Modelação Numérica 2017

Aula 13, 29/Mar

- Advecção 2D
- Projecto #2

http://modnum.ucs.ciencias.ulisboa.pt

2a-f, Entregas	3a-f, T21	4a-f, T21	5a-f, PL22	5a-f, PL24	5a-f, PL23	6a-f, PL25	6a-f, PL21	
	14/Fev T1	15/Fev T2	16/Fev Intro-1	16/Fev Intro-1	16/Fev Intro-1	17/Fev Intro-1	17/Fev Intro-1	
	21/Fev T3	22/Fev T4	23/Fev Intro-2	23/Fev Intro-2	23/Fev Intro-2	24/Fev Intro-2	24/Fev Intro-2	
	28/Fev Carnaval	1/Março T5, Protoc.	2/Março Ex1-1	2/Março Ex1-1	2/Março Ex1-1	3/Março Ex1-1	3/Março Ex1-1	
	7/Março T6	8/Março T7	9/Março Ex1-2	9/Março Ex1-2	9/Março Ex1-2	10/Março Ex1-2	10/Março Ex1-2	
	14/Março T8	15/Março T9	16/Março Ex1-3	16/Março Ex1-3	16/Março Ex1-3	17/Março Ex1-3	17/Março Ex1-3	
20/Março, 17:00 Entrega Ex1	21/Março T10	22/Março T11	23/Março Ex1-4	23/Março Ex1-4	23/Março Ex1-4	24/Março Ex1-4	24/Março Ex1-4	Apresentações
	28/Março T12	29/Março T13, Protoc.	30/Março Ex2-1	30/Março Ex2-1	30/Março Ex2-1	31/Março Ex2-1	31/Março Ex2-1	
	4/Abr T14	5/Abr T15	6/Abr Ex2-2	6/Abr Ex2-2	6/Abr Ex2-2	7/Abr Ex2-2	7/Abr Ex2-2	
	11/Abr T16	12/Abr Páscoa	13/Abr Páscoa	13/Abr Páscoa	13/Abr Páscoa	14/Abr Páscoa	14/Abr Páscoa	
	18/Abr Páscoa	19/Abr Dia Ciências	20/Abr Ex2-3	20/Abr Ex2-3	20/Abr Ex2-3	21/Abr Ex2-3	21/Abr Ex2-3	
25/Abr, 17:00 Entrega Ex2	25/Abr Feriado	26/Abr T18	27/Abr Ex2-4	27/Abr Ex2-4	27/Abr Ex2-4	28/Abr Ex2-4	28/Abr Ex2-4	Apresentações
	2/Mai T19	3/Mai T20, Protoc.	4/Mai Ex3-1	4/Mai Ex3-1	4/Mai Ex3-1	5/Mai Ex3-1	5/Mai Ex3-1	
	9/Mai T21	10/Mai T22	11/Mai Ex3-2	11/Mai Ex3-2	11/Mai Ex3-2	12/Mai Ex3-2	12/Mai Ex3-2	
	16/Mai T23	17/Mai T24	18/Mai Ex3-3	18/Mai Ex3-3	18/Mai Ex3-3	19/Mai Ex3-3	19/Mai Ex3-3	
22/Mai, 17:00 Entrega Ex3	23/Mai T25	24/Mai T26	25/Mai Ex3-4	25/Mai Ex3-4	25/Mai Ex3-4	26/Mai Ex3-4	26/Mai Ex3-4	Apresentações
	30/Mai T27							

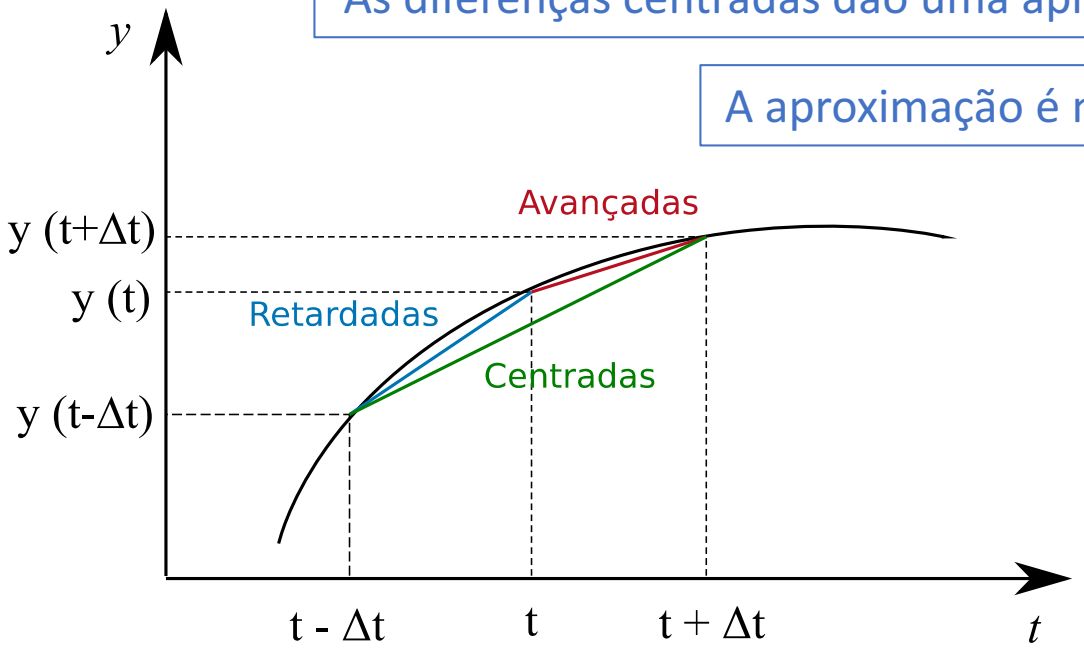
Aula passada

Diferenças finitas

- Diferenças avançadas: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
- Diferenças retardadas: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
- Diferenças centradas: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

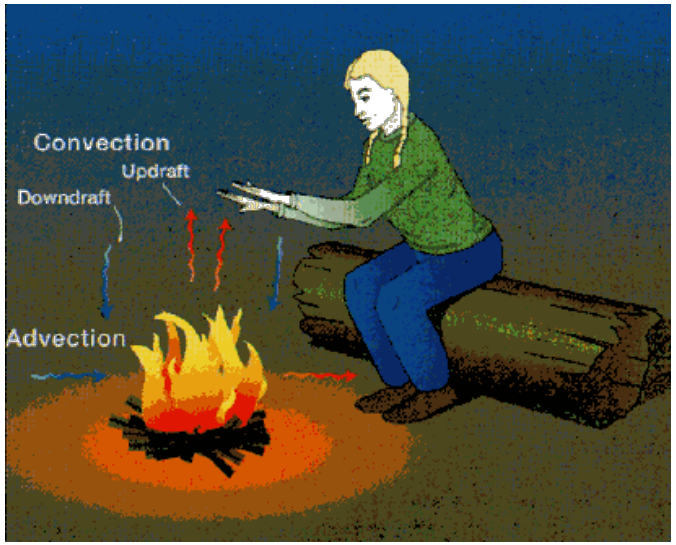
As diferenças centradas dão uma aproximação mais exacta

A aproximação é melhor quando Δx -> 0



Aula passada

Advecção 2D



1D: $$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x}$$

Outra notação:

2D: $$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y}$$

Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \implies \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla(\vec{u}h),\ \vec{v}h \text{ é o fluxo de h}$$

Esta forma é usável em duas condições:

- u, v = constante (advecção linear)
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (fluído incompressível)

Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \implies \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

Discretização no esquema de Lax:

$$\frac{h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

Diferença avançada no tempo

Diferença centrada no espaço em x

Diferença centrada no espaço em y

Advecção 2D

Aula passada

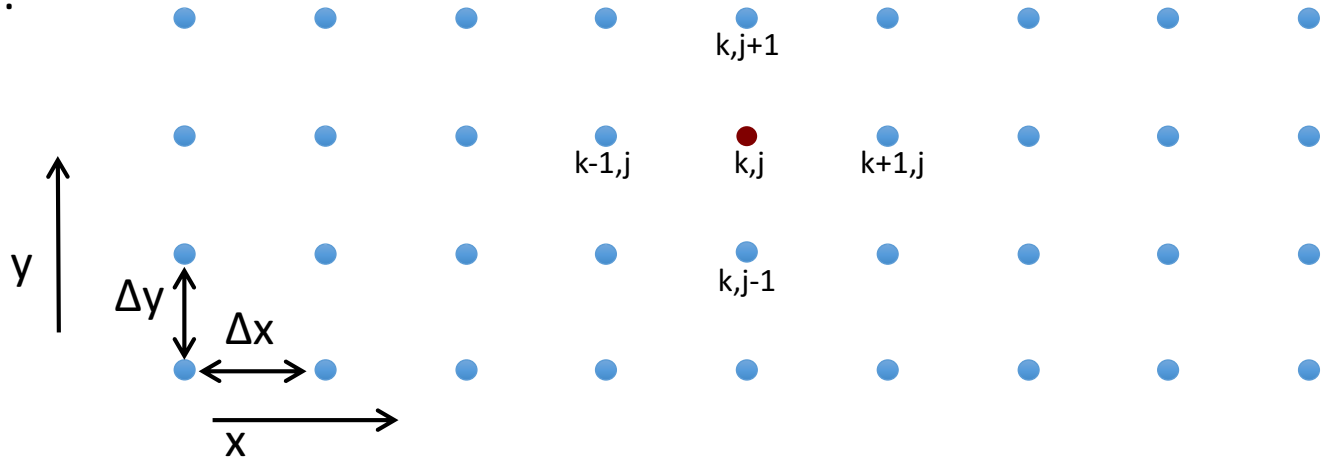
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

Discretização no esquema de Lax:

$$\frac{h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

t=n:



Advecção 2D

Aula passada

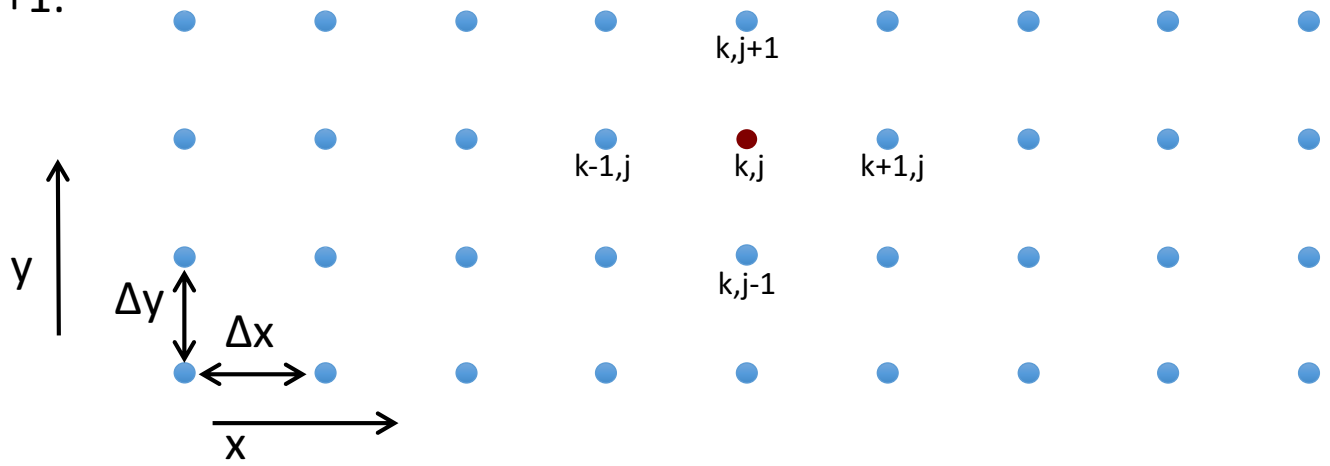
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

Discretização no esquema de Lax:

$$\frac{h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

t=n+1:



Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

Discretização no esquema de Lax:

$$\frac{h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

$$h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n} = -\Delta t\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t\frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

$$h_{k,j}^{n+1} = h_{k,j}^{n} - \Delta t\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t\frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

$$\boxed{h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n} + h_{k+1,j}^{n} + h_{k,j-1}^{n} + h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t\frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}}$$

Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm

plt.rcParams['figure.figsize'] = 10, 6

#%% Parâmetros

# discretização
nt=2000; nx=101; ny=101              # número de pontos no tempo e espaço (x e y)
passo=10;                            # intervalo ebtre figuras
dx=1000.; dy=1000.;                  # espaçamento dos pontos no espaço (x e y)
x = np.arange(0,nx)*dx               # vector de pontos no espaço (x)
y = np.arange(0,ny)*dy               # vector de pontos no espaço (y)

xmin=min(x); xmax=max(x)             # valor mínimo e máximo do vector x
ymin=min(y); ymax=max(y)             # valor mínimo e máximo do vector y

xx=np.zeros([nx,ny])                 # matriz 2D de valores x (posição em x)
yy=np.zeros([nx,ny])                 # matriz 2D de valores y (posição em y)
for ix in range(nx):
    for iy in range(ny):
        xx[ix,iy] = x[ix]
        yy[ix,iy] = y[iy]

# estação
ixStation = nx-2                     # posição da estação, coordenada x
iyStation = ny/2                     # posição da estação, coordenada y
hStation = np.zeros(nt)              # valores da variável h na estação
```

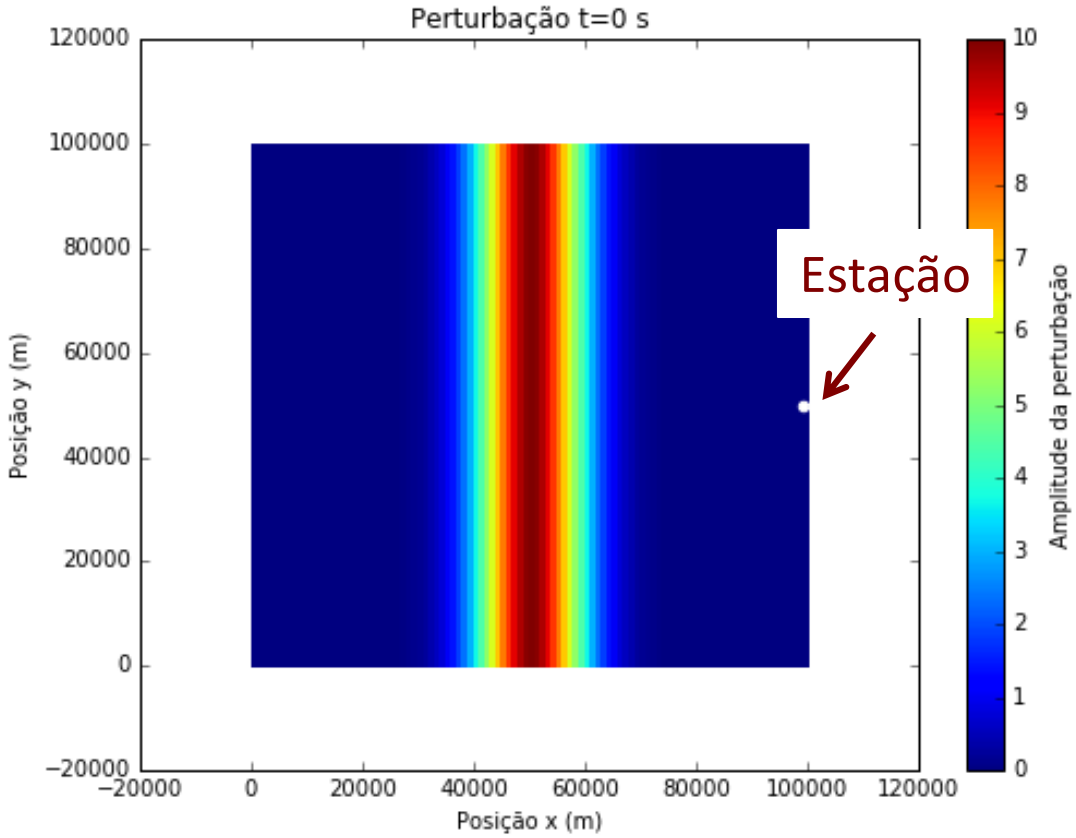
Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm

plt.rcParams['figure.figsize'] = 10, 6

#%% Parâmetros

# discretização
nt=2000; nx=101; ny=101
passo=10;
dx=1000.; dy=1000.;
x = np.arange(0,nx)*dx
y = np.arange(0,ny)*dy

xmin=min(x); xmax=max(x)
ymin=min(y); ymax=max(y)

xx=np.zeros([nx,ny])
yy=np.zeros([nx,ny])
for ix in range(nx):
    for iy in range(ny):
        xx[ix,iy] = x[ix]
        yy[ix,iy] = y[iy]

# estação
ixStation = nx-2
iyStation = ny/2
hStation = np.zeros(nt)
```

Sinal na estação



Advecção 2D

Aula passada

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

```
# velocidades
uspeed=10                                   # velocidade de propagação da direcção x
vspeed=0                                    # velocidade de propagação da direcção y
ws = np.sqrt(uspeed**2 + vspeed**2)         # velocidade de propagação total

dt = 0.68 * dx / ws                         # espaçamento entre pontos no tempo
dt2dx = dt/(2*dx)                           # dt/(2 dx)
dt2dy = dt/(2*dy)                           # dt/(2 dy)

courant = ws*dt/dx                          # número de courant

u = uspeed * np.ones([nx,ny])           # matriz de velocidades (x)
uP = np.zeros([nx,ny])                  # matriz de velocidades futuras (x)
uP[:] = u[:]                            # inicialização da matriz de velocidades futuras (x)

v = vspeed * np.ones([nx,ny])           # matriz de velocidades (y)
vP = np.zeros([nx,ny])                  # matriz de velocidades futuras (y)
vP[:] = v[:]                            # inicialização da matriz de velocidades futuras (y)
```

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^n + h_{k+1,j}^n + h_{k,j-1}^n + h_{k,j+1}^n) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^n h_{k+1,j}^n - u_{k-1,j}^n h_{k-1,j}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^n h_{k,j+1}^n - v_{k,j-1}^n h_{k,j-1}^n}{2\Delta y}$$

Advecção 2D

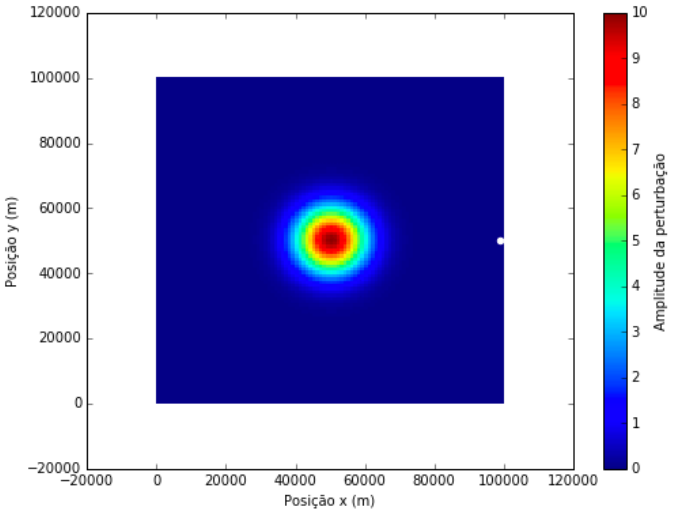
$$h = h_0 e^{-\left(\frac{x-x_0}{Lx}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{Ly}\right)^2}$$

```
#%% Definição de h inicial (perturbação/sinal a propagar/advectar)

hJUMP=10                    # amplitude inicial do sinal
xJUMP=(xmax+xmin)/2.        # localização inicial (em x) do sinal (= valor médio/central do vector
LxJUMP=10.*dx               # largura inicial do sinal (x)
yJUMP=(ymax+ymin)/2.        # localização inicial (em y) do sinal (= valor médio/central do vector
LyJUMP=2000.*dy             # largura inicial do sinal (y)

# perturbação/sinal inicial:
h = hJUMP*np.exp(-((xx-xJUMP)/LxJUMP)**2 - ((yy-yJUMP)/LyJUMP)**2)
hP = np.zeros([nx,ny])                          # sinal no passo temporal seguinte
hStation[0] = h[ixStation, iyStation]           # localização da estação (x,y)

# plot
plt.close()
plt.rcParams['figure.figsize'] = 8, 6

# plt.contourf(xx,yy,h)
plt.pcolor(xx,yy,h)                 # figura 2D do sinal inicial
plt.clim(0,10)                      # limites da barra de cores
cb=plt.colorbar()
cb.set_label(u'Amplitude da perturbação')   # legenda da barra de cores

# marcar a estação com um ponto branco
plt.scatter(xx[ixStation, iyStation], yy[ixStation, iyStation], c='w', edgecolors='w')

plt.xlabel(u'Posição x (m)')
plt.ylabel(u'Posição y (m)')
plt.title(u'Perturbação t=0 s')

plt.savefig('fig/advection2d-lax-t0.png')
```

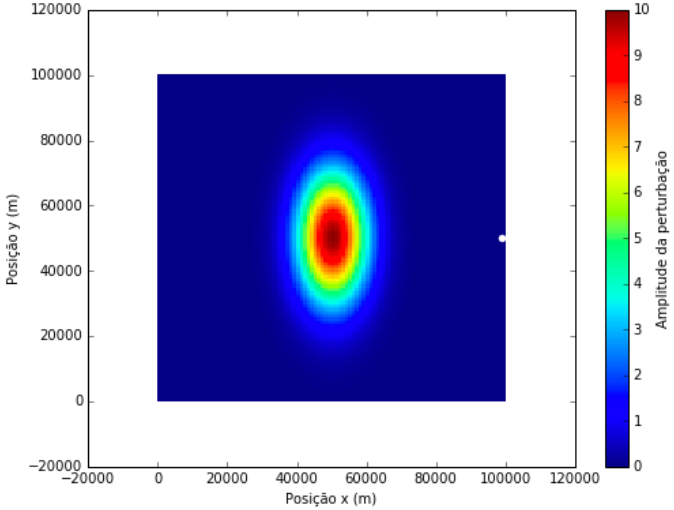
Advecção 2D

$$h = h_0 e^{-\left(\frac{x-x_0}{Lx}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{Ly}\right)^2}$$

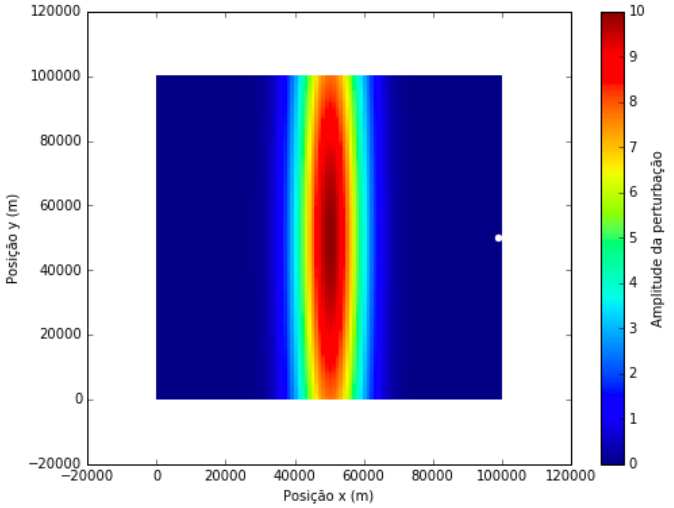
Lx=10, Ly=10



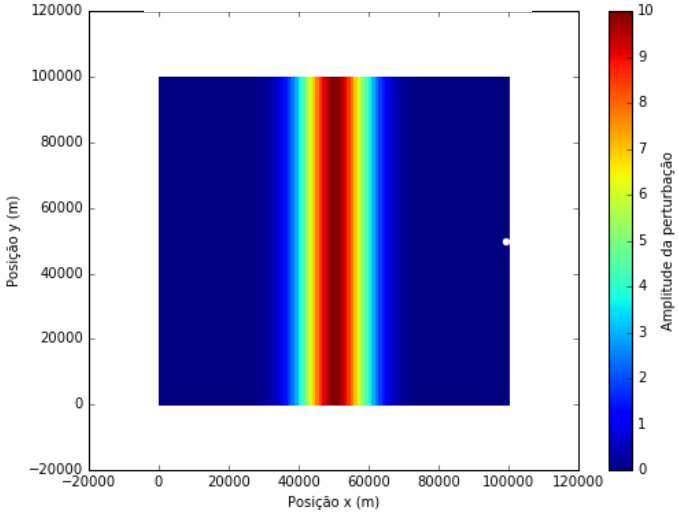
Lx=10, Ly=20



Lx=10, Ly=100

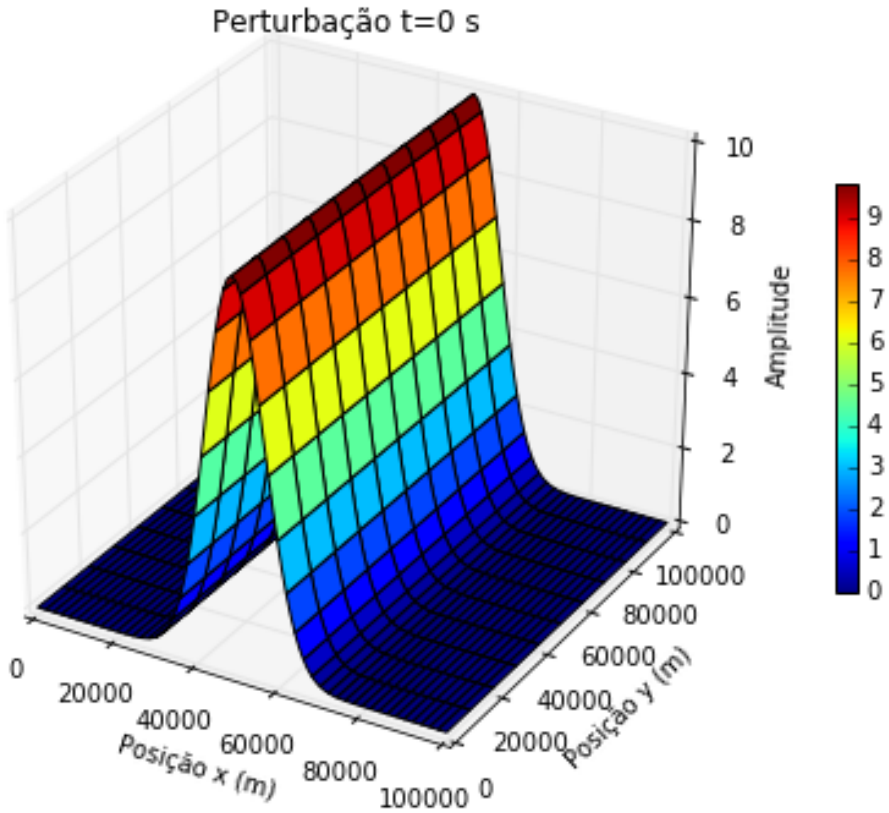


Lx=10, Ly=1000



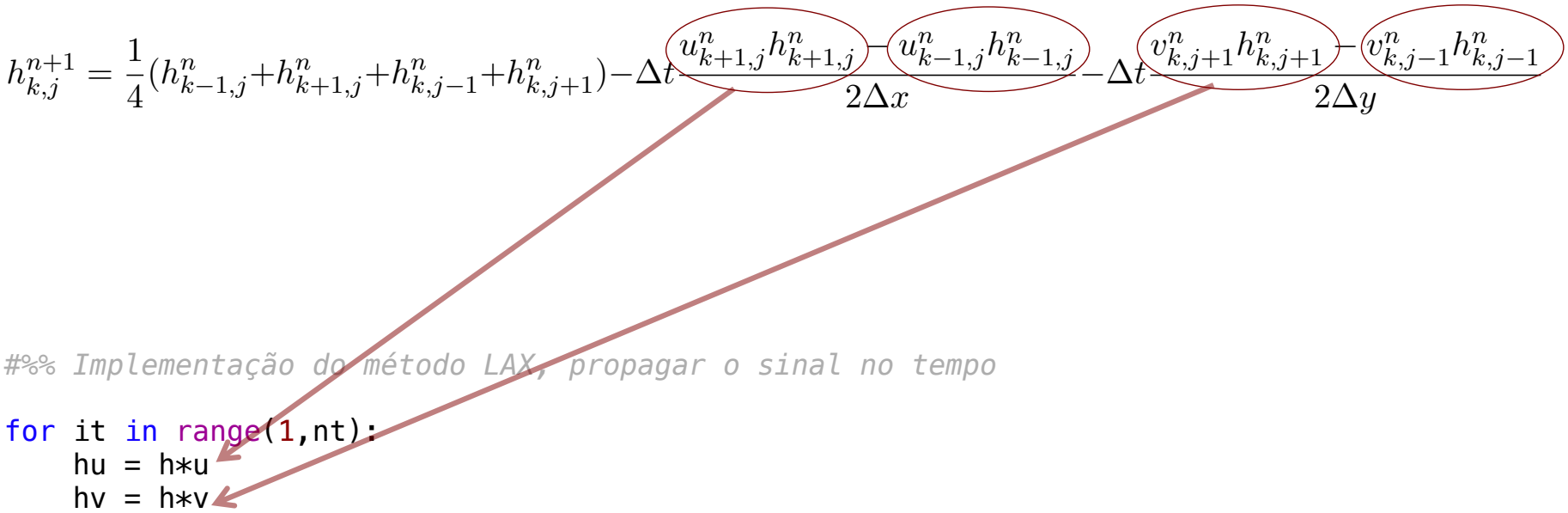
Advecção 2D

```
#%% plot3D

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')

surf=ax.plot_surface(xx,yy,h, rstride=2, cstride=10, cmap=cm.jet)
ax.set_zlim(0,10)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5)

ax.set_xlabel(u'Posição x (m)')
ax.set_ylabel(u'Posição y (m)')
ax.set_zlabel(u'Amplitude')
ax.set_title(u'Perturbação t=0 s')

plt.savefig('fig3d/advection2d-lax-t0.png')
```



$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \implies \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^n + h_{k+1,j}^n + h_{k,j-1}^n + h_{k,j+1}^n) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^n h_{k+1,j}^n - u_{k-1,j}^n h_{k-1,j}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^n h_{k,j+1}^n - v_{k,j-1}^n h_{k,j-1}^n}{2\Delta y}$$



```
#%% Implementação do método LAX, propagar o sinal no tempo

for it in range(1,nt):
    hu = h*u
    hv = h*v

    # Avançar o sinal em todo o domínio excepto nas fronteiras
    for ix in range(1,nx-1):
        for iy in range(1,ny-1):
            hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,iy+1])/4. \
                - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[ix-1,iy]) \
                - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,iy-1])
```

Advecção 2D

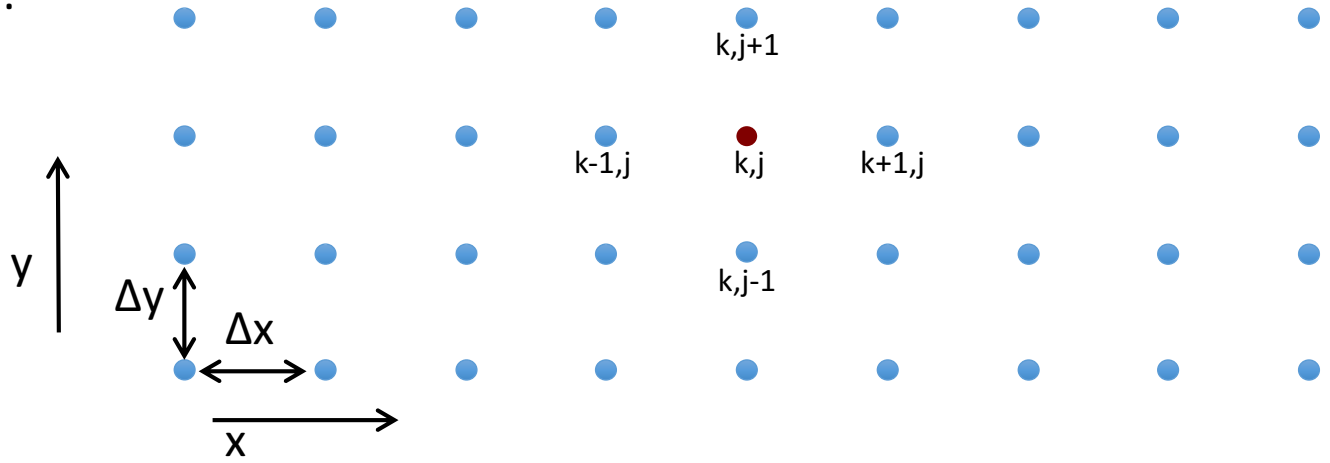
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y}}$$

Discretização no esquema de Lax:

$$\frac{h_{k,j}^{n+1} - h_{k,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

t=n:



$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

```
# Condições fronteira cíclicas em x
for iy in range(1,ny-1):
    ix=0
    hP[ix,iy] = (h[nx-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,iy+1])/4. \
        - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[nx-1,iy])   \
        - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,iy-1])

    ix=nx-1
    hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[0,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,iy+1])/4. \
        - dt2dx * (hu[0,iy] - hu[ix-1,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,iy-1])
```

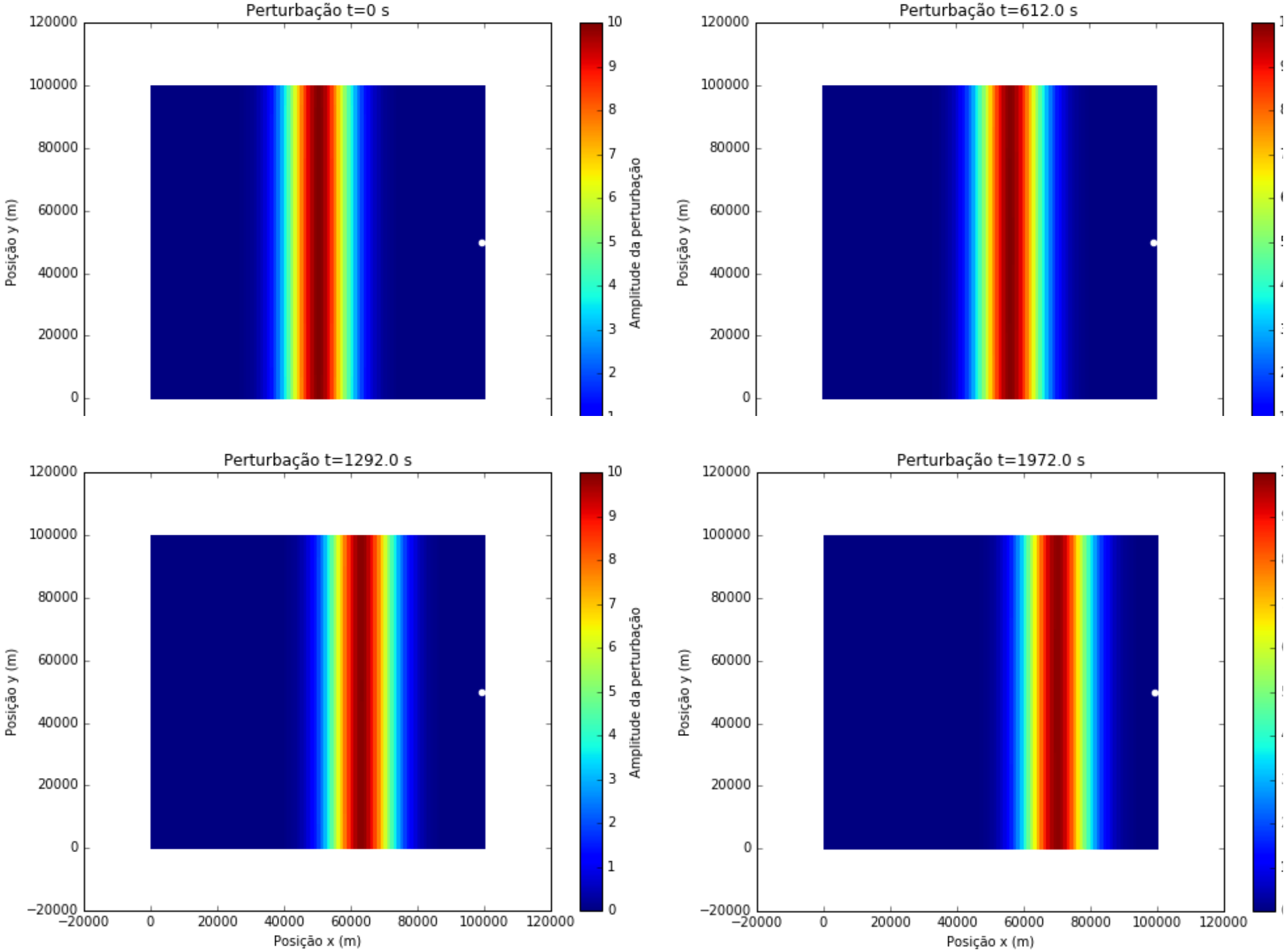
```
# Condições fronteira cíclicas em y
for ix in range(1,nx-1):
    iy=0
    hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,ny-1] + h[ix,iy+1])/4. \
        - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[ix-1,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,ny-1])

    iy=ny-1
    hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,0])/4. \
        - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[ix-1,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,0] - hv[ix,iy-1])
```

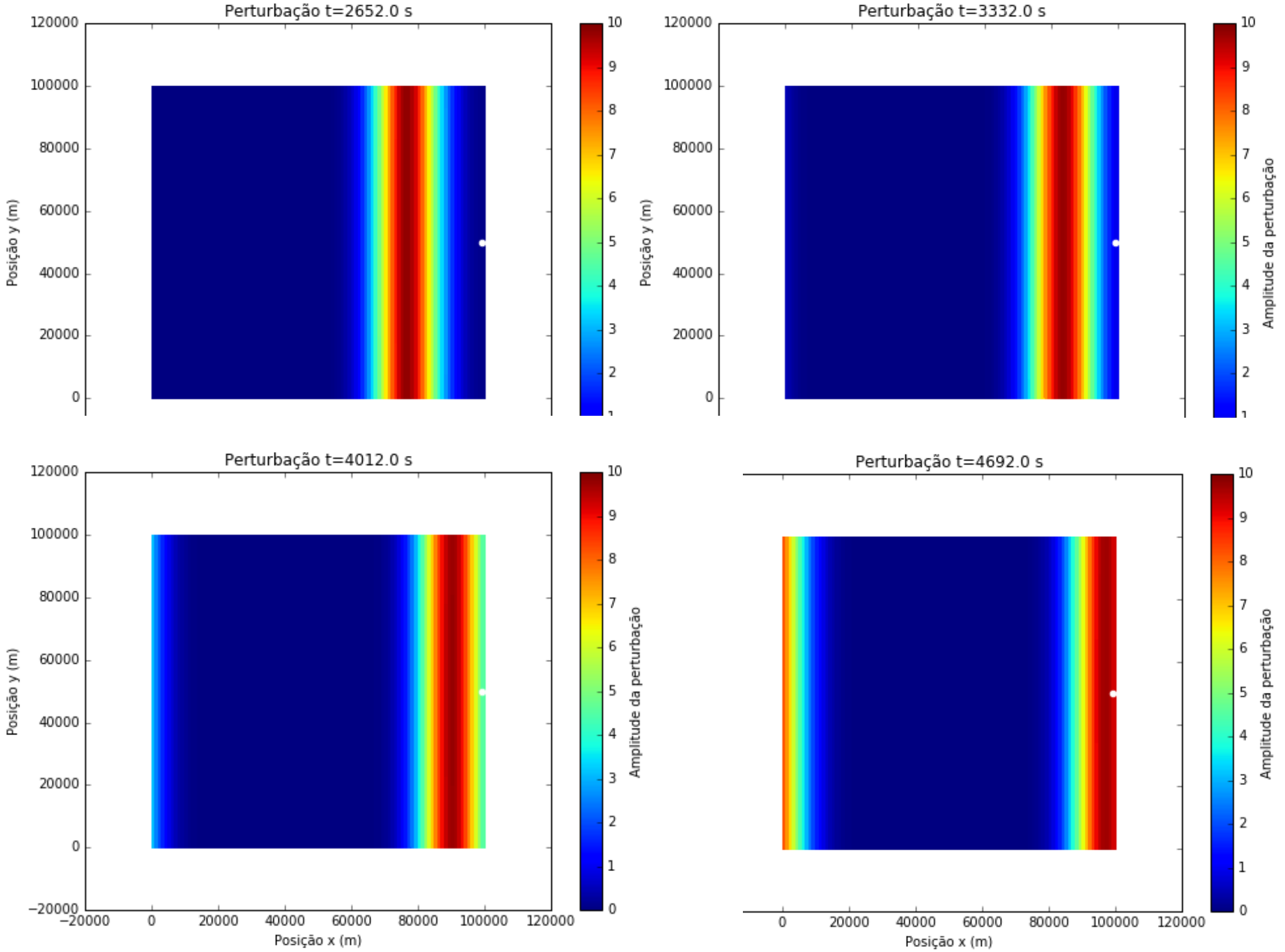
$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

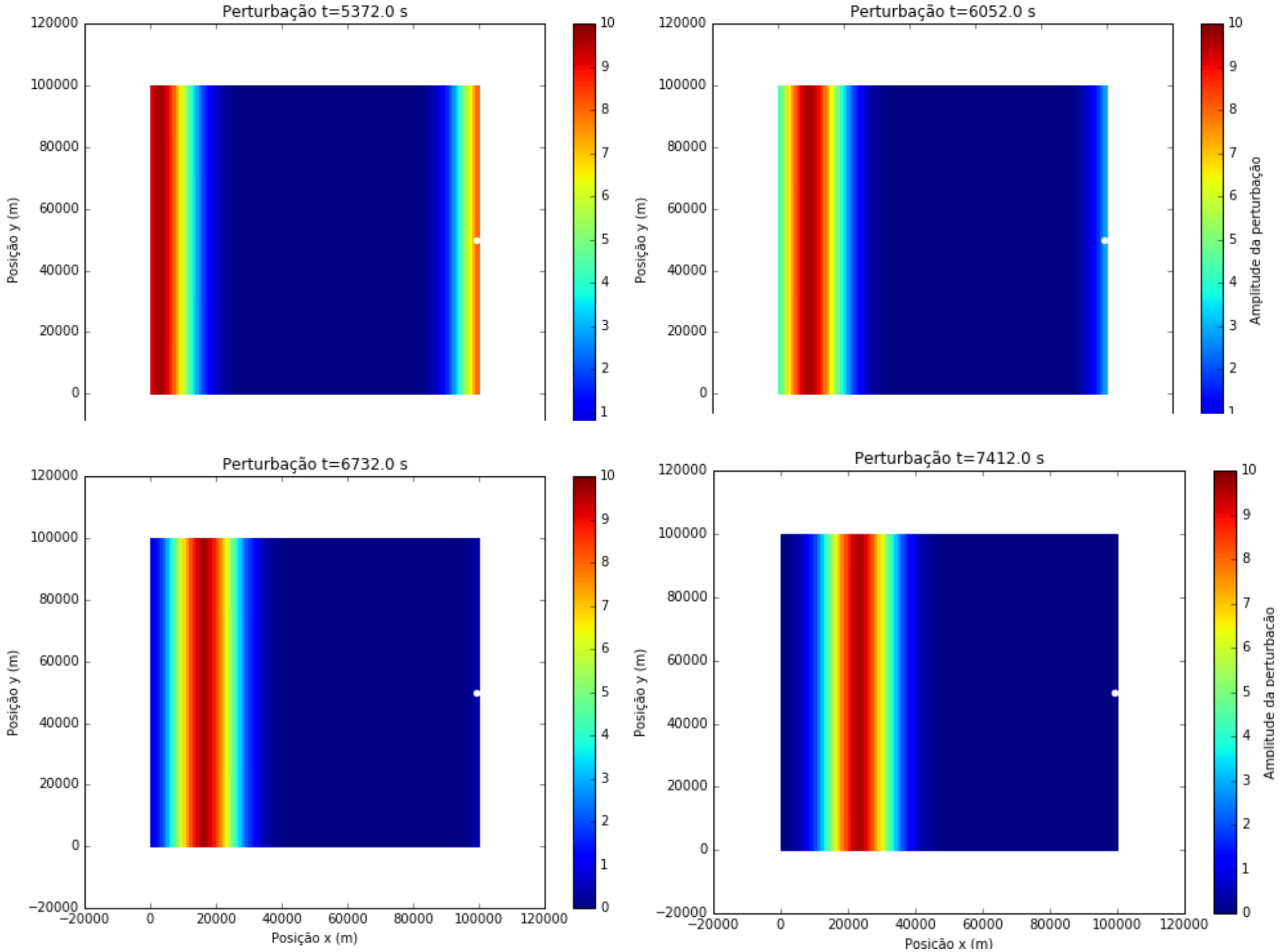
```
# Condições fronteira nos cantos
ix=0; ixm=nx-1; ixp=1
iy=0; iym=ny-1; iyp=1
hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
    - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
    - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

ix=nx-1; ixm=nx-2; ixp=0
iy=0; iym=ny-1; iyp=1
hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
    - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
    - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

ix=0; ixm=nx-1; ixp=1
iy=ny-1; iym=ny-2; iyp=0
hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
    - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
    - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

ix=nx-1; ixm=nx-2; ixp=0
iy=ny-1; iym=ny-2; iyp=0
hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
    - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
    - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])
```

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

```
    # actualizar o sinal
    h[:]=hP[:]

    # Fazer figuras com as soluções, de 10 em 10 passos no tempo
    if (it+1)%passo==0:
#    if it<3*passo:
        plt.close()
        plt.rcParams['figure.figsize'] = 8, 6

#        plt.contourf(xx,yy,h)
        plt.pcolor(xx,yy,h)
        plt.clim(0,10)
        cb=plt.colorbar()
        cb.set_label(u'Amplitude da perturbação')
        plt.scatter(xx[ixStation, iyStation], yy[ixStation, iyStation], c='w', edgecolors='w')

        plt.xlabel(u'Posição x (m)')
        plt.ylabel(u'Posição y (m)')
        plt.title(u'Perturbação t='+ str(it*dt) +' s')

        plt.savefig('fig/advection2d-lax-t'+ str(it) +'.png')

    # guardar o sinal na estação
    hStation[it] = h[ixStation, iyStation]

# figura com a evolução do sinal na estação
plt.close()
plt.rcParams['figure.figsize'] = 8, 6
plt.plot(np.arange(0,nt)*dt/60., hStation)

plt.ylabel(u'Amplitude')
plt.xlabel(u'Tempo (min)')
plt.title(u'Estação ix='+ str(ixStation) +', iy='+ str(iyStation) +', courant='+ str(courant))
plt.savefig('advection2d-lax-station-courant'+ str(courant) +'.png')
```


Perturbação t=0 s
Perturbação t=612.0 s
Perturbação t=1292.0 s
Perturbação t=1972.0 s
Posição y (m)
Posição x (m)
Amplitude da perturbação
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
−20000
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

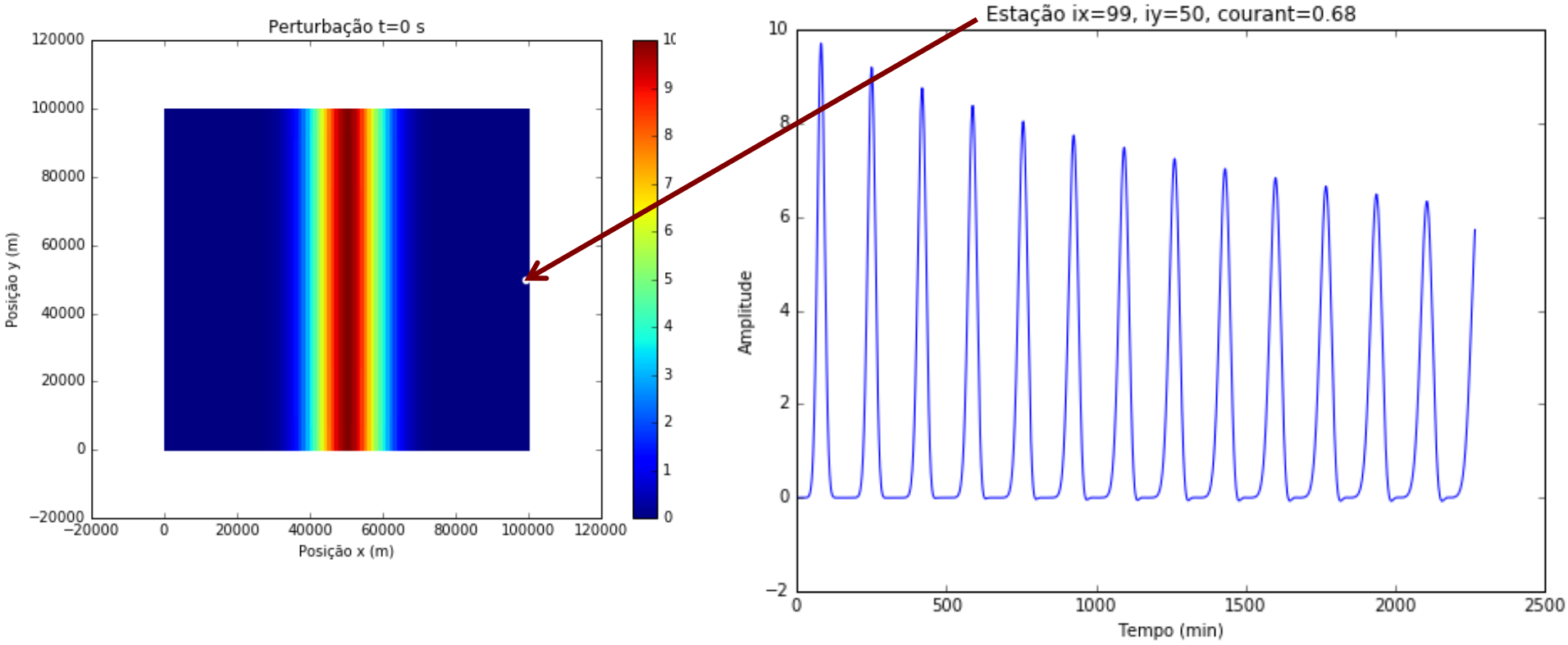

Perturbação t=2652.0 s
Perturbação t=3332.0 s
Perturbação t=4012.0 s
Perturbação t=4692.0 s
Posição y (m)
Posição x (m)
Amplitude da perturbação
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
−20000
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1


Perturbação t=5372.0 s
Perturbação t=6052.0 s
Perturbação t=6732.0 s
Perturbação t=7412.0 s
Posição y (m)
Posição x (m)
Amplitude da perturbação
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
−20000
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Advecção 2D, Lax

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t\frac{u_{k+1,j}^{n}h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n}h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t\frac{v_{k,j+1}^{n}h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n}h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$



Equação de advecção (linear, 1D)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x},\ u = const$$

$$T_k^{n+1} = T_k^n - u\Delta t\frac{T_{k+1}^n - T_{k-1}^n}{2\Delta x}$$

- Trata-se de um método de 1ª ordem no tempo e 2ª ordem no espaço.
- A solução depende de condições fronteira espaciais. Vamos definir a solução num domínio espacial finito:

$$x \in [0, L_x] \Longrightarrow x_k = (k-1)\Delta x,\ k = 1, ..., N$$

- Vamos considerar dois casos:
  - Condições cíclicas (periódicas): $x_0 = x_N,\ x_{N+1} = x_1$
  - Condições "abertas": $\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{em } x = x_1, x = x_N$

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

```
    # Condições fronteira cíclicas em x
    for iy in range(1,ny-1):
        ix=0
        hP[ix,iy] = (h[nx-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,iy+1])/4. \
            - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[nx-1,iy])   \
            - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,iy-1])

        ix=nx-1
        hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[0,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,iy+1])/4. \
            - dt2dx * (hu[0,iy] - hu[ix-1,iy]) \
            - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,iy-1])

#         # Condições fronteira abertas em x
#         hP[0,iy]=hP[1,iy]
#         hP[nx-1,iy]=hP[nx-2,iy]

    # Condições fronteira cíclicas em y
    for ix in range(1,nx-1):
        iy=0
        hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,ny-1] + h[ix,iy+1])/4. \
            - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[ix-1,iy]) \
            - dt2dy * (hv[ix,iy+1] - hv[ix,ny-1])

        iy=ny-1
        hP[ix,iy] = (h[ix-1,iy] + h[ix+1,iy] + h[ix,iy-1] + h[ix,0])/4. \
            - dt2dx * (hu[ix+1,iy] - hu[ix-1,iy]) \
            - dt2dy * (hv[ix,0] - hv[ix,iy-1])

#         # Condições fronteira abertas em y
#         hP[ix,0]=hP[ix,1]
#         hP[ix,ny-1]=hP[ix,ny-2]
```

$$h_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(h_{k-1,j}^{n}+h_{k+1,j}^{n}+h_{k,j-1}^{n}+h_{k,j+1}^{n}) - \Delta t \frac{u_{k+1,j}^{n} h_{k+1,j}^{n} - u_{k-1,j}^{n} h_{k-1,j}^{n}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{v_{k,j+1}^{n} h_{k,j+1}^{n} - v_{k,j-1}^{n} h_{k,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

```
    # Condições fronteira nos cantos
    ix=0; ixm=nx-1; ixp=1
    iy=0; iym=ny-1; iyp=1
    hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
        - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

    ix=nx-1; ixm=nx-2; ixp=0
    iy=0; iym=ny-1; iyp=1
    hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
        - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

    ix=0; ixm=nx-1; ixp=1
    iy=ny-1; iym=ny-2; iyp=0
    hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
        - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

    ix=nx-1; ixm=nx-2; ixp=0
    iy=ny-1; iym=ny-2; iyp=0
    hP[ix,iy] = 1./4. * (h[ixm,iy] + h[ixp,iy] + h[ix,iym] + h[ix,iyp]) \
        - dt2dx * (hu[ixp,iy] - hu[ixm,iy]) \
        - dt2dy * (hv[ix,iyp] - hv[ix,iym])

#    # Condições fronteira abertas nos cantos
#    hP[0,0]=hP[1,1]
#    hP[0,ny-1]=hP[1,ny-2]
#    hP[nx-1,0]=hP[nx-2,1]
#    hP[nx-1,ny-1]=hP[nx-2,ny-2]
```