros. Com base nestes dados, poder-se-à dizer que a produção anual média das vacas difere significativamente de 66.6 litros? Use α=5%.

37. Com a saída do novo Código da Estrada, tornou-se obrigatório o uso de cinto de segurança para os passageiros que viajam no banco de trás. Com o objectivo de saber se esta norma estava a ser cumprida interrogaram-se 300 automobilistas, 230 dos quais afirmaram que nas suas viaturas, os passageiros que viajavam atrás usavam regularmente cinto de segurança. Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese de que a proporção de passageiros que viajando atrás usam regularmente cinto de segurança é de 75%.

38. Numa Experiência laboratorial pretende-se fazer a contagem do número de células de levedura em suspensão num certo líquido, utilizando-se para tal uma hematímetro. Admite-se que o número de células existentes em cada quadrado do hematímetro segue uma distribuição de Poisson com valor médio 2. Os resultados relativos ao número de células de levedura existentes nos 400 quadrados de um hematímetro são as seguintes:

Nº de células por quadrado	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Nº de Quadrados	73	103	121	54	30	15	4

Analise, ao nível de significância de 5%, a possibilidade de que estes resultados sejam compatíveis com a hipótese estabelecida acerca da distribuição do número de células por quadrado.

39. Uma empresa de águas minerais efectuou mensalmente, nos últimos 6 anos, a análise do teor de cálcio da água emanada de uma nascente. Obtiveram-se os seguintes resultados:

Mg cálcio por litro	[115,120)	[120,125)	[125,130)	[130,135)	[135,140]
Frequências	6	18	26	14	8

Verifique se podemos considerar como Normal a distribuição do teor de cálcio da água, ao nível de significância de 5%.

40. Suponhamos agora que dispomos de observações de duas variáveis, peso em quilogramas de uma pessoa e a taxa de metabolismo (calorias consumidas em 24 horas). Esta taxa é importante no estudo da variação de peso com a dieta e o exercício físico. Os investigadores suspeitam que o peso tem grande influência no consumo de energia. Na tabela seguinte estão representados valores observados destas variáveis para 19 indivíduos de ambos os sexos:

Massa (kg)	Taxa (cal)	Massa (kg)	Taxa (cal)
62.0	1792	40.3	1189
62.9	1666	33.1	913
36.1	995	51.9	1460
54.6	1425	42.4	1124
48.5	1396	34.5	1052
42.0	1418	51.1	1347
47.4	1362	41.2	1204
50.6	1502	51.9	1867
42.0	1256	46.9	1439
48.7	1614		

a) Represente graficamente os dados e calcule o coeficiente de correlação empírico. Que mostra o gráfico?
b) Adapte o modelo que lhe pareça mais conveniente e justifique.

41. Os dados da tabela seguinte representam o nível de colesterol (em miligramas por litro) e a média diária de gordura saturada (em miligramas) ingerida por 10 atletas Olímpicos. Pretende-se averiguar da possível influência da gordura saturada ingerida por dia no nível de colesterol

Gordura-mg	**Colesterol-mg/l**
1290.0	1182.0
1350.0	1172.0
1470.0	1264.0
1600.0	1493.0
1710.0	1571.0
1840.0	1711.0
1980.0	1804.0
2230.0	1840.0
2400.0	1956.0
2930.0	1954.0

a) Represente graficamente os dados da tabela anterior e adapte a estes a melhor equação de regressão.
b) Calcule e represente graficamente os resíduos. Comente. Estime a variância σ^2.
c) Construa um IC de nível de confiança de 95% para o declive da recta de regressão. Que conclui?
d) De acordo com o modelo anterior qual o nível de colesterol esperado para uma quantidade de gordura saturada igual a 1600 mg?

42. Alguns estudantes de física têm de efectuar uma experiência para verificar a lei de Hooke, segundo a qual uma força que é aplicada a um corpo cujo comprimento é grande quando comparado com a sua área transversal, produz uma mudança y no seu comprimento proporcional à força x, isto é, $y = \beta x$, sendo β a constante de proporcionalidade. Os resultados obtidos por um grupo de alunos numa aula de laboratório estão apresentados na tabela seguinte:

Força (N)	**Alteração comprimento (mm)**
29.4	4.25
39.2	5.25
49.0	6.50
58.8	7.85
68.6	8.75
78.4	10.00

a) Adapte aos dados o modelo $y = \beta x + \varepsilon$, usando o método de mínimos quadrados.
b) Calcule os resíduos e represente-os graficamente. Estime a variância σ^2.