DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017 Exercícios - Folha 4

20, continuação. **(f)** $A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. **(g)** $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

21. Seja $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ e suponha que A tem valor próprio 0 com multiplicidade algébrica 3. Mostre que $A^3 = 0$ (a matriz nulo tipo 3×3).

22. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que o polinómio característico de A tem a forma $P_A(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$) e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de A. Suponhamos que $k \in \mathbb{N}$ é tal que $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^k = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{k+1}$. Mostre que então $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{k+1} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{k+2}$.

24. Para cada uma das matrizes T seguintes, encontrar uma matriz invertível S tal que $S^{-1}TS$ é diagonal por blocos e verificar a resposta. Reparamos que $E_{ij}(\alpha)T$ soma $\alpha \times L_j$ a L_i (de T) e $TE_{ij}(\alpha)$ soma $\alpha \times C_i$ a C_j. Calculamos $E_{ij}(-\alpha)TE_{ij}(\alpha)$ onde $\alpha = -t_{ij}/(t_{ii} - t_{jj})$.

(a) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (e) $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (f) $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

25. Indique as formas normais de Jordan possíveis para matrizes com os polinómios caraterísticos seguintes:
(a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $P_A(t) = (t-2)^3$.
(b) $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $P_B(t) = (t-2)^2(t-1)^2$.
(c) $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $P_C(t) = (t-2)^5$.
(d) $D \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $P_D(t) = (t-2)^3(t-1)^2$.
(e) $E \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, $P_E(t) = (t-2)^7$.

26. Seja V um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$.
(a) Se $v \in V$, $v \neq 0$, mostre que existe $\phi \in V^*$ tal que $\phi(v) \neq 0$.
(b) Se $W \leq V$ é tal que $\dim(W) = n-1$, mostre que existe $\psi \in V^*$ tal que $W = \mathrm{nuc}(\psi)$.

27. (a) Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja v um vector próprio da matriz AB associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Mostre que λ é valor próprio de BA.
(b) Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tais que AB tem n valores próprios distintos e não nulos em $\mathbb{C}$. Mostre que existe $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, invertível, tal que $AB = R^{-1}BAR$.

28. Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Suponhamos que existem $u, v \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, u e v linearmente independentes, tais que u, v são vectores próprios tanto de A como de B. Mostre que $AB = BA$.