

Análise Matemática III**Ficha 0 — Revisão**

0.1. Consideramos um conjunto M de macacos e um predicato $p(t, x, y)$ cuja interpretação é: no instante $t \in \mathbb{R}$, o macaco $x \in M$ atira uma banana ao macaco $y \in M$. Interpretamos $p(t, x, y)$ como um acto de agressão perpetrado por x contra y .

Pressupostos:

- (a) Há abundância de bananas, ou seja, basta a intenção de x atirar contra y para o ataque se concretizar. Não distinguiremos entre ataques bem sucedidos e ataques que falharam o alvo.
- (b) Os macacos são eternos, ou seja, existem para qualquer instante $t \in \mathbb{R}$. O conjunto M não depende de t . O conjunto M tem pelo menos dois elementos (existem pelo menos dois macacos).

Transcreva em notação matemática as seguintes definições ou afirmações:

1. Um macaco nunca agride a si próprio. No que se segue, assumimos esta propriedade como axioma.
2. Nenhum macaco consegue agredir mais do que um dos seus companheiros ao mesmo tempo. No que se segue, assumimos esta propriedade como axioma.
3. O macaco $x \in M$, no instante t^* , atirou uma banana enquanto estava, no mesmo instante, a ser alvo de um ataque.
4. Chamamos “temível” a um macaco que nunca é alvo de um ataque. Esta designação sugere que ele nunca foi alvo de um ataque por ser temido pelos outros mas na realidade há outras explicações possíveis, por exemplo ele pode estar escondido algures e os outros macacos nunca deram pela sua existência. Ou simplesmente tem sorte.
5. O macaco $x \in M$ já foi alvo, nalgum momento, de um ataque por parte de todos os outros macacos (por parte de cada um dos outros macacos). Isto implica (mas não é equivalente a) x não ser temível.
6. Chamamos “pacifista” a um macaco que nunca atira banana. Esta designação sugere que ele não está interessado em brigas mas na realidade há outras explicações possíveis, por exemplo ele pode ter simplesmente medo dos outros.
7. O macaco $x \in M$ já atirou, nalgum momento, uma banana a todos os outros macacos (a cada um dos outros macacos). Isto implica (mas não é equivalente a) x não ser pacifista.
8. Todos os macacos são alvos de pelo menos um ataque nalgum momento (negação de “existe pelo menos um temível”).
9. Todos os macacos atiram pelo menos uma banana, pelo menos uma vez (negação de “existe pelo menos um pacifista”).
10. Dizemos que um macaco “tornou-se pacifista” a partir dum certo momento t^* se, após esse momento, nunca atira banana.
11. Com a idade, qualquer macaco ganha juízo. Ou seja, na vida de qualquer macaco existe um momento a partir do qual ele torna-se pacifista.
12. Existe um momento a partir do qual a população M , no seu inteiro, torna-se pacifista.

Análise Matemática III

13. Chamamos “reactivo” a um macaco que responde a um ataque com relativa rapidez (em menos de 10 segundos), atirando banana o agressor.
14. Dizemos que um macaco “tem mau feitio” se responde a um ataque com relativa rapidez (em menos de 10 segundos), mas pode retaliar contra outro macaco (não o agressor). Pode fazer isso, por exemplo, por cobardice: vinga-se contra um macaco mais fraco que ele.
15. Dizemos que um macaco “prefere a vingança servida a frio” se espera pelo menos 10 segundos antes de responder a um ataque. Aqui, “responder a um ataque” significa atirar banana ao agressor, como na definição 13.
16. Dizemos que um macaco “congela quando atacado” se, durante os 10 segundos posteriores a um ataque não atira banana a ninguém (nem ao agressor nem a outros, como na definição 14).
17. Chamamos “conflituoso” a um macaco que (pelo menos uma vez na vida) iniciou um conflito, ou seja, atirou banana a outro macaco que nunca o tinha atacado previamente.
18. No momento t^* começa uma trégua de 600 segundos (ninguém atira banana).

Observações :

19. A afirmação 12 implica a afirmação 11 mas não necessariamente o contrário.
20. Se a população M for finita, então as afirmações 11 e 12 são equivalentes.
21. Se um macaco é reactivo, também tem mau feitio.
22. Se um macaco congela quando atacado, também prefere a vingança servida a frio.
23. Seja $x \in M$ um macaco temível. Como x nunca foi alvo de um ataque, temos a tendência a pensar que os rótulos “reactivo” ou “de mau feitio” ou “prefere a vingança servida a frio” ou “congela quando atacado” não se aplicam a ele. Mas a lógica matemática não funciona assim. As definições 13, 14, 15 e 16 foram enunciadas para qualquer macaco, seja ele temível ou não. Um macaco temível é por definição reactivo (e, por conseguinte, também tem mau feitio); também congela quando atacado (e, por conseguinte, prefere a vingança servida a frio). Esta observação pode parecer misteriosa, mas a sua compreensão é importantíssima para o estudo da matemática.

Responda às seguintes perguntas :

24. Um macaco que nunca interagiu (nunca atirou banana e nunca foi alvo de ataque) é temível ou é pacifista ?
25. Um macaco pacifista prefere a vingança servida ao frio ?
26. Suponhamos que no conjunto M não existe nenhum macaco conflituoso; isso implica que nunca houve e nunca haverá agressões? Recorde-se que os macacos são eternos – ver pressuposto (b). Para simplificar a análise, podemos supor que só existem dois macacos (M só tem dois elementos).

Análise Matemática III

0.2. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas ?

- (a) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (b) $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (d) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (e) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (f) $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (g) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$
- (h) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq n$

Nestas perguntas, não é importante se consideramos que $\mathbb{N}$ contém 0 ou não.

0.3. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas ?

- (a) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m < n$
- (b) $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n$
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m < n$
- (d) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n$
- (e) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m < n$
- (f) $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m < n$
- (g) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m < n$
- (h) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m < n$

Nestas perguntas, não é importante se consideramos que $\mathbb{N}$ contém 0 ou não.

0.4. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas ?

- (a) $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (g) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (h) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Análise Matemática III

0.5. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas ?

- (a) $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y$
- (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$
- (c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y$
- (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$
- (e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$
- (f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$
- (g) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$
- (h) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$

0.6. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas ?

- (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > 1$
- (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, n\varepsilon > 1$

0.7. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão real e seja $a \in \mathbb{R}$. Escreva a definição que corresponde a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

Escreva também a sua negação lógica, correspondente à afirmação “ a não é o limite de a_n ”. Faça o mesmo com $a = +\infty$ e $a = -\infty$.

0.8. Para cada um dos conjuntos seguintes, (i) descreva o conjunto; (ii) diga se o conjunto é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado; (iii) diga se o conjunto é minorado, majorado, limitado, ou não limitado.

- (a) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]1 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}[$;
- (b) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}[$.

0.9. Seja $A_n :=]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Escreva A_1, A_2, A_3 . Esboça os três conjuntos na mesma reta real.
- (b) Uma das afirmações seguintes é verdadeira? Porque?

- (i) $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Quais dos seguintes números pertencem a A_n para todo o $n \in \mathbb{N}$? Caso um número *não* pertença a todo o A_n , indique uma escolha concreta de n tal que o número não seja elemento de A_n .

- (i) 1; (ii) $\frac{3}{2}$; (iii) 0; (iv) $-0,1$; (v) $-0,01$; (vi) 1,001.

(d) Determine $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(e) Os conjuntos A_n são todos intervalos abertos. Segue que A também é um intervalo aberto?