EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
FOLHA B

FERNANDO FERREIRA
FEVEREIRO DE 2017

(1) Justifique ou refute cada uma das asserções abaixo:
   i. Se $\Gamma \not\models \phi$ então $\Gamma \models \phi \to \psi$.
   ii. Se $\Gamma \models \neg\phi$ então $\Gamma \models \phi \to \psi$.
   iii. Se $\Gamma \models \phi \vee \psi$ então $\Gamma \models \phi$ ou $\Gamma \models \psi$.

(2) (Dualidade) Um *literal* é uma letra proposicional ou a negação duma letra proposicional. Dada p uma letra proposicional, o *oposto* do literal p é $\neg p$ e o *oposto* de $\neg p$ é p. Considere-se uma fórmula ϕ do cálculo proposicional construída a partir de literais usando apenas $\wedge$ e $\vee$. A fórmula ϕ^* resulta de ϕ trocando $\wedge$ com $\vee$ e cada literal pelo seu oposto. Defina a transformação $\phi \leadsto \phi^*$ por recursão na complexidade das fórmulas e mostre que $\phi^* \Leftrightarrow \neg\phi$.

(3) Uma fórmula ϕ diz-se em *forma normal disjuntiva* se é da forma $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$, em que cada ϕ_i $(i \leq n)$ é uma conjunção de literais. Diz-se em *forma normal conjuntiva* se é da forma $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, em que cada ϕ_i $(i \leq n)$ é uma disjunção de literais.
   (a) Encontre fórmulas em forma normal disjuntiva e em fórmula normal conjuntiva que sejam tautologicamente equivalentes à fórmula $\neg(p \to q) \vee \neg r$. Faça o mesmo para a fórmula $(p \to q) \vee \neg r$.
   (b) Mostre que toda a fórmula é tautologicamente equivalente a uma fórmula em forma normal disjuntiva e equivalente a uma fórmula em forma normal conjuntiva. [Sugestão: indução simultânea na complexidade das fórmulas.]

(4) (Teorema da Interpolação) Seja $\phi \to \psi$ uma tautologia. Sejam $q_1, \ldots, q_n$ as letras proposicionais comuns a ϕ e a ψ (supomos que há pelo menos uma letra comum). Nestas circunstâncias, existe uma fórmula ρ, em que ocorrem apenas as letras comuns a ϕ e a ψ, tal que ambos $\phi \to \rho$ e $\rho \to \psi$ são tautologias. (A um tal ρ chama-se um *interpolante* da tautologia $\phi \to \psi$.) [Sugestão: considere a função $F : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ definida como sendo 1 em $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ sse existe uma valoração v tal que $v(q_i) = \delta_i$ (para $i \leq n$) e $\tilde{v}(\phi) = 1$. Use a completude vero-funcional.]
   Analise o caso excepcional em que ϕ e ψ não têm letras proposicionais em comum.

(5) Considere um conjunto infinito de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$. Se para toda a valoração v existe um natural n tal que $\tilde{v}(\phi_n) = 1$, então existe k tal que $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_k$ é uma tautologia. [Sugestão: considere as negações $\neg\phi_1, \neg\phi_2, \ldots$ e aplique o teorema da compacidade.]

(6) Exiba explicitamente uma dedução formal de $\neg\neg\phi \to \phi$. [Sugestão: "desmonte" o argumento das aulas teóricas que mostra que tal dedução existe.]