

# Oscilações e Ondas

## Problemas

### Módulo I — Oscilações e ondas

*45 exercícios organizados em nove conjuntos sequenciais, com cinco exercícios por aula teórico-prática.*

## Conteúdo

|    |                                                             |    |
|----|-------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Oscilador harmónico                                         | 2  |
| 2  | Oscilações amortecidas e forçadas                           | 4  |
| 3  | Osciladores acoplados e modos normais                       | 6  |
| 4  | Descritores das ondas                                       | 7  |
| 5  | Equação da onda                                             | 8  |
| 6  | Soluções da equação da onda                                 | 9  |
| 7  | Ondas planas, cilíndricas e esféricas                       | 10 |
| 8  | Energia, fluxo e propagação de ondas                        | 11 |
| 9  | Condições de fronteira, ondas estacionárias e interferência | 12 |
| 10 | Exercícios extra                                            | 14 |

# 1 Oscilador harmónico

## Exercício 1 — Equilíbrio e força restauradora

Uma massa  $m = 0.50 \text{ kg}$  está ligada a uma mola horizontal de constante elástica  $k = 200 \text{ N m}^{-1}$ . A origem das coordenadas coincide com a posição de equilíbrio.

- (a) Determine a força para  $x = 3.0 \text{ cm}$ .
- (b) Explique por que razão esta força é restauradora.
- (c) Determine a aceleração da massa nessa posição.
- (d) Indique o sentido da aceleração.

## Exercício 2 — Movimento harmónico simples

Para o sistema anterior, a massa é afastada de  $A = 5.0 \text{ cm}$  e largada do repouso.

- (a) Determine a frequência angular.
- (b) Determine o período e a frequência.
- (c) Escreva  $x(t)$ .
- (d) Determine a velocidade máxima.

## Exercício 3 — Energia do oscilador

Uma massa  $m = 0.20 \text{ kg}$  oscila numa mola de constante  $k = 80 \text{ N m}^{-1}$ , com amplitude  $A = 10 \text{ cm}$ .

- (a) Determine a energia mecânica total.
- (b) Determine a energia potencial e cinética para  $x = 6 \text{ cm}$ .
- (c) Determine a velocidade nesse ponto.

## Exercício 4 — Determinação de uma constante elástica

Um sistema massa-mola é utilizado para determinar experimentalmente a constante de uma mola. Para uma massa de  $0.40 \text{ kg}$ , mede-se  $T = 0.80 \text{ s}$ .

- (a) Determine  $k$ .
- (b) Se a massa passar para  $0.90 \text{ kg}$ , determine o novo período.
- (c) Explique como uma medição de períodos pode ser usada para caracterizar uma mola.

### Exercício 5 — Pêndulo de pequenas oscilações

Um pêndulo simples de comprimento  $L = 0.80$  m é deslocado de um pequeno ângulo e largado.

- (a) Mostre que, para pequenos ângulos, o movimento é aproximadamente harmônico.
- (b) Determine o período.
- (c) Determine a frequência.
- (d) Compare com um sistema massa-mola e identifique a frequência angular.

## 2 Oscilações amortecidas e forçadas

### Exercício 6 — Amortecimento exponencial

A amplitude de um oscilador amortecido é descrita por

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

Inicialmente  $A_0 = 10 \text{ cm}$  e, após  $5.0 \text{ s}$ , a amplitude é  $3.68 \text{ cm}$ .

- (a) Determine  $\beta$ .
- (b) Determine a amplitude após  $10 \text{ s}$ .
- (c) Determine o tempo necessário para a amplitude diminuir para 10% do valor inicial.

### Exercício 7 — Regime subamortecido

Um sistema obedece a

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

com  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  e  $\beta = 2 \text{ s}^{-1}$ .

- (a) Identifique o regime de amortecimento.
- (b) Determine a frequência angular amortecida.
- (c) Compare o período amortecido com o período sem amortecimento.

### Exercício 8 — Regimes de amortecimento

Considere um sistema com frequência natural  $\omega_0 = 8 \text{ rad s}^{-1}$ . Classifique o movimento para

$$\beta = 3 \text{ s}^{-1}, \quad \beta = 8 \text{ s}^{-1}, \quad \beta = 12 \text{ s}^{-1}.$$

### Exercício 9 — Oscilador forçado

Um oscilador é excitado por

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t).$$

A sua frequência natural é  $f_0 = 5.0 \text{ Hz}$ .

- (a) Indique a frequência angular natural.
- (b) Compare qualitativamente a resposta para  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $f = 5 \text{ Hz}$  e  $f = 20 \text{ Hz}$ .
- (c) Explique a diferença entre regime transitório e estacionário.

### Exercício 10 — Ressonância e factor de qualidade

A resposta de um oscilador apresenta um pico de ressonância centrado em  $f_0 = 100 \text{ Hz}$ . As frequências de meia potência são  $f_1 = 95 \text{ Hz}$  e  $f_2 = 105 \text{ Hz}$ .

- (a) Determine a largura de ressonância.
- (b) Determine o factor de qualidade.
- (c) Compare com outro sistema de mesma frequência natural mas com largura 40 Hz.

### 3 Osciladores acoplados e modos normais

#### Exercício 11 — Duas massas independentes

Duas massas iguais  $m$  estão ligadas separadamente a molas idênticas de constante  $k$ .

- (a) Escreva as equações de movimento.
- (b) Determine a frequência natural de cada oscilador.
- (c) Explique por que ainda não existe acoplamento.

#### Exercício 12 — Duas massas acopladas

Duas massas iguais  $m$  estão ligadas a paredes por molas de constante  $k$  e entre si por uma mola de constante  $k_c$ .

- (a) Escreva as equações de movimento.
- (b) Identifique a força exercida pela mola de acoplamento sobre cada massa.

#### Exercício 13 — Modos normais

Para o sistema anterior, determine as frequências dos dois modos normais, correspondentes a movimentos em fase e em oposição de fase.

#### Exercício 14 — Coordenadas normais

Defina

$$q_+ = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad q_- = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}.$$

- (a) Determine  $x_1$  e  $x_2$  em função de  $q_+$  e  $q_-$ .
- (b) Mostre que estas coordenadas desacoplam as equações de movimento.
- (c) Identifique as frequências associadas a cada coordenada normal.

#### Exercício 15 — Transferência de energia e cadeia de osciladores

Dois osciladores fracamente acoplados têm frequências próprias

$$f_1 = 9.8 \text{ Hz}, \quad f_2 = 10.2 \text{ Hz}.$$

- (a) Determine a frequência média.
- (b) Determine a diferença de frequências.
- (c) Estime a escala temporal associada à troca lenta de energia.
- (d) Explique qualitativamente como uma cadeia de muitos osciladores pode conduzir a uma descrição ondulatória.

## 4 Descritores das ondas

### Exercício 16 — Descritores fundamentais

Uma onda sinusoidal tem amplitude 4.0 mm, período 0.20 s e comprimento de onda 0.60 m. Determine

$$f, \quad \omega, \quad k, \quad v.$$

### Exercício 17 — Equação de uma onda

Uma onda propaga-se no sentido positivo de  $x$ , com

$$A = 2.0 \text{ cm}, \quad \lambda = 1.0 \text{ m}, \quad f = 2.0 \text{ Hz}.$$

Escreva uma expressão para a onda, admitindo fase inicial nula.

### Exercício 18 — Diferença de fase

Para uma onda de comprimento de onda  $\lambda = 40 \text{ cm}$ , determine a diferença de fase entre dois pontos separados por

$$\Delta x = 10 \text{ cm}, \quad \Delta x = 20 \text{ cm}, \quad \Delta x = 40 \text{ cm}.$$

### Exercício 19 — Medição de uma onda acústica

Uma onda sonora tem frequência 2.0 kHz e propaga-se a  $340 \text{ m s}^{-1}$ .

- (a) Determine o comprimento de onda.
- (b) Determine o número de onda.
- (c) Determine a frequência angular.
- (d) Determine quantos comprimentos de onda cabem em 3.4 m.

### Exercício 20 — Velocidade de propagação e movimento local

Considere

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t).$$

- (a) Determine a velocidade transversal de uma partícula do meio.
- (b) Determine a aceleração transversal.
- (c) Mostre que cada ponto do meio executa um movimento harmónico simples.
- (d) Explique a diferença entre esta velocidade e a velocidade de propagação da onda.

## 5 Equação da onda

### Exercício 21 — Velocidade numa corda

Uma corda possui densidade linear  $\mu = 4.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$  e está submetida a uma tensão  $T = 100 \text{ N}$ . Determine a velocidade de propagação.

### Exercício 22 — Verificação de uma solução

Verifique que

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

é solução de

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

desde que exista uma relação apropriada entre  $\omega$ ,  $k$  e  $v$ .

### Exercício 23 — Efeito da tensão no comprimento de onda

Uma corda é excitada a frequência constante  $f = 200 \text{ Hz}$ . Inicialmente  $T_1 = 50 \text{ N}$  e depois  $T_2 = 200 \text{ N}$ . A densidade linear é  $\mu = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ . Determine os dois comprimentos de onda.

### Exercício 24 — Significado físico da curvatura

Considere uma corda cuja forma instantânea apresenta uma região com grande curvatura espacial.

- (a) Relacione a curvatura com  $\partial^2 y / \partial x^2$ .
- (b) Explique o que a equação da onda prevê para a aceleração local.
- (c) Compare uma região aproximadamente retilínea com uma região fortemente curvada.

### Exercício 25 — Do sistema discreto ao limite contínuo

Uma cadeia de massas iguais  $m$ , separadas por uma distância  $a$ , está ligada por molas de constante  $K$ . A equação discreta é

$$m\ddot{y}_n = K(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}).$$

Usando uma expansão de Taylor, mostre que, no limite contínuo, se obtém uma equação da onda e determine a velocidade de propagação em função de  $K$ ,  $m$  e  $a$ .

## 6 Soluções da equação da onda

### Exercício 26 — Forma de uma onda viajante

Considere

$$y(x, t) = f(x - vt).$$

- (a) Mostre que a forma se desloca para a direita.
- (b) Determine a posição, no instante  $t$ , de um máximo inicialmente situado em  $x = 0$ .

### Exercício 27 — Pulso gaussiano

Considere

$$y(x, t) = A \exp \left[ -\frac{(x - vt)^2}{2\sigma^2} \right].$$

- (a) Determine a posição do máximo.
- (b) Determine a amplitude máxima.
- (c) Explique o significado físico do parâmetro  $\sigma$ .

### Exercício 28 — Representação complexa

Escreva

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

como parte real de uma expressão complexa. Use a representação para determinar formalmente as derivadas temporal e espacial da onda.

### Exercício 29 — Velocidade de fase e relação de dispersão

Num meio não dispersivo,

$$\omega = vk.$$

- (a) Determine a velocidade de fase.
- (b) Explique por que a velocidade não depende da frequência.
- (c) Se, noutro meio,  $\omega = ak^2$ , determine a velocidade de fase e discuta a existência de dispersão.

### Exercício 30 — Pacote de onda e velocidade de grupo

Considere duas componentes harmônicas com números de onda próximos  $k_1$  e  $k_2$  e frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

- (a) Explique como a soma pode produzir uma envolvente.
- (b) Defina a velocidade de grupo.
- (c) Para a relação de dispersão  $\omega = ak^2$ , determine  $v_g$ .
- (d) Compare  $v_g$  com a velocidade de fase.

## 7 Ondas planas, cilíndricas e esféricas

### Exercício 31 — Ondas planas

Considere

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(kz - \omega t).$$

- (a) Determine a direcção de propagação.
- (b) Descreva geometricamente as frentes de onda.

### Exercício 32 — Onda cilíndrica

Uma fonte linear ideal produz uma onda cuja amplitude varia aproximadamente como

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Se a amplitude a  $r_1 = 1$  m for  $A_1$ , determine a amplitude a  $r_2 = 9$  m.

### Exercício 33 — Onda esférica

Uma fonte pontual produz uma onda cuja amplitude é

$$A(r) = \frac{C}{r}.$$

A amplitude a 2 m é 6 mm.

- (a) Determine a amplitude a 8 m.
- (b) Determine a razão entre as intensidades nesses dois pontos.

### Exercício 34 — Potência de uma fonte isotrópica

Uma fonte isotrópica emite  $P = 2.0$  W.

- (a) Determine a intensidade a 1 m.
- (b) Determine a intensidade a 5 m.
- (c) Verifique a dependência da intensidade com a distância.

### Exercício 35 — Aproximação de onda plana

Uma fonte está a uma distância  $R = 20$  m de uma região de observação com dimensão transversal  $d = 0.20$  m.

- (a) Determine a razão  $d/R$ .
- (b) Discuta se a frente de onda pode ser aproximada por um plano.
- (c) Repita a discussão para uma região de dimensão 10 m.

## 8 Energia, fluxo e propagação de ondas

### Exercício 36 — Dependência da energia com a amplitude

Uma onda numa corda tem amplitude  $A$ . Outra onda, no mesmo meio e com a mesma frequência, tem amplitude  $2A$ . Determine a razão entre as energias transportadas.

### Exercício 37 — Energia média numa corda

Uma onda harmónica numa corda é descrita por

$$y = A \cos(kx - \omega t).$$

Mostre que a energia cinética média por unidade de comprimento é proporcional a  $\mu A^2 \omega^2$  e determine o factor numérico.

### Exercício 38 — Potência numa corda

Uma corda possui

$$\mu = 3.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}, \quad T = 120 \text{ N}.$$

Uma onda de amplitude  $A = 1.5 \text{ mm}$  e frequência  $f = 80 \text{ Hz}$  propaga-se na corda. Determine a potência média transportada.

### Exercício 39 — Intensidade e detector

Um detector de área  $S = 4.0 \text{ cm}^2$  é colocado num campo cuja intensidade é  $I = 2.5 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$ .

- (a) Determine a potência recebida.
- (b) Determine a energia recebida durante 30 s.

### Exercício 40 — Espalhamento geométrico

Uma fonte aproximadamente pontual produz uma intensidade  $I_1 = 1.0 \text{ W m}^{-2}$  a 2 m.

- (a) Determine a intensidade a 6 m.
- (b) Determine a distância a que a intensidade é 1% de  $I_1$ .
- (c) Explique a diferença entre perda por espalhamento geométrico e absorção.

## 9 Condições de fronteira, ondas estacionárias e interferência

### Exercício 41 — Reflexão numa extremidade fixa

Uma onda incidente numa corda é

$$y_i = A \sin(kx - \omega t).$$

A extremidade em  $x = 0$  é fixa.

- (a) Determine uma expressão adequada para a onda reflectida.
- (b) Determine a onda resultante.
- (c) Mostre que a extremidade fixa corresponde a um nó.

### Exercício 42 — Modos próprios de uma corda

Uma corda de comprimento  $L = 1.20 \text{ m}$  está fixa nas duas extremidades. A velocidade de propagação é  $v = 180 \text{ m s}^{-1}$ . Determine as três primeiras frequências próprias.

### Exercício 43 — Interferência de duas ondas

Duas ondas de mesma amplitude são

$$y_1 = A \cos \theta, \quad y_2 = A \cos(\theta + \phi).$$

Determine a amplitude resultante e avalie os casos

$$\phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \pi.$$

### Exercício 44 — Batimentos

Duas fontes produzem ondas com frequências

$$f_1 = 500 \text{ Hz}, \quad f_2 = 506 \text{ Hz}.$$

- (a) Determine a frequência dos batimentos.
- (b) Determine o intervalo entre dois máximos sucessivos da envolvente.
- (c) Explique a origem física do fenómeno.

### Exercício 45 — Reflexão, impedância e ecos

Uma onda acústica incide perpendicularmente numa interface entre dois meios com impedâncias

$$Z_1 = 1.50 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}, \quad Z_2 = 1.80 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}.$$

- (a) Determine o coeficiente de reflexão de amplitude.
- (b) Determine a fracção de intensidade reflectida.

- (c) Explique como a onda reflectida pode produzir interferência com outras ondas presentes no meio.
- (d) Explique como o tempo de chegada de um eco pode fornecer informação sobre a posição de uma interface.

## 10 Exercícios extra

### Exercício 46 — Oscilação de um sistema de medição

Um pequeno elemento de massa  $m = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$  está suspenso por um sistema elástico de constante efectiva  $k = 8.0 \text{ N m}^{-1}$ . Após um pequeno deslocamento, o sistema é largado do repouso.

- (a) Determine a frequência angular natural.
- (b) Determine o período de oscilação.
- (c) Se o deslocamento inicial for  $1.5 \text{ mm}$ , escreva a expressão do deslocamento em função do tempo.
- (d) Determine a velocidade máxima.

### Exercício 47 — Decaimento de uma oscilação amortecida

A resposta livre de um pequeno sistema mecânico é descrita por

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t),$$

com

$$A_0 = 4.0 \text{ mm}, \quad \beta = 0.50 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_d = 12 \text{ rad s}^{-1}.$$

- (a) Determine a amplitude após  $2.0 \text{ s}$ .
- (b) Determine a razão entre as amplitudes após dois intervalos sucessivos de  $1.0 \text{ s}$ .
- (c) Determine a frequência das oscilações amortecidas.
- (d) Explique por que razão o sinal pode desaparecer gradualmente mesmo continuando a oscilar.

### Exercício 48 — Ressonância e selectividade

Um sistema apresenta uma frequência de ressonância de

$$f_0 = 2.0 \text{ MHz}.$$

As frequências de meia potência são

$$f_1 = 1.96 \text{ MHz}, \quad f_2 = 2.04 \text{ MHz}.$$

- (a) Determine a largura de ressonância.
- (b) Determine o factor de qualidade.
- (c) Um segundo sistema apresenta a mesma frequência central mas uma largura de  $0.40 \text{ MHz}$ . Compare os dois sistemas quanto à selectividade.
- (d) Indique qualitativamente qual deles responde a uma gama mais estreita de frequências.

### Exercício 49 — Dois modos de vibração

Dois elementos idênticos de massa

$$m = 0.10 \text{ kg}$$

estão ligados a suportes por molas de constante

$$k = 100 \text{ N m}^{-1}$$

e entre si por uma mola de acoplamento de constante

$$k_c = 25 \text{ N m}^{-1}.$$

- (a) Determine a frequência angular do modo em que os dois elementos se movem em fase.
- (b) Determine a frequência angular do modo em que se movem em oposição de fase.
- (c) Indique qual dos dois modos deforma a mola de acoplamento.
- (d) Explique por que as duas frequências são diferentes.

### Exercício 50 — Medição de velocidade de propagação

Um pulso percorre uma distância de 12 cm em 80  $\mu\text{s}$ .

- (a) Determine a velocidade de propagação.
- (b) Se um sinal harmónico com frequência 5.0 MHz se propagar no mesmo meio, determine o comprimento de onda.
- (c) Determine o número de onda.
- (d) Determine a frequência angular.

### Exercício 51 — Verificação experimental da equação da onda

Num meio unidimensional, mede-se uma perturbação descrita por

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

com

$$k = 4.0 \times 10^3 \text{ rad m}^{-1}, \quad \omega = 6.0 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}.$$

- (a) Determine a velocidade de fase.
- (b) Calcule  $\partial^2 u / \partial t^2$ .
- (c) Calcule  $\partial^2 u / \partial x^2$ .
- (d) Verifique explicitamente que a função satisfaz uma equação da onda da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

### Exercício 52 — Pulso e tempo de voo

Um pulso com forma

$$u(x, t) = A \exp \left[ -\frac{(x - vt)^2}{2\sigma^2} \right]$$

propaga-se com velocidade

$$v = 1500 \text{ m s}^{-1}.$$

- (a) Determine o tempo necessário para o máximo do pulso percorrer 6.0 cm.
- (b) Se  $\sigma = 2.0 \text{ mm}$ , indique a escala espacial característica da largura do pulso.
- (c) Explique por que um pulso espacialmente mais curto pode permitir distinguir melhor duas interfaces próximas.

### Exercício 53 — Espalhamento geométrico de uma fonte

Uma fonte aproximadamente pontual emite uma potência total

$$P = 20 \text{ mW}$$

uniformemente em todas as direcções.

- (a) Determine a intensidade a 5 cm da fonte.
- (b) Determine a intensidade a 20 cm.
- (c) Determine a razão entre as amplitudes nos dois pontos, admitindo que  $I \propto A^2$ .
- (d) Explique por que a intensidade diminui mesmo na ausência de absorção.

### Exercício 54 — Energia recebida por um detector

Uma onda de intensidade média

$$I = 3.0 \text{ W m}^{-2}$$

incide perpendicularmente sobre uma área circular de raio

$$r = 4.0 \text{ mm}.$$

- (a) Determine a potência incidente.
- (b) Determine a energia recebida durante 5.0 ms.
- (c) Se a amplitude da onda duplicar, mantendo-se as restantes condições, determine a nova potência média.

### Exercício 55 — Reflexão numa interface

Uma onda incide perpendicularmente numa interface entre dois meios com impedâncias

$$Z_1 = 1.50 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}, \quad Z_2 = 7.50 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}.$$

- (a) Determine o coeficiente de reflexão de amplitude

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

- (b) Determine a fracção de intensidade reflectida.  
(c) Determine a fracção de intensidade transmitida, desprezando perdas na interface.  
(d) Compare este resultado com o caso  $Z_1 = Z_2$ .

### Exercício 56 — Eco e ondas estacionárias

Um pulso propaga-se num meio com velocidade

$$v = 1540 \text{ m s}^{-1}.$$

É emitido um pulso e detectado um eco após

$$t = 130 \mu\text{s}.$$

- (a) Determine a distância até à interface responsável pelo eco.  
(b) Se, em vez de um pulso isolado, for produzida uma onda contínua e a onda reflectida regressar ao emissor, explique como pode surgir uma onda estacionária.  
(c) Escreva a condição geral para a posição dos nós de uma onda estacionária formada por duas ondas de mesmo número de onda que se propagam em sentidos opostos.

### Exercício 57 — Interferência e resolução de duas fontes

Dois sinais harmónicos coerentes, de mesma frequência e amplitude  $A$ , chegam a um detector com uma diferença de fase  $\Delta\phi$ .

- (a) Determine a amplitude resultante em função de  $\Delta\phi$ .  
(b) Determine os valores da diferença de fase que produzem máximo e mínimo de amplitude.  
(c) Se a diferença de caminho for  $\Delta L$ , escreva

$$\Delta\phi$$

em função de  $\Delta L$  e do comprimento de onda  $\lambda$ .

- (d) Discuta como pequenas diferenças de percurso podem alterar o sinal medido.