Modelação Numérica 2017

Aula 15, 5/Abr

- Equação de Fourier da condução de calor/ Lei de Fick da difusão
- Caso não estacionário

http://modnum.ucs.ciencias.ulisboa.pt

Lei de Fourier da condução

- Na ausência de fontes e sumidouros de calor, a temperatura num meio contínuo satisfaz a equação:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} =} \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \boxed{= \lambda \nabla^2 T}$$

- A 1D:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- Esta equação representa, por exemplo a evolução da temperatura $T(z$, t) ao longo de um perfil vertical no solo, em resposta a um forçamento à superfície $T(0, t)$. Trata-se de um problema de condições iniciais com condições fronteira espaciais variáveis no tempo.

Lei de Fourier da condução

- Usando uma discretização explícita com diferenças avançadas no tempo e centradas no espaço (FTCS) teríamos um esquema incondicionalmente instável. Em vez disso vamos introduzir um esquema implícito:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}$$

$$\frac{T_k^{n+1}}{\Delta t} - \lambda \frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} = \frac{T_k^n}{\Delta t}$$

$$T_k^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2}(T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}) = T_k^n$$

$$-\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k+1}^{n+1} + \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right] T_k^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k-1}^{n+1} = T_k^n$$

O método é implícito porque a solução no passo temporal n+1 depende da solução nesse mesmo passo de tempo (n+1).

Lei de Fourier da condução

- Usando uma discretização explícita com diferenças avançadas no tempo e centradas no espaço (FTCS) teríamos um esquema incondicionalmente instável. Em vez disso vamos introduzir um esquema implícito:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$-\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k+1}^{n+1} + \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right] T_k^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k-1}^{n+1} = T_k^n$$

- Obtém-se assim o sistema de equações:

$$MT^{n+1} = T^n$$

Lei de Fourier da condução

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$-\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k+1}^{n+1} + \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right] T_k^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k-1}^{n+1} = T_k^n$$

$$MT^{n+1} = T^n$$

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & 0 \; \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \\ \\ T_{N_z}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \\ \\ T_{N_z}^n \end{bmatrix}$$

Matriz tridiagonal (só a diagonal e nas sub-diagonais inferior e superior são não nulas).

Lei de Fourier da condução

- Condição fronteira superior:

Em k=1: Condição de Dirichelet (T forçado)

$$-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k+1}^{n+1}+\left[1+2\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right]T_k^{n+1}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_0^{n+1}=T_k^n$$

$$-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k+1}^{n+1}+\left[1+2\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right]T_k^{n+1}=T_k^n+\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_0^{n+1}$$

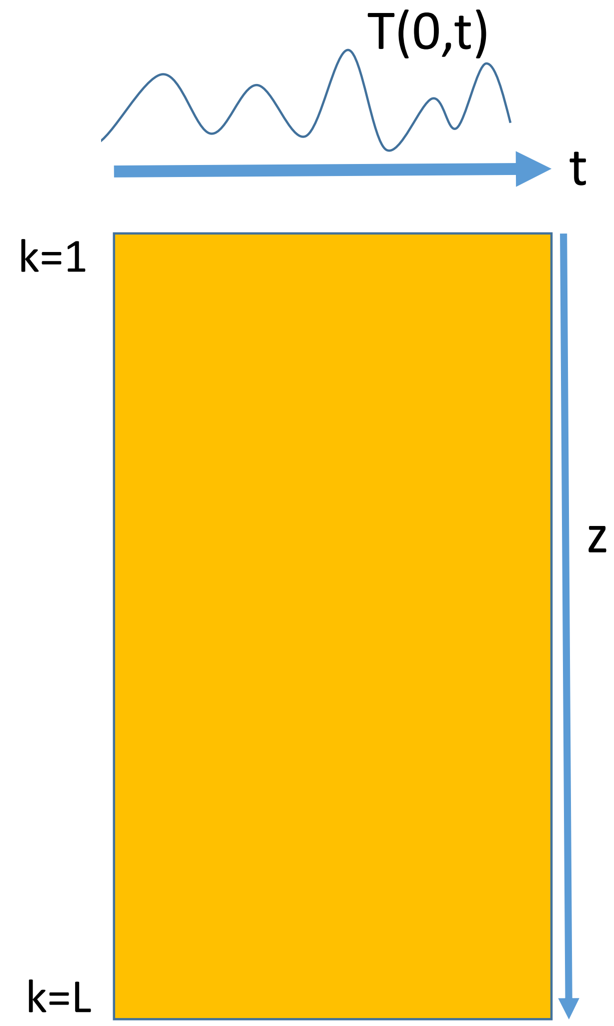
- Condição fronteira inferior:

Em k=L: Condição de von Neumann (fluxo nulo, $T_L=T_{L+1}$)

$$-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k}^{n+1}+\left[1+2\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right]T_k^{n+1}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k-1}^{n+1}=T_k^n$$

$$\left[1+2\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right]T_k^{n+1}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k-1}^{n+1}=T_k^n$$

$$\left[1+\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right]T_k^{n+1}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta z^2}T_{k-1}^{n+1}=T_k^n$$



Lei de Fourier da condução

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

$$-\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k+1}^{n+1} + \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right] T_k^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{k-1}^{n+1} = T_k^n$$

$$MT^{n+1} = T^n$$

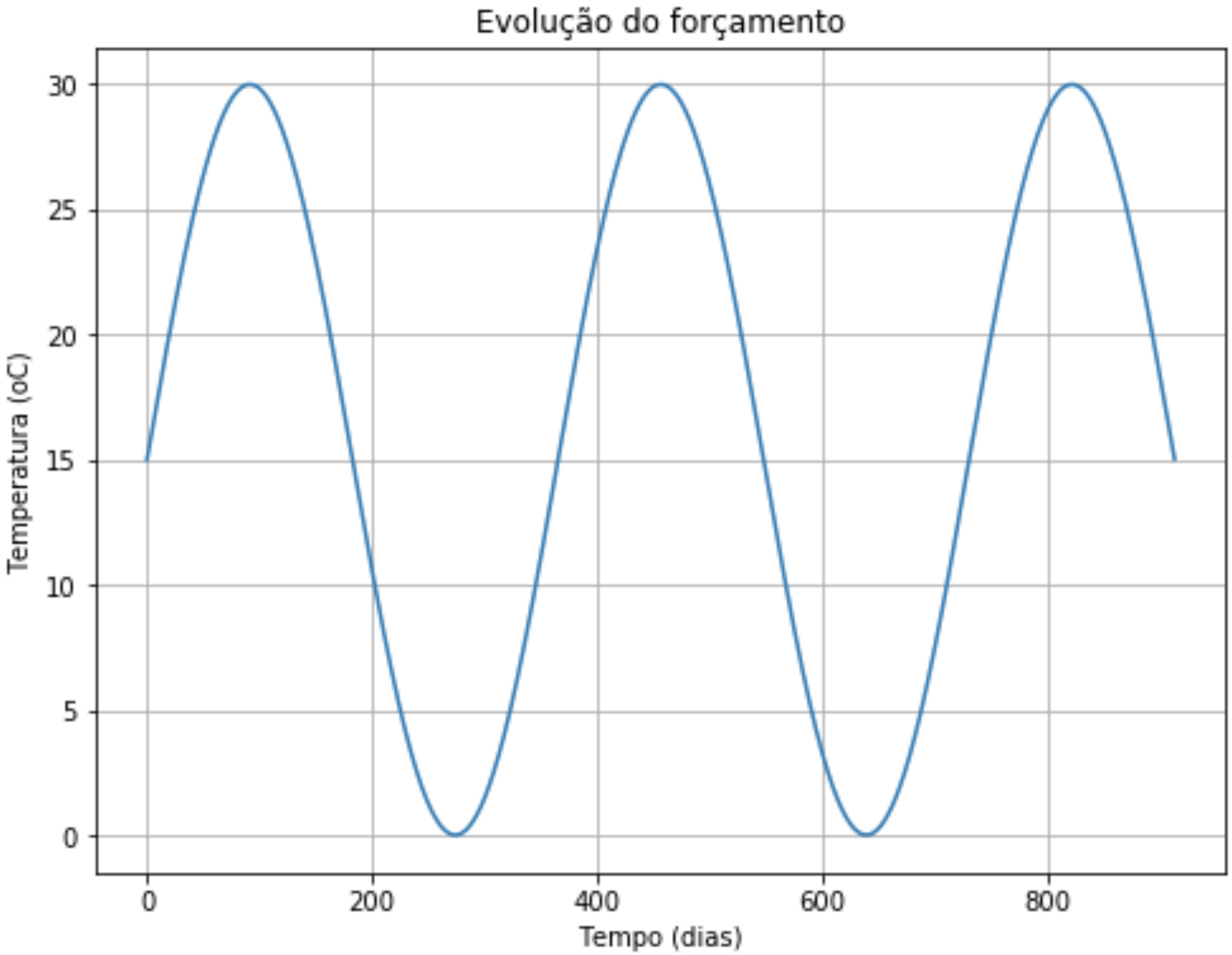
Condições fronteira

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & 0 \; \left(-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) & \left(1+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta z^2} - \frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \\ \\ \\ T_{N_z}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n + \left(\frac{\lambda\Delta t}{\Delta z^2}\right) T_0(t) \\ T_2^n \\ \\ \\ \\ T_{N_z}^n \end{bmatrix}$$

Matriz tridiagonal (só a diagonal e nas sub-diagonais inferior e superior são não nulas).

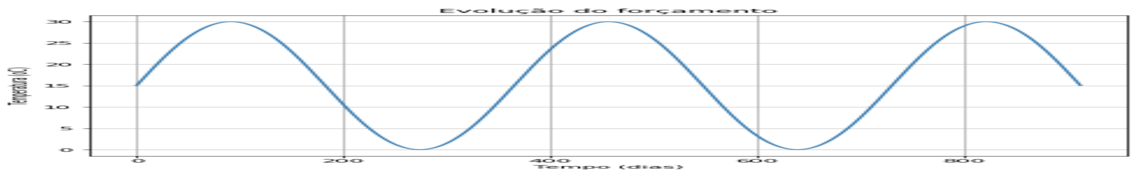
Exemplo 1: Perturbação Anual

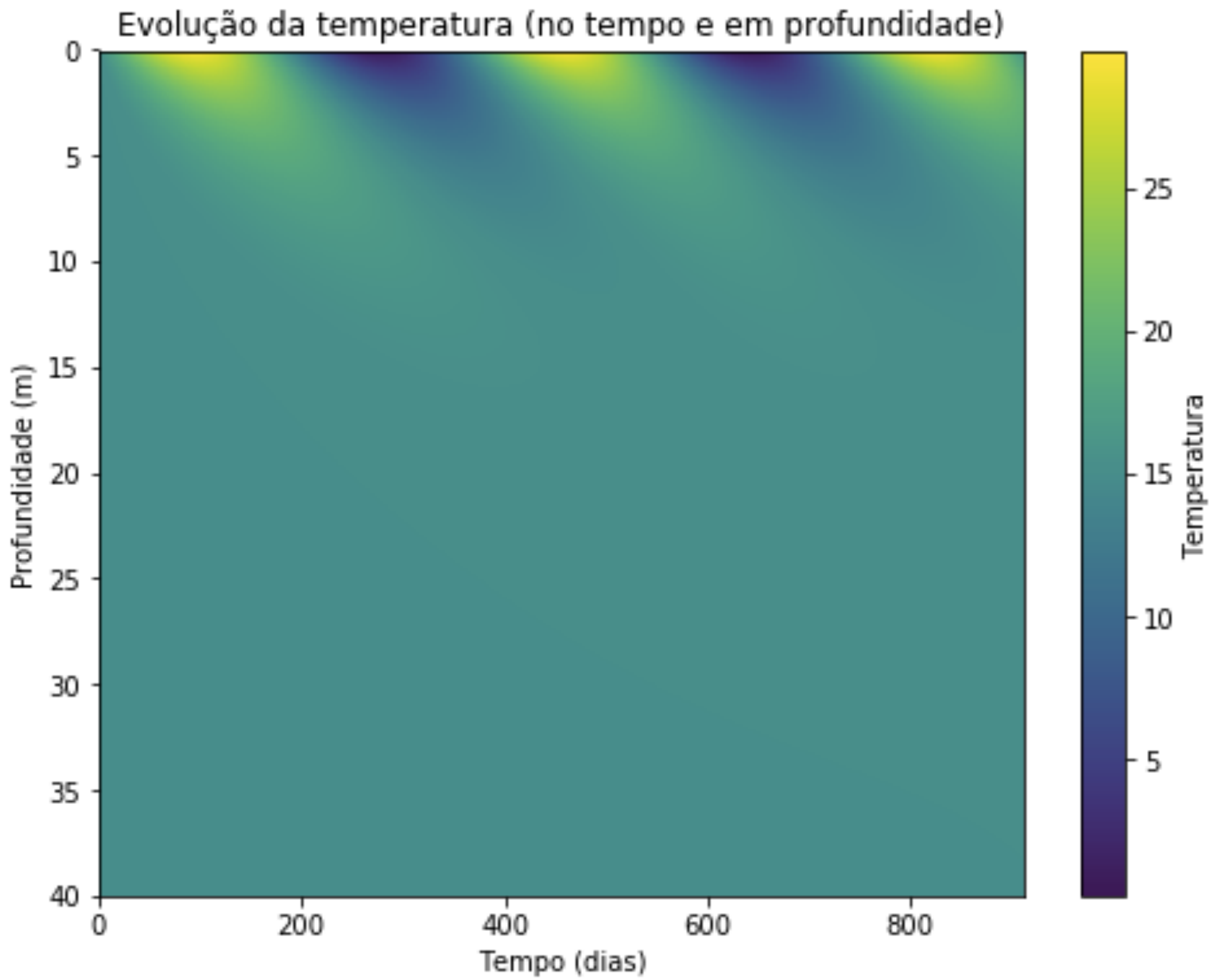
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

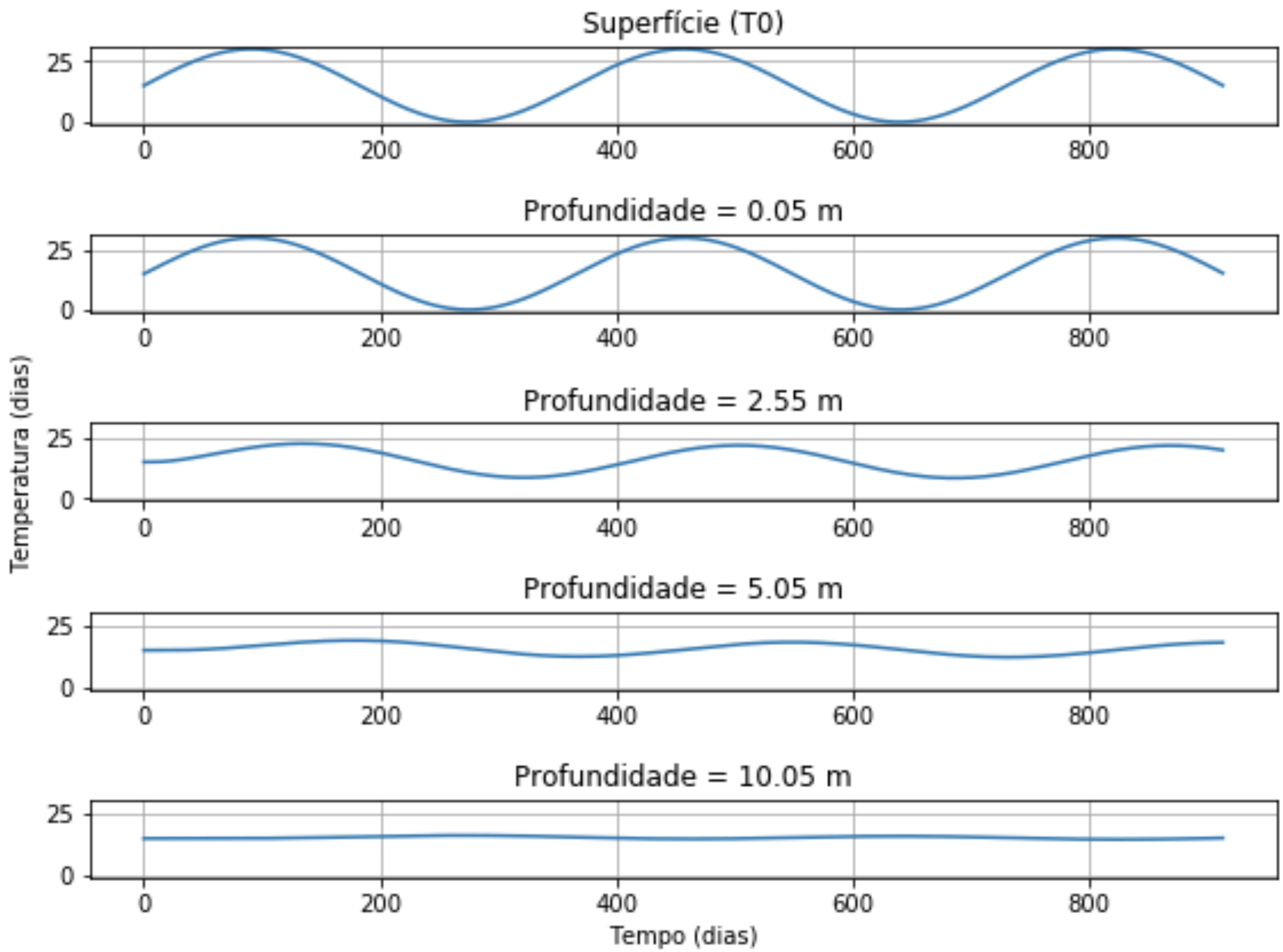
Exemplo 1: Perturbação Anual





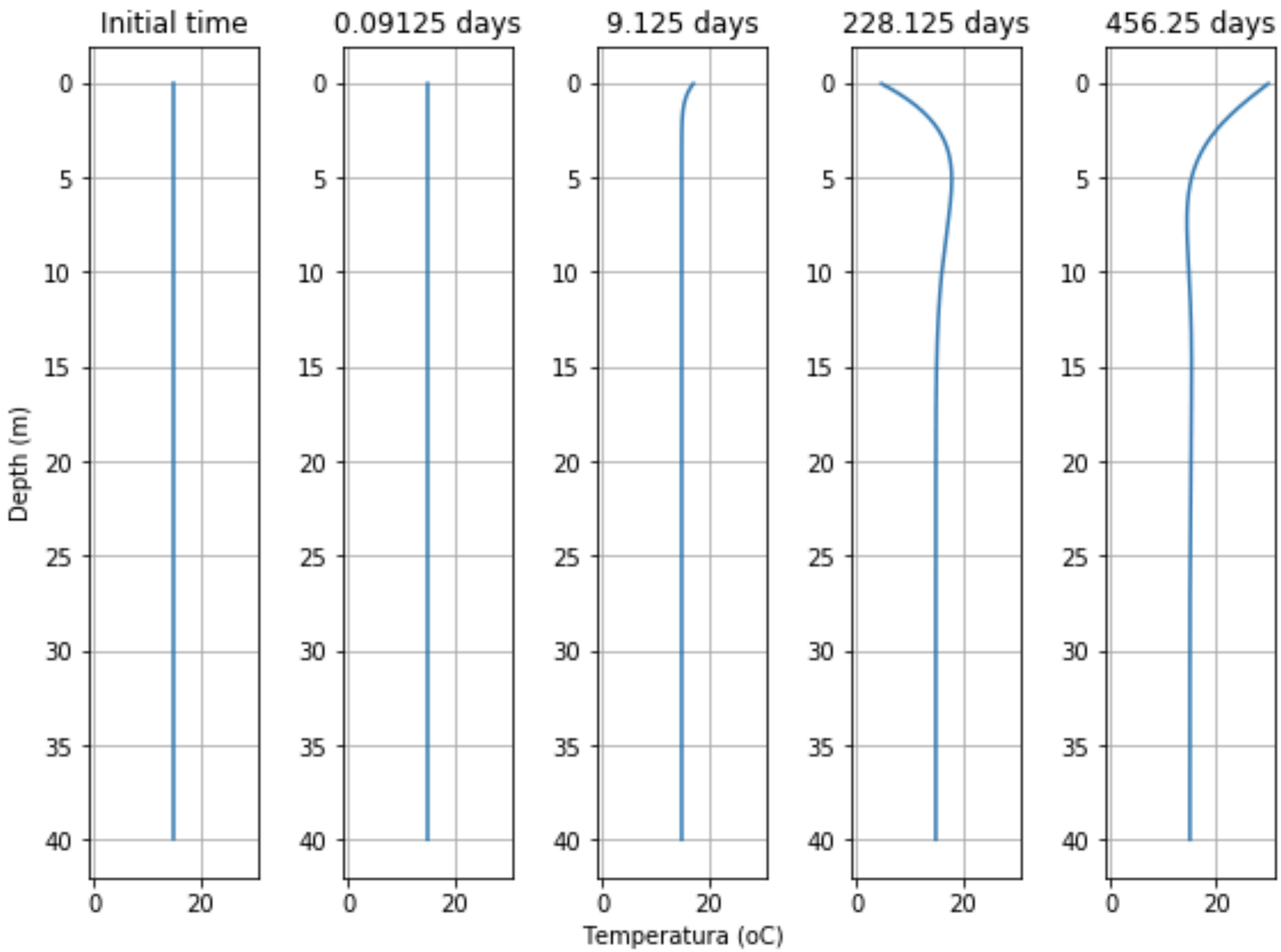
Exemplo 1: Perturbação Anual

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



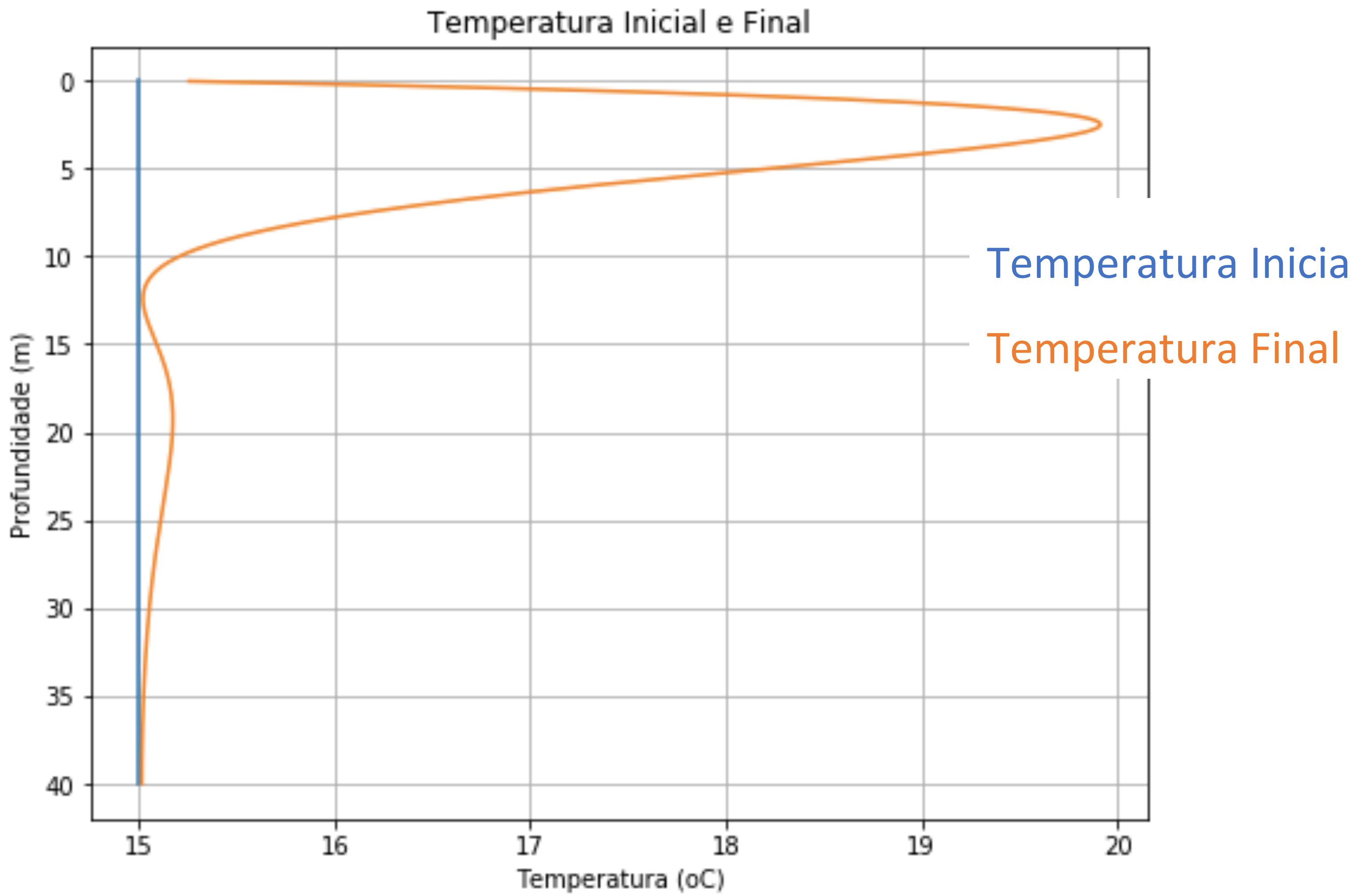
Exemplo 1: Perturbação Anual

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



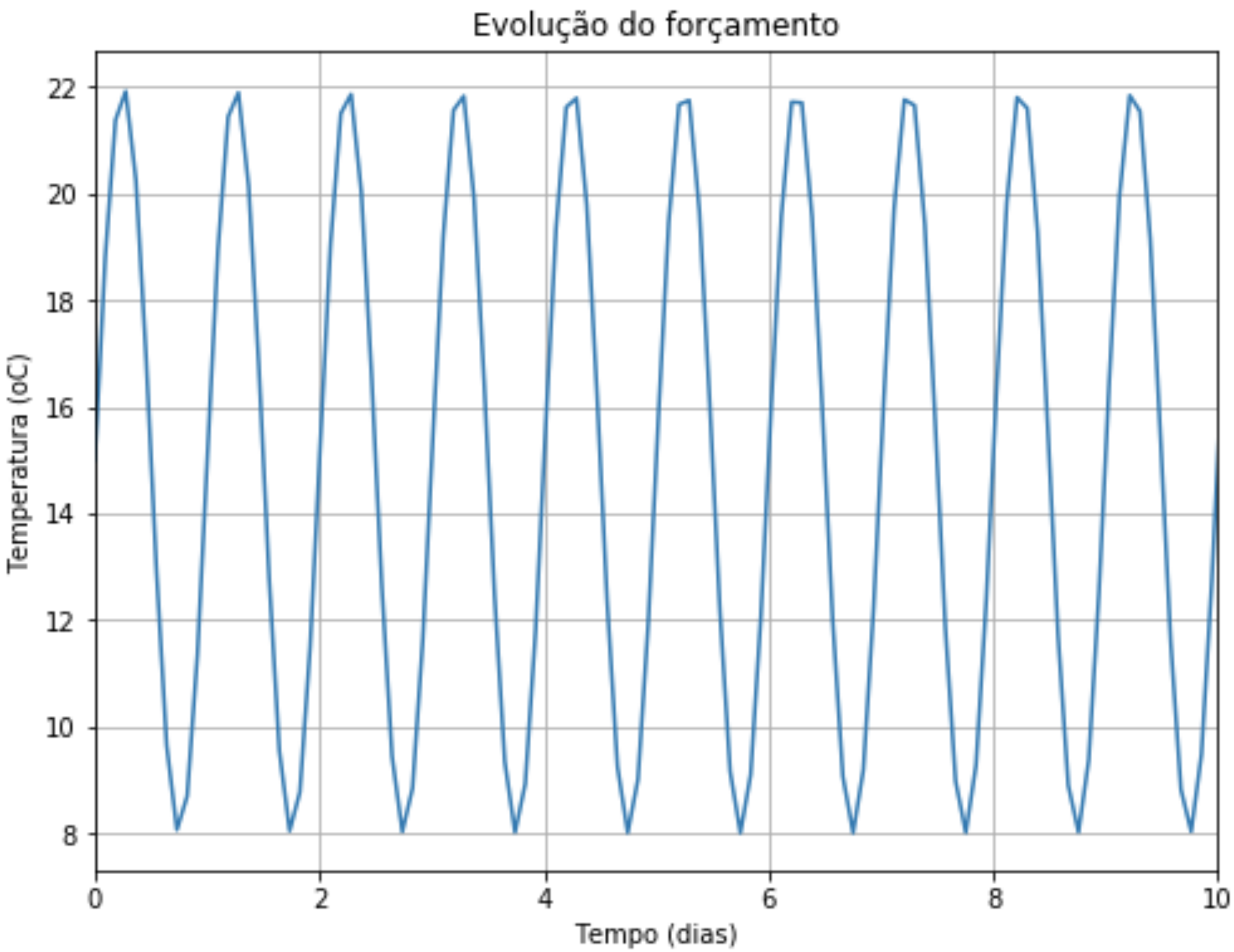
Exemplo 1: Perturbação Anual

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



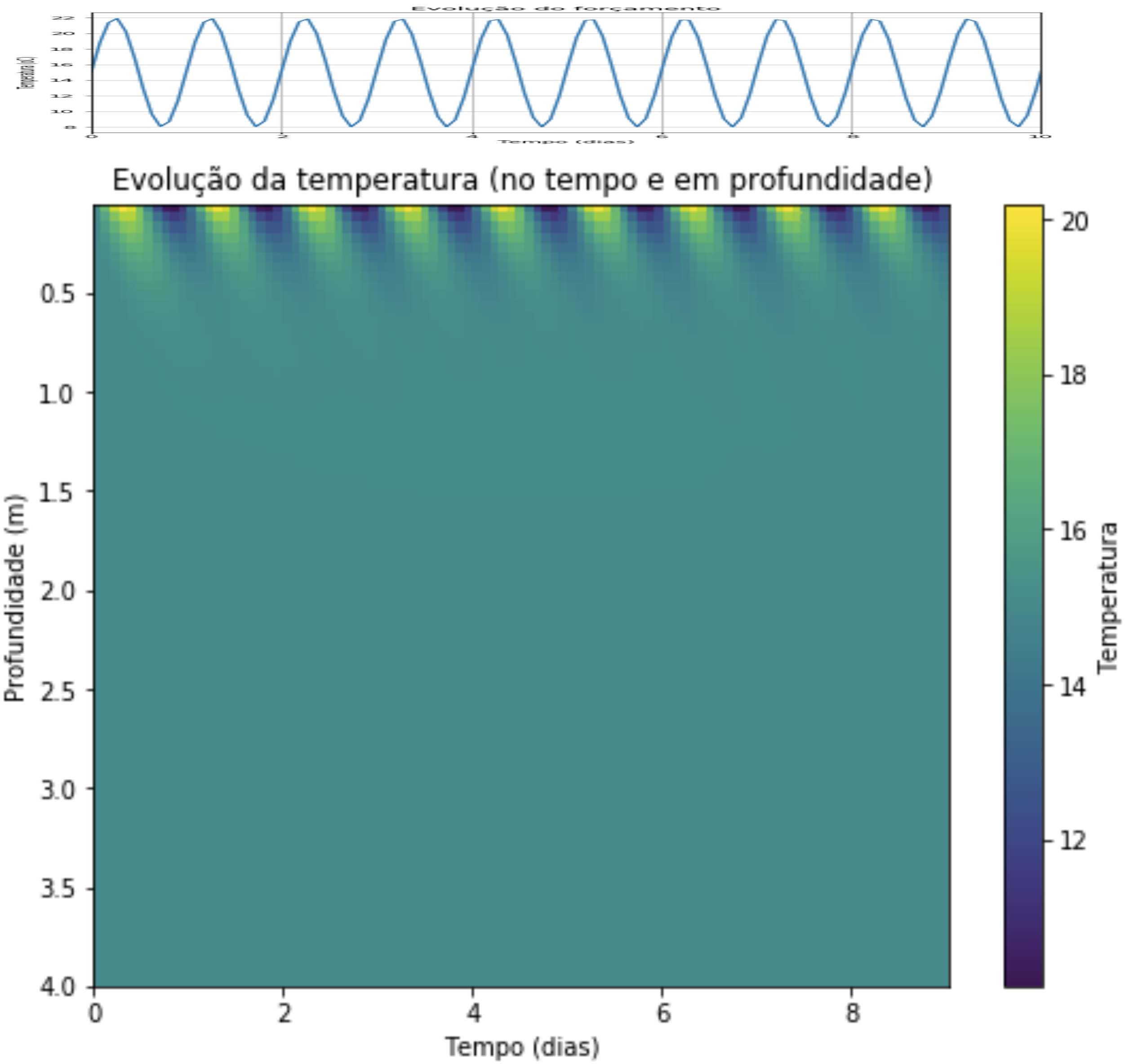
Exemplo 2: Perturbação Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



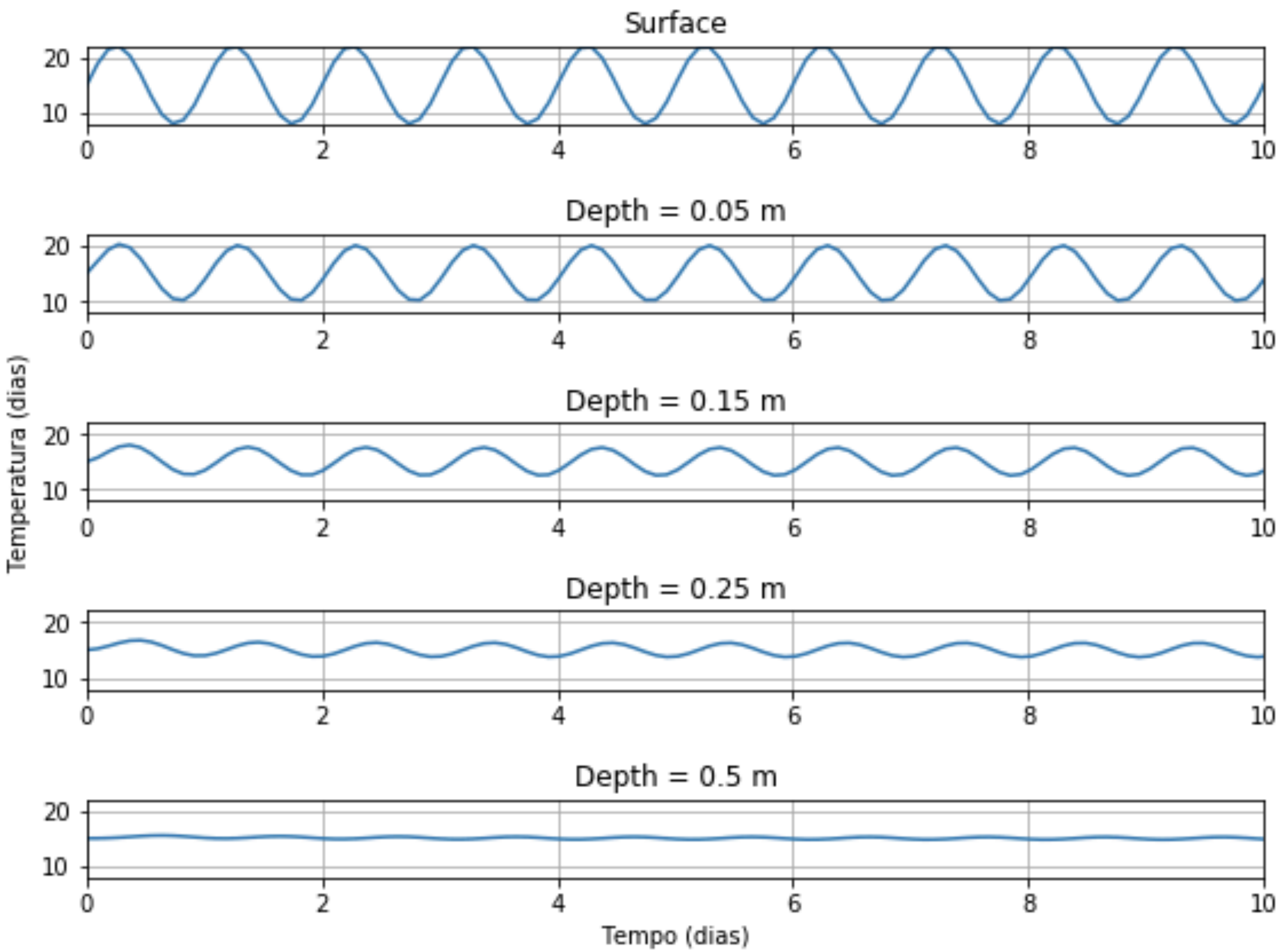
Exemplo 2: Perturbação Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



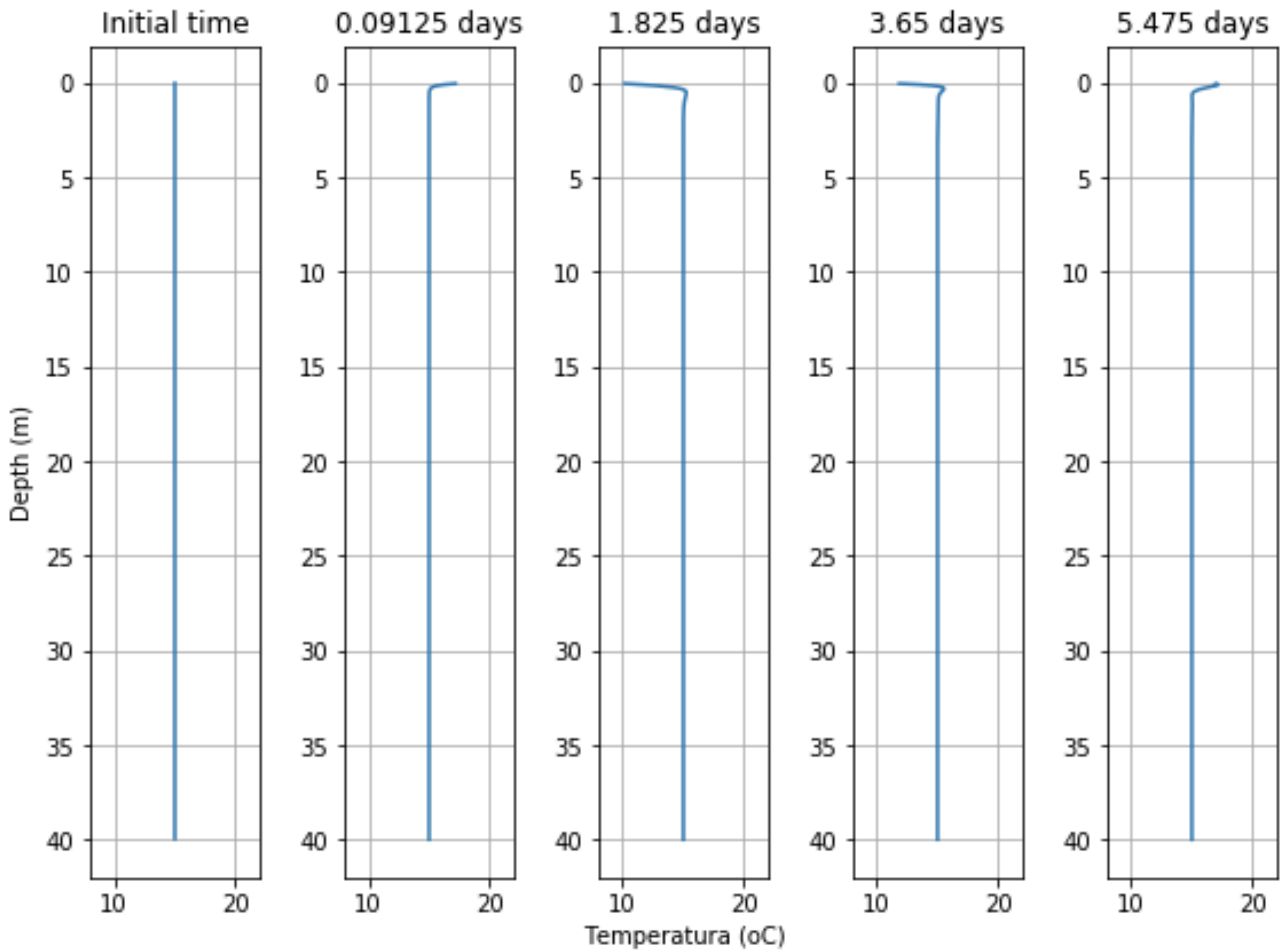
Exemplo 2: Perturbação Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



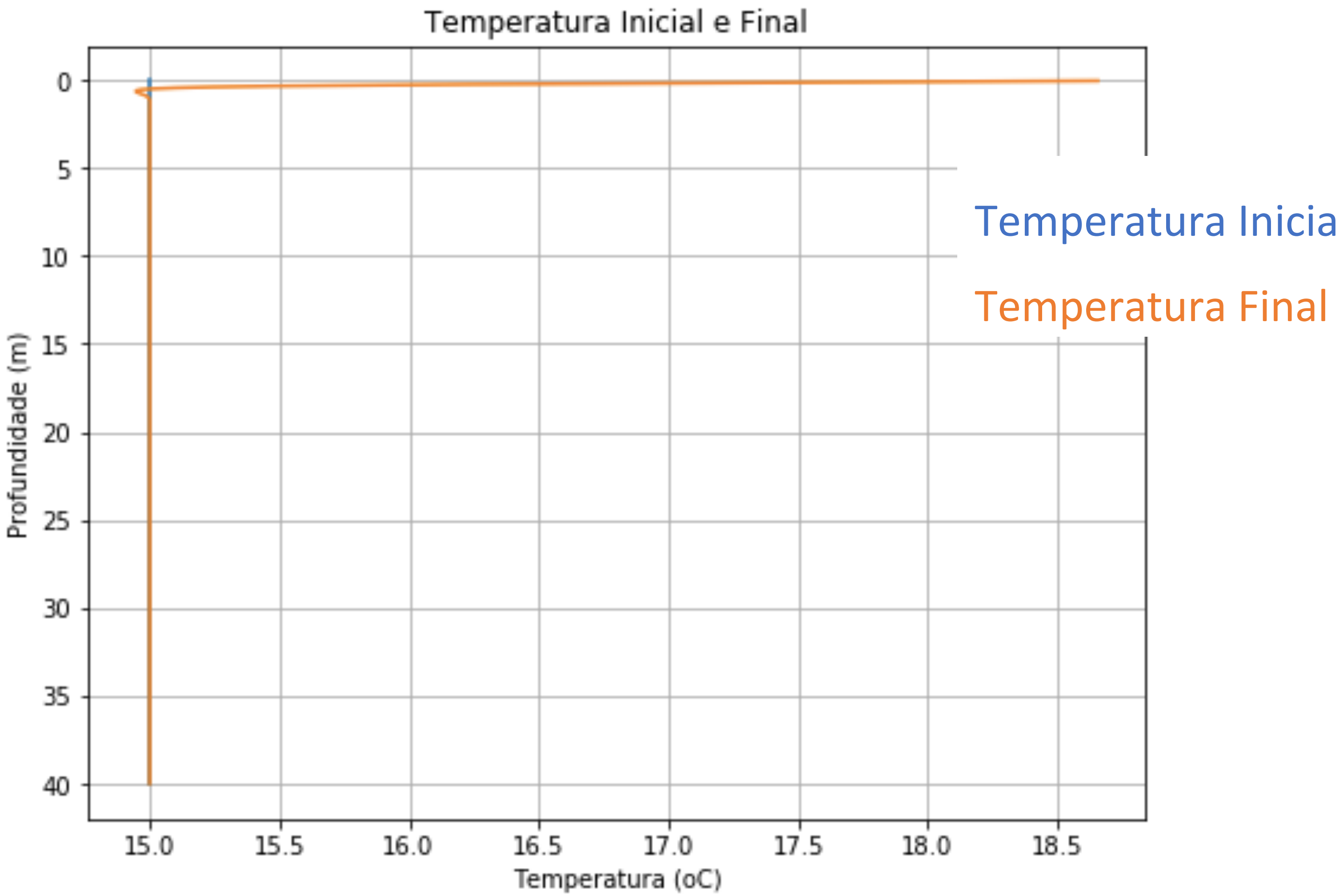
Exemplo 2: Perturbação Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



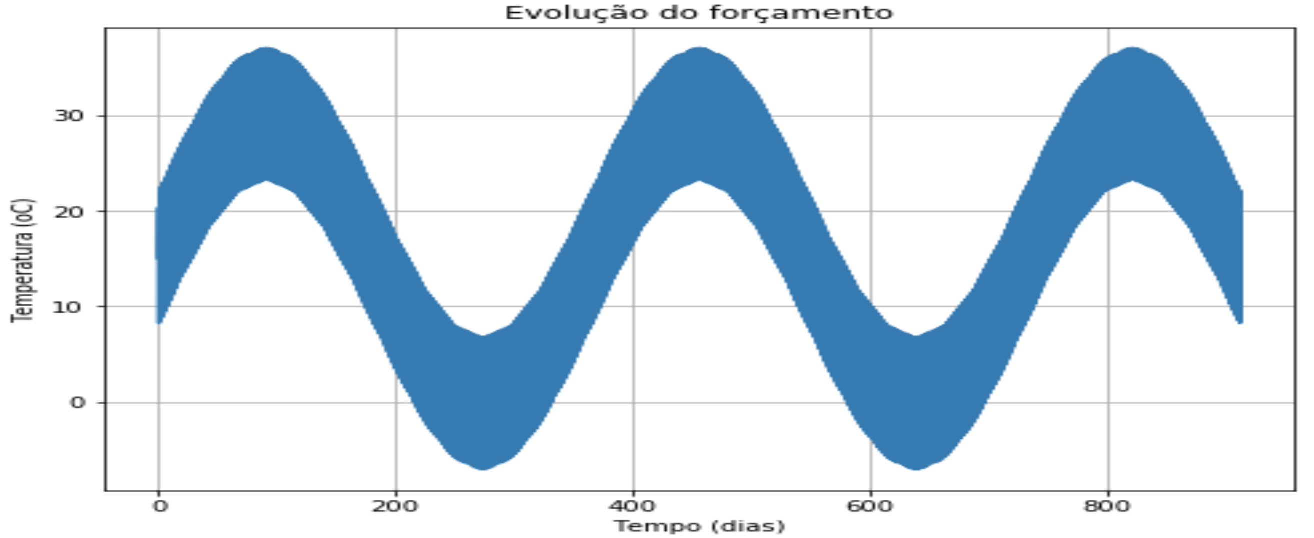
Exemplo 2: Perturbação Diária

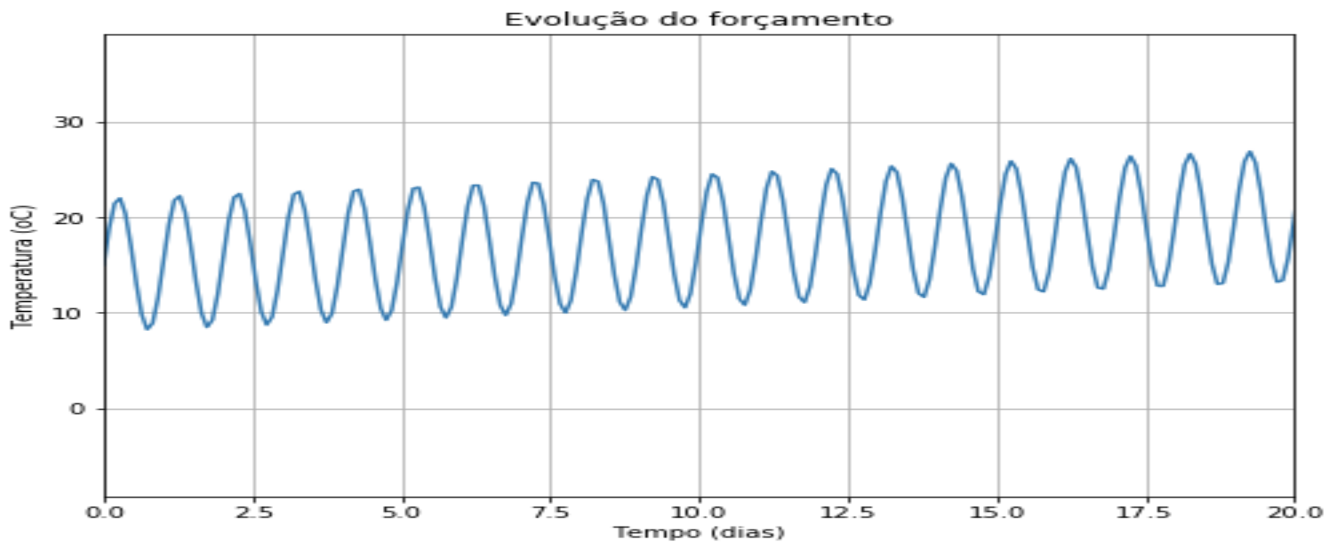
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

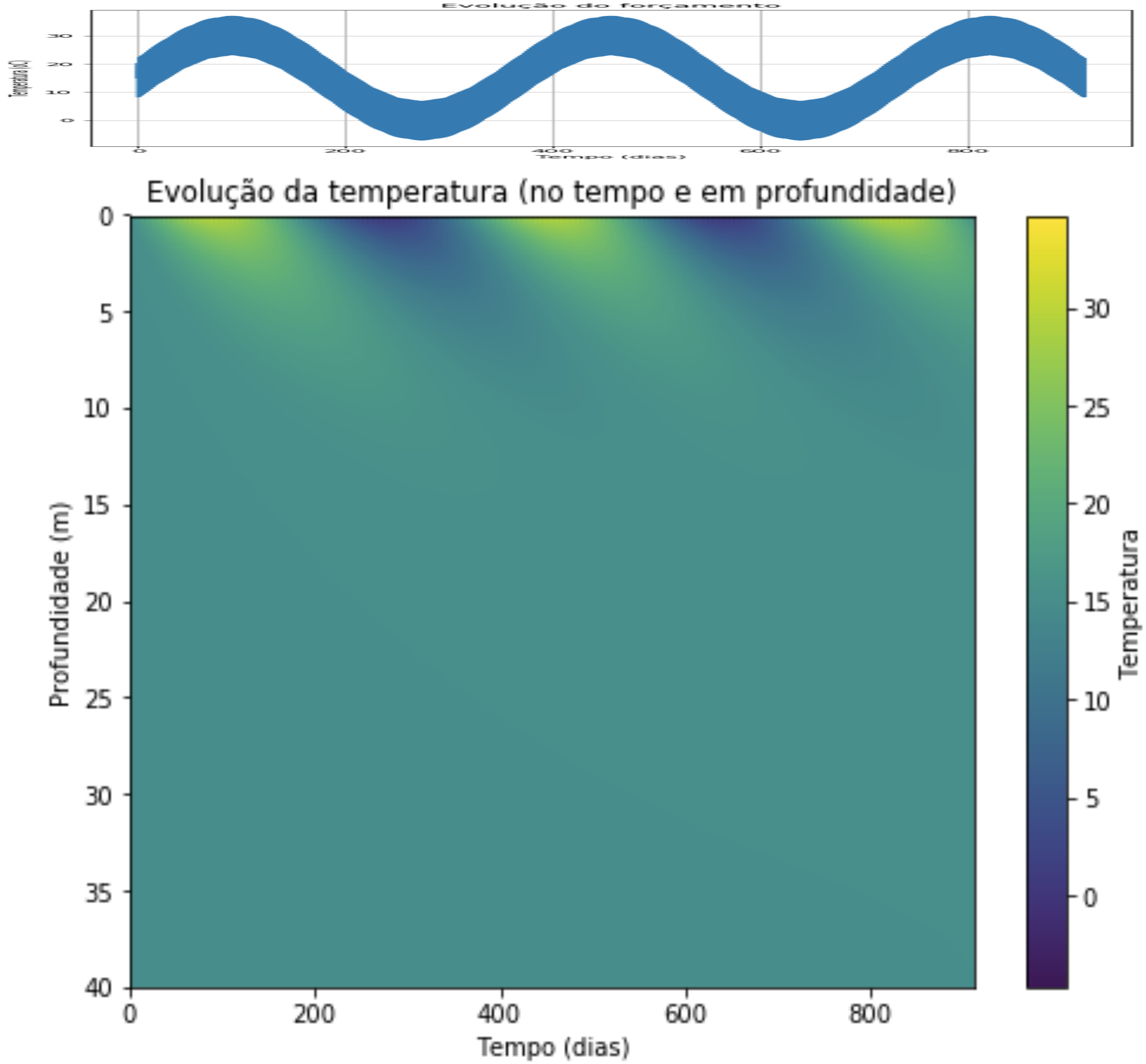
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$





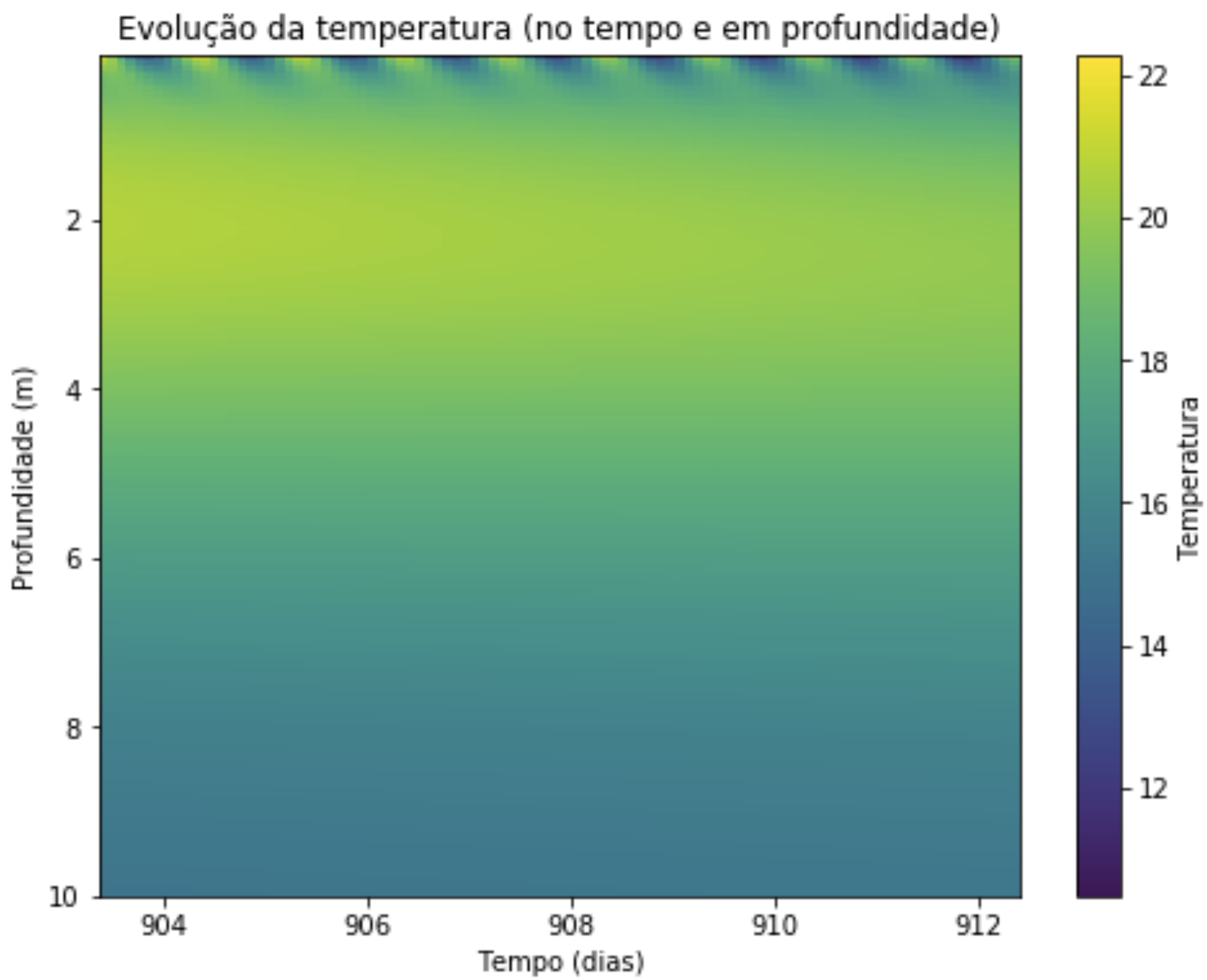
Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



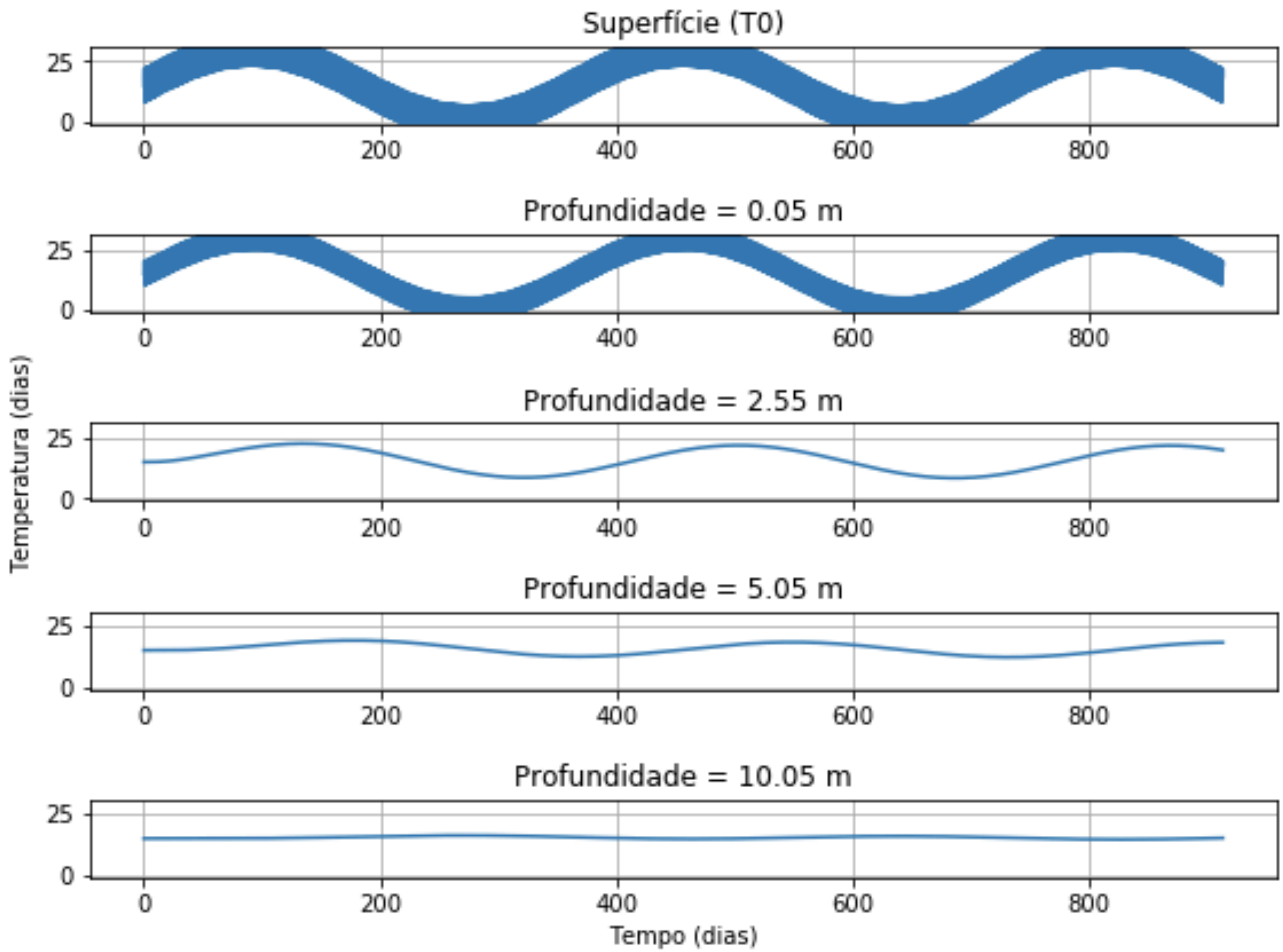
Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



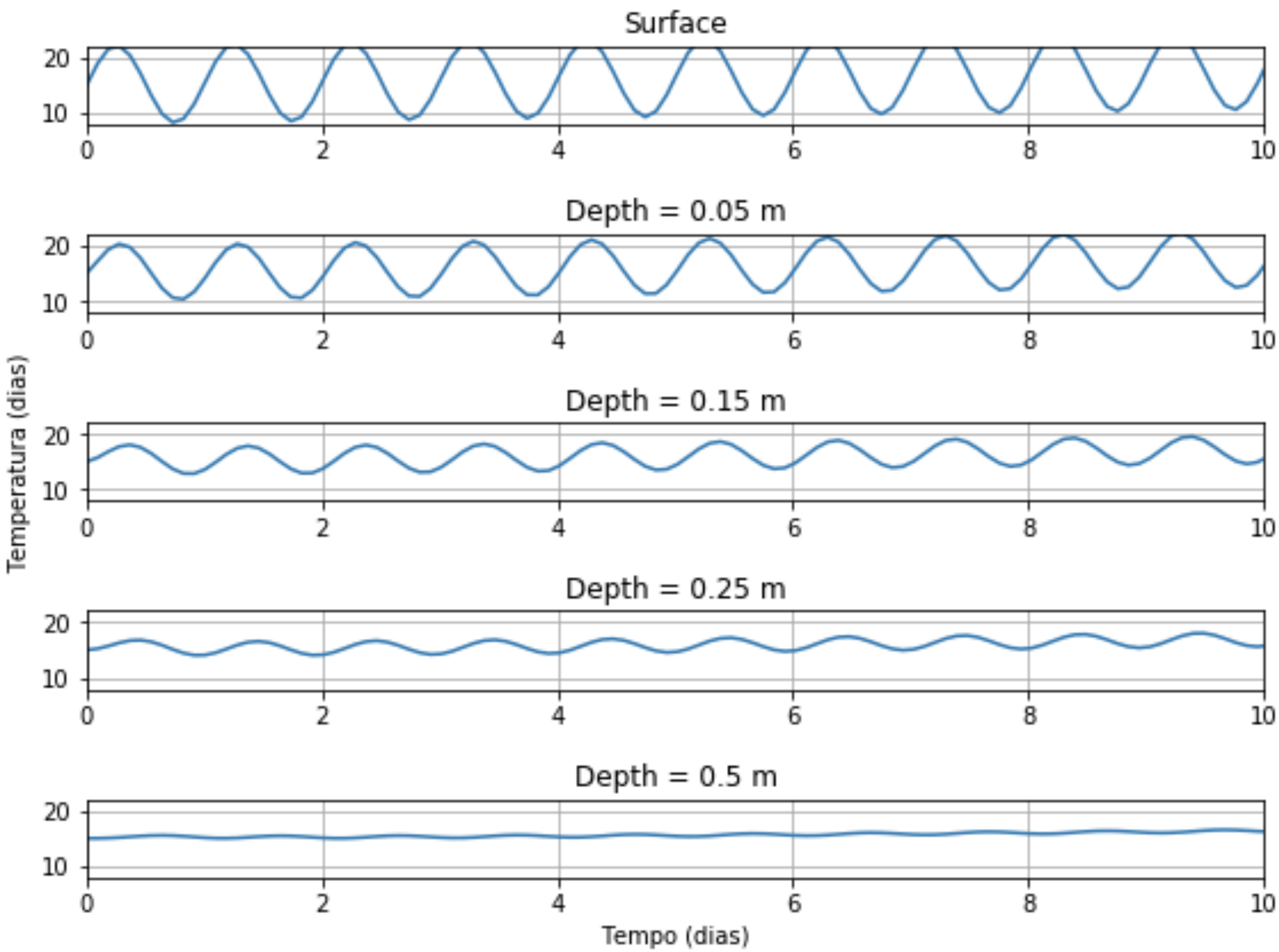
Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$



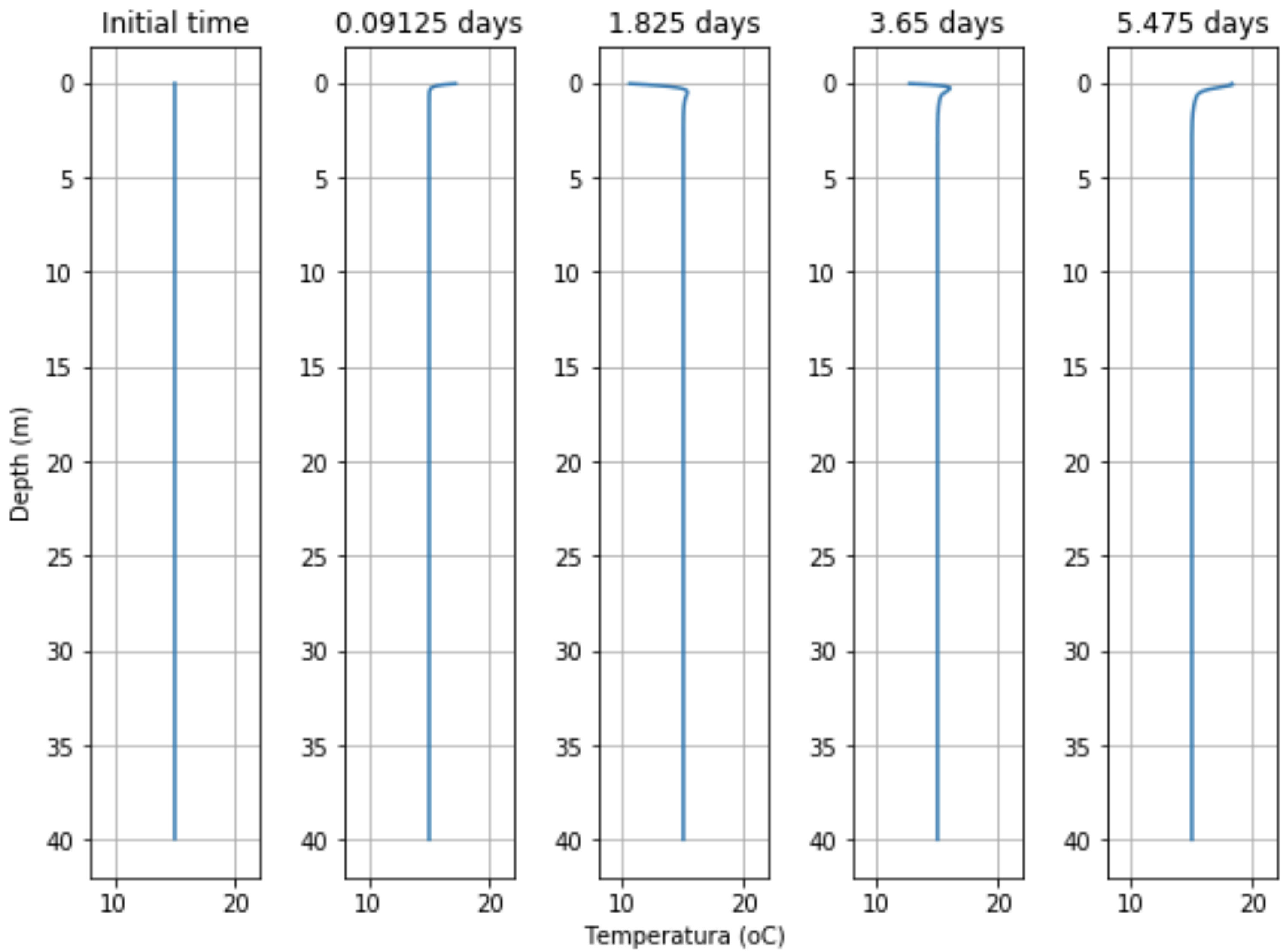
Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



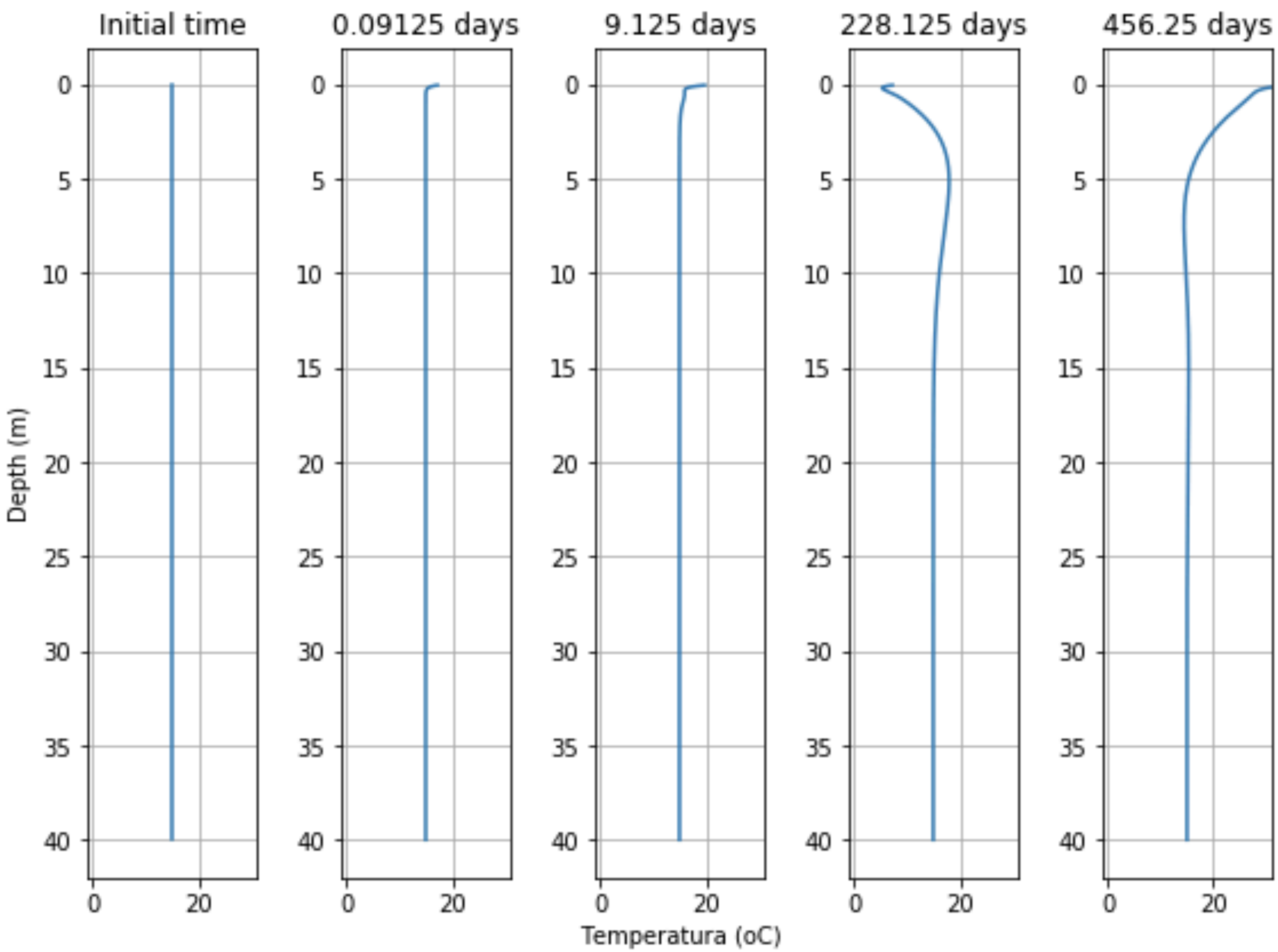
Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



Exemplo 3: Perturbação Annual e Diária

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$