TEORIAS COMPLETAS

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Dada uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade, uma* teoria *(no sentido semântico) consiste num conjunto* T *de fórmulas fechadas da linguagem tal que* $\phi \in \mathsf{T}$ *sempre que* $\mathsf{T} \models \phi$ *(para fórmulas fechadas* ϕ*).*

Todo o conjunto de fórmulas fechadas A determina, de modo natural, a teoria

$$\mathsf{Teoria}_A = \{\phi \text{ fórmula fechada: } A \models \phi\},$$

dizendo-se que A é uma *axiomática* para T. E.g., o conjunto (Q1-Q9) de fórmulas da linguagem da aritmética determina uma teoria, denotada por Q. Outro exemplo importante é a teoria PA da aritmética de Peano determinada por (Q1-Q9) conjuntamentre com o axioma esquema de indução. Dada uma estrutura $\mathfrak{N}$ podemos associar-lhe naturalmente a *teoria de* $\mathfrak{N}$ formada pelas fórmulas (fechadas) que são verdadeiras na estrutura:

$$\mathsf{Vd}_{\mathfrak{N}} = \{\phi \text{ fórmula fechada: } \models_{\mathfrak{N}} \phi\}.$$

Verifica-se facilmente que $\mathsf{Vd}_{\mathfrak{N}}$ é, efetivamente, uma teoria. Note-se que na nossa definição de teoria admitimos teorias incoerentes, i.e., que contenham uma determinada fórmula e a sua negação (neste caso, a teoria é constituída por todas as fórmulas fechadas da linguagem).

Habitualmente usamos letras sem serifa (i.e., sem as pequenas linhas nas extremidades dos caracteres) para denotar as teorias.

Definição 2. *Uma teoria* T *diz-se* completa *se para toda a fórmula fechada* ϕ *da linguagem, ou* $\phi \in \mathsf{T}$ *ou* $\neg\phi \in \mathsf{T}$.

Observe-se que uma teoria é completa se, e somente se, todos os seus modelos são elementarmente equivalentes. Dado um cardinal ν, uma teoria diz-se ν*-categórica* se todos os seus modelos de cardinalidade ν são isomorfos.

Teste de Łoś-Vaught. *Seja* T *uma teoria formulada numa linguagem* $\mathcal{L}$ *de cardinalidade* κ*. Suponhamos que 1)* T *é* ν*-categórica para algum cardinal* $\nu \geq \kappa$*; 2) todos os modelos de* T *são infinitos. Então* T *é completa.*

Demonstração. Suponhamos que T não é completa. Então existe uma fórmula fechada ϕ tal que nem $\mathsf{T} \models \phi$, nem $\mathsf{T} \models \neg\phi$. Temos, pois, que tanto $\mathsf{T} \cup \{\neg\phi\}$ como $\mathsf{T} \cup \{\phi\}$ têm modelos. Pelo teorema de Löwenheim-Skolem ascendente, estes conjuntos de fórmulas fechadas têm modelos $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ (respetivamente) de cardinalidade ν. Note-se que $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ não podem ser isomorfos. $\square$

Na linguagem *pura* do cálculo de predicados com igualdade, i.e., a linguagem sem símbolos funcionais e com apenas o símbolo relacional binário $=$, podemos considerar a teoria determinada pelo seguinte conjunto infinito de axiomas:

1. $\exists x \exists y (x \neq y)$;
2. $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$;
3. $\exists x \exists y \exists z \exists w (x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w)$;

$\vdots \qquad \vdots$

Esta teoria é κ-categórica em todos os cardinais infinitos e não tem modelos finitos. Logo, pelo teste de Łoś-Vaught, trata-se duma teoria completa. Passemos a um exemplo mais interessante.

A teoria das ordens lineares densas sem extremos é uma teoria formulada na linguagem $\mathcal{L}_<$, sem símbolos funcionais, cujo único símbolo relacional (para além da igualdade) é o símbolo binário $<$. A axiomática da teoria das ordens lineares sem extremos consiste nos axiomas de *ordem total (estrita)*:

$\forall x(x \not< x)$ (anti-reflexividade);
$\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z)$ (transitividade); e
$\forall x \forall y \forall z(x < y \vee x = y \vee y < x)$ (tricotonomia);

juntamente com os axiomas

$\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$ (densidade); e
$\forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)$ (sem extremos).

O seguinte teorema deve-se a Cantor e a sua demonstração introduziu o método de “back and forth” (vai e vem):

Teorema 1. *Quaisquer duas ordens lineares numeráveis densas sem extremos são isomorfas.*

Para usar o método “vai e vem” necessitamos de um lema:

Lema 1. *Sejam $A_<$ uma ordem linear e $B_<$ uma ordem linear densa sem extremos e considerem-se subconjuntos finitos F e G de A e B, respetivamente. Suponhamos que $h : F \mapsto G$ é um isomorfismo parcial, i.e., uma bijecção tal que, se $x, y \in F$ com $x < y$ então $h(x) < h(y)$. Nestas circunstâncias, dado $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $h \cup \{(a, b)\}$ é um isomorfismo parcial entre $F \cup \{a\}$ e $G \cup \{b\}$.*

Demonstração do lema. Se $a \in F$, toma-se $b = h(a)$. Vamos supor que $a \notin F$. Neste caso, $F_e = \{x \in F : x < a\}$ e $F_d = \{x \in F : a < x\}$ são disjuntos e a sua união é F. Se $F_e = \emptyset$, toma-se $b \in B$ tal que $b < y$ para todo $y \in G$. Tal b existe porque G é finito e B não tem mínimo. Se $F_d = \emptyset$ raciocina-se de modo análogo. Caso contrário, sejam a_e e a_d o máximo de F_e e o mínimo de F_d, respetivamente. Como $a_e < a_d$ sai que $h(a_e) < h(a_d)$. Atendendo a que $B_<$ é densa, tome-se $b \in B$ com $a_e < b < a_d$. Este b funciona. $\square$

Demonstração do teorema. Tomem-se $A_<$ e $B_<$ ordens lineares numeráveis densas sem extremos e considerem-se $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e $b_0, b_1, b_2, \ldots$ enumerações de A e B respetivamente. Vamos definir, por recursão, isomorfismos parciais h_n de domínios finitos tais que:

1. $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq dom(h_{2n})$;
2. $\{b_0, \ldots, b_n\} \subseteq im(h_{2n+1})$;
3. se $n < m$ então $h_n \subseteq h_m$.

Põe-se $h_0 = h_1 = \{(a_0, b_0)\}$. Vamos agora definir $h_{2(n+1)}$ e $h_{2(n+1)+1}$ supondo que h_{2n} e h_{2n+1} já estão definidos. Por (1) e (3), $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq dom(h_{2n+1})$. Logo, pelo lema anterior, existe $b \in B$ tal que $h_{2n+1} \cup \{(a_{n+1}, b)\}$ é um isomorfismo parcial cujo domínio contém $\{a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Define-se h_{2n+2} como sendo este isomorfismo parcial. (Parte do “vai”.) Também pelo lema anterior (aplicado ao isomorfismo parcial h_{2n+2}^{-1}), existe $a \in A$ tal que $h_{2n+2} \cup \{(a, b_{n+1})\}$ é um isomorfismo parcial cuja imagem contém $\{b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$. Define-se h_{2n+3} como sendo este isomorfismo parcial. (Parte do “vem”.) Por construção, $\bigcup_{n=0}^{\infty} h_n$ é um isomorfismo entre $A_<$ e $B_<$. $\square$

Pelo teorema anterior e o teste de Łoś-Vaught tem-se imediatamente:

Corolário 1. *A teoria das ordens lineares densas sem extremos é completa.*

Tanto o conjunto dos números racionais como o conjunto dos números reais munidos das suas ordens naturais são ordens lineares densas sem extremos. Pelo corolário anterior, conclui-se que as respetivas estruturas $\mathbb{Q}_<$ e $\mathbb{R}_<$ são elementarmente equivalentes. Note-se que estas estruturas não são isomorfas.