FACULDADE·DE·CIÊNCIAS UNIVERSIDADE·DE·LISBOA

Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia

1ª época de Topografia

28 de Junho de 2008

O exame é sem consulta e tem a duração de 3 horas

1. Um teodolito é essencialmente constituído por 3 partes: a base, o limbo graduado e a alidade. A base é constituída por um cilindro apoiado em 3 braços, nas extremidades dos quais se encontram os parafusos nivelantes destinados a verticalizar o eixo principal do aparelho; sobre a parte superior da base encontra-se fixado um disco graduado horizontal – limbo azimutal; a alidade apoia-se na base, podendo rodar em torno do eixo principal, movimento este que arrasta toda a parte superior do aparelho, incluindo a luneta. A alidade inclui dois índices diametralmente opostos destinados a indicar as leituras no limbo.

Num teodolito repetidor, o limbo azimutal tem a possibilidade de ser fixado ora à base do aparelho ora à alidade, permitindo desta forma acumular leituras sucessivas do limbo azimutal (com o limbo fixado à base, aponta-se sucessivamente para A e para B e registam-se as leituras; fixando de seguida o limbo à alidade, aponta-se para A, não havendo portanto alteração da leitura azimutal; fixando novamente o limbo à base, aponta-se para B e regista-se a leitura); num teodolito reiterador, o limbo azimutal tem sempre movimentos independentes da alidade, podendo assim marcar-se previamente no limbo a leitura desejada sem que o aparelho execute movimentos de conjunto.

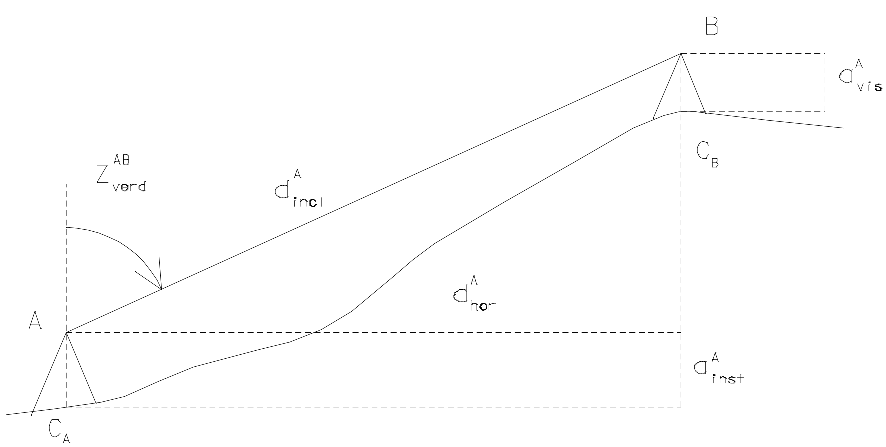
A razão da utilização destes procedimentos de observação é distribuir as leituras para os pontos visados pela totalidade do limbo azimutal, atenuando desta forma eventuais erros de graduação.

$$\alpha = L_B^4 - L_A^4 = 110º - 90º$$
$$\alpha = L_B^3 - L_A^3 = 90º - 70º$$
$$\alpha = L_B^2 - L_A^2 = 70º - 50º$$
$$\alpha = L_B^1 - L_A^1 = 50º - 30º$$

$$4\alpha = L_B^4 - L_A^1 = 110º - 30º = 80º \Rightarrow \alpha = \frac{80º}{4} = 20º$$

Sendo n=4 o número de reiterações e p=2 o número de microscópios (índices) do teodolito, as 4 origens a considerar estão separadas por 360º/np=360º/8=45º; assim, sendo as leituras obtidas na 1ª reiteração L_A=30º, L_B=50º, as restantes leituras efectuadas são L_A=75º, L_B=95º; L_A=120º, L_B=140º; L_A=165º, L_B=185º.

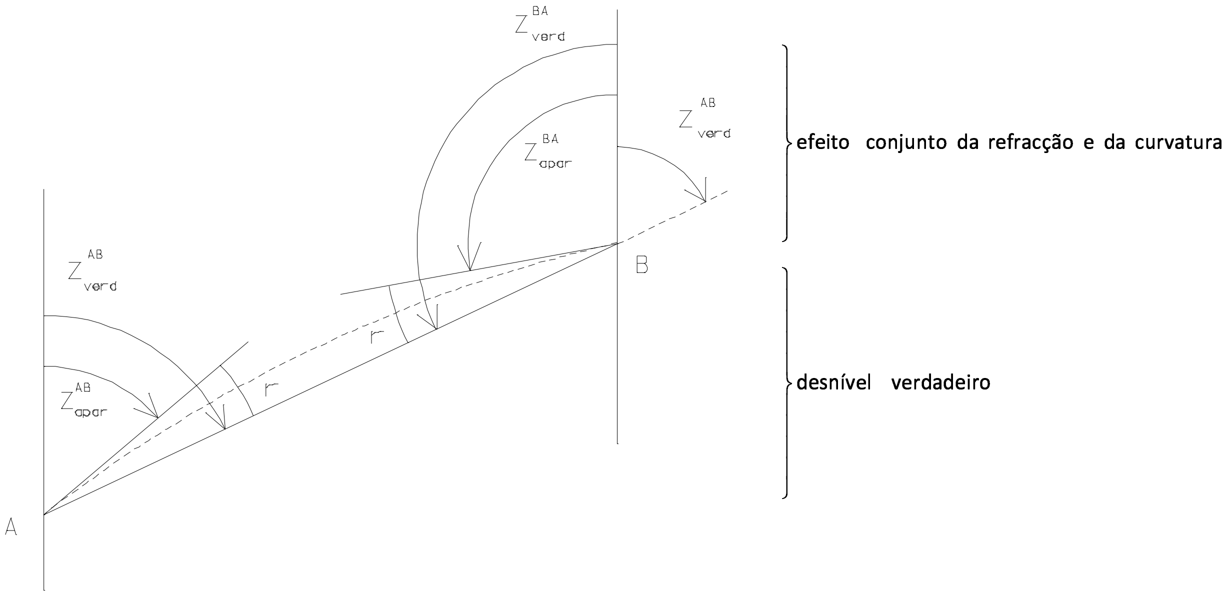
2.



Da figura, sendo Z^{AB}_{verd} a distância zenital verdadeira (geométrica) correspondente à visada de A para B:

$$C_A + a^A_{inst} + d^A_{incl}\cos Z^{AB}_{verd} - a^A_{vis} = C_B \Rightarrow C_B - C_A = \Delta_{AB} = d^A_{incl}\cos Z^{AB}_{verd} + a^A_{inst} - a^A_{vis} = d^A_{hor}\cot Z^{AB}_{verd} + a^A_{inst} - a^A_{vis}$$

Na realidade, a visada de A para B está afectada pela refracção, pelo que a distância zenital efectivamente medida é a distância zenital aparente Z^{AB}_{apar} :



Utilizando zenitais recíprocas tem-se, da figura:

$$\left.\begin{array}{l} Z^{AB}_{verd}=Z^{AB}_{apar}+r \\ \left.\begin{array}{l} Z^{BA}_{verd}=Z^{BA}_{apar}+r \\ Z^{BA}_{verd}=180^o-Z^{AB}_{verd} \Rightarrow Z^{AB}_{verd}=180^o-Z^{BA}_{verd} \end{array}\right\} \quad Z^{AB}_{verd}=180^o-Z^{BA}_{verd}=180^o-(Z^{BA}_{apar}+r) \end{array}\right\} \quad 2Z^{AB}_{verd}=Z^{AB}_{apar}+r+180^o-(Z^{BA}_{apar}+r)$$

donde

$$Z^{AB}_{verd}=\frac{Z^{AB}_{apar}+180^o-Z^{BA}_{apar}}{2},$$

que dá a distância zenital verdadeira em A em função das distâncias zenitais aparentes (observadas), **eliminando o efeito da refracção** (supondo as observações simultâneas e que o valor da refracção é idêntico em A e B), valor este que é utilizado na expressão de cálculo dos desnível entre A e B:

$$C_B - C_A = \Delta_{AB} = d^A_{incl}\cos Z^{AB}_{verd} + a^A_{inst} - a^A_{vis} = d^A_{hor}\cot Z^{AB}_{verd} + a^A_{inst} - a^A_{vis}.$$

3. a)

	Leituras à rectaguarda					Leituras à frente					Desníveis	
	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	a subir	a descer
A	1.187	0.931	0.675	0.931	51.2							
B	1.524	1.052	0.580	1.052	94.4	3.361	3.104	2.848	3.104	51.3		2.173
C	2.390	2.156	1.922	2.156	46.8	3.954	3.481	3.009	3.481	94.5		2.429
D	1.262	1.157	1.052	1.157	21	1.605	1.371	1.141	1.372	46.4	0.785	
E	1.655	1.118	0.581	1.118	107.4	2.907	2.804	2.699	2.803	20.8		1.647
F						2.632	2.093	1.556	2.094	107.6		0.976

$$\Delta_{AB} = C_B - C_A = 201.371\,\text{m} - 207.825\,\text{m} = -6.454\,\text{m}$$

$$\varepsilon = \Delta_{AB} + \sum \text{desníveis} = -6.454 + 6.440 = -0.014\,\text{m}$$

$\varepsilon_T\,(\text{mm}) = 50\sqrt{\sum \text{distâncias(km)}} = 0.04\,\text{m} \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon_T$, ou seja, aceitam-se os dados e pode efectuar-se o ajustamento:

pesos: $\varepsilon_j = \dfrac{D_j^2}{\sum_k D_k^2} = \dfrac{D_j^2}{102.5^2 + 188.9^2 + 93.2^2 + 41.8^2 + 215^2} = \dfrac{D_j^2}{7346281.429}$, D=distância entre miras

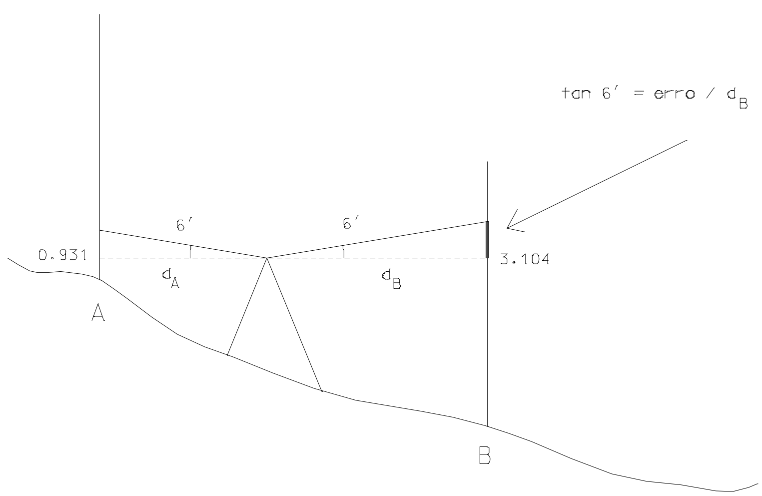
desníveis ajustados: $\overline{\Delta}_j = \Delta_j + \varepsilon_j \times \varepsilon \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_1 &= -2.173 - 0.001 = -2.174\\
\overline{\Delta}_2 &= -2.429 - 0.005 = -2.434\\
\overline{\Delta}_3 &= 0.784 - 0.001 = 0.783\\
\overline{\Delta}_4 &= -1.646 - 0.000 = -1.646\\
\overline{\Delta}_5 &= -0.976 - 0.006 = -0.982
\end{aligned}$$

cotas ajustadas:

$$\begin{aligned}
C_A &= 207.825\,\text{m}\\
C_B &= 205.651\,\text{m}\\
C_C &= 203.217\,\text{m}\\
C_D &= 204.000\,\text{m}\\
C_E &= 202.354\,\text{m}\\
C_F &= 201.371\,\text{m}
\end{aligned}$$

b)



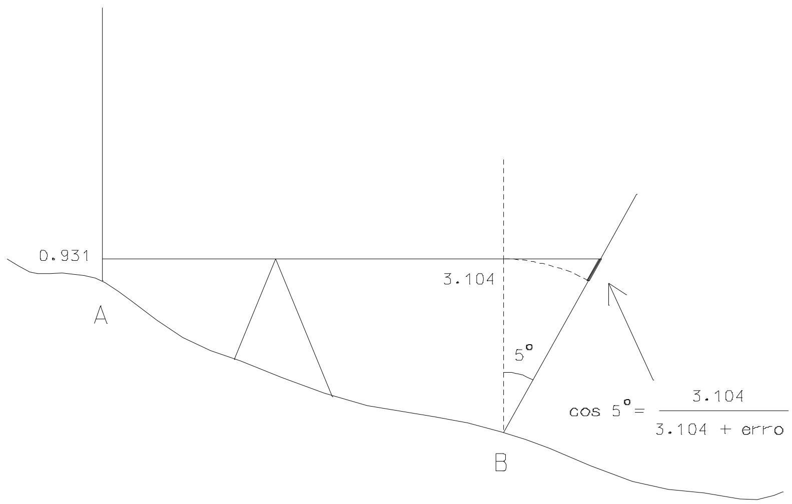
Existindo um erro de colimação de 6’, as leituras não seriam as indicadas mas sim um pouco maiores:

Leitura À rectaguarda em A: 0.931+51.2*tan6’=1.020 m

Leitura à frente em B: 3.104+51.3*tan6'=3.194 m

O desnível correspondente seria -2.174 m ou seja, embora o erro afecte bastante as leituras, neste caso, como as distâncias nível-miras são muito semelhantes atrás e à frente, a diferença é relativamente pequena.

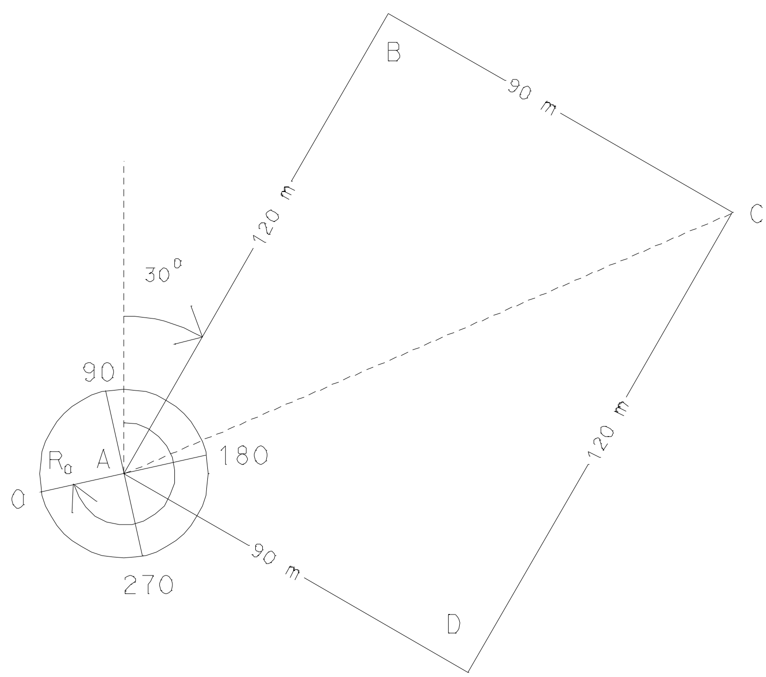
c)



A leitura à frente em B seria: 3.104+erro=3.104/cos 5º =3.116, pelo que o desnível entre A e B seria -2.185 m.

4.

Considere-se o campo de futebol que se pretende implantar:



Supondo que se estaciona no vértice A, a que atribuem coordenadas (0,0), as coordenadas dos restantes vértices são:

$M_B = M_A + 120 \sin 30º = 60.000$
$P_B = P_A + 120 \cos 30º = 103.923$
$M_C = M_A + 150 \sin 66º.87 = 137.942$
$P_C = P_A + 150 \cos 66.87 = 58.923$
$M_D = M_A + 90 \sin 120 = 77.942$
$P_D = P_A + 90 \cos 120 = -45.000$

Diferenciando as expressões anteriores e elevando ao quadrado, obtém-se a variância associada a cada coordenada:

$$\sigma_M^2 = \sigma_{dist}^2 \sin^2 R + dist^2 \cos^2 R\ \sigma_R^2$$
$$\sigma_P^2 = \sigma_{dist}^2 \cos^2 R + dist^2 \sin^2 R\ \sigma_R^2$$

Concretizando para cada um dos pontos:

$$\sigma_{M_B}^2 = (0.005^2 + (120 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\sin 30º)^2 + 120^2 \times (\cos 30º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 1.268619 \times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{M_B} = 0.004\,m$$
$$\sigma_{P_B}^2 = (0.005^2 + (120 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\cos 30º)^2 + 120^2 \times (\sin 30º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 2.536619 \times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{P_B} = 0.005\,m$$
$$\sigma_{M_C}^2 = (0.005^2 + (150 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\sin 66.87º)^2 + 150^2 \times (\cos 66.87º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 2.365816 \times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{M_C} = 0.005\,m$$
$$\sigma_{P_C}^2 = (0.005^2 + (150 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\cos 66.87º)^2 + 150^2 \times (\sin 66.87º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 3.674361 \times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{P_C} = 0.006\,m$$
$$\sigma_{M_D}^2 = (0.005^2 + (90 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\sin 120º)^2 + 90^2 \times (\cos 120º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 2.009178 \times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{M_D} = 0.004\,m$$
$$\sigma_{P_D}^2 = (0.005^2 + (90 \times 5 \times 10^{-6})^2) \times (\cos 120º)^2 + 90^2 \times (\sin 120º)^2 \times (5 \times \pi/(60 \times 60 \times 180))^2 = 9.870360 \times 10^{-6} \Rightarrow \sigma_{P_D} = 0.003\,m$$

De $Area = Lado_1 \times Lado_2$, tem-se por diferenciação $dArea = dLado \times Lado_1 + dLado \times Lado_2 = (Lado_1 + Lado_2) \times dLado$ e $\sigma_{Area}^2 = (Lado_1 + Lado_2)^2 \times \sigma_{dist}^2 \Rightarrow \sigma_{dist}^2 = \dfrac{10^2}{(120+90)^2} \Rightarrow \sigma_{dist} = 0.002\,m$

Uma hipótese é realizar uma intersecção inversa no ponto estação de forma a determinar as coordenadas e o R_0 nesse ponto; a partir daí, roda-se o limbo azimutal no sentido decrescente da graduação até marcar 0º (direcção do Norte cartográfico) e roda-se mais 30º no sentido crescente da graduação de forma a definir o rumo pretendido.

5.

a) <u>cálculo do R_0 no ponto inicial da poligonal (A)</u>

$$R_0^A = a\tan \frac{M_{Seixos} - M_A}{P_{Seixos} - P_A} - L_{A,Seixos}^{az} = a\tan \frac{1958.929}{253.68} - 23^g.741 = 91^g.801 - 23^g.741 = 68^g.060$$

b) <u>cálculo do R_0 no ponto final da poligonal (D)</u>

$$R_0^D = a\tan \frac{M_{Cabeço\ Branco} - M_D}{P_{Cabeço\ Branco} - P_D} - L_{D,Cabeço\ Branco}^{az} = a\tan \frac{-100.974}{685.314} - 209^g.960 = 400^g - 9^g.313 - 209^g.960 = 180^g.727$$

c) <u>cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal</u>

em A: $R_{A,B} = R_0^A + L_{A,B}^{Az} = 91^g.801 + 248^g.099 = 316^g.159$

em B: $R_{B,C} = R_{A,B} + L_{B,C}^{Az} - L_{B,A}^{Az} + 200^g = 316^g.159 + 88^g.889 - 301^g.630 + 200^g = 303^g.418$

em C: $R_{C,D} = R_{B,C} + L_{C,D}^{Az} - L_{C,B}^{Az} + 200^g = 303^g.418 + 264^g.802 - 79^g.381 + 200^g = 288^g.839$

d) <u>cálculo do erro de fecho angular</u>

$$\varepsilon_\alpha = R_{C,D} + 200^g - L_{D,C}^{az} - R_0^D = 288^g.839 + 200^g - 308^g.106 - 180^g.727 = 0^g.006$$

e) <u>compensação dos rumos</u>

$$\overline{R}_{A,B} = R_{A,B} - \frac{\varepsilon_\alpha}{3} = 316^g.159 - 0^g.002 = 316^g.157$$

$$\overline{R}_{B,C} = R_{B,C} - \frac{2\varepsilon_\alpha}{3} = 303^g.418 - 0^g.004 = 303^g.414$$

$$\overline{R}_{C,D} = R_{C,D} - \frac{3\varepsilon_\alpha}{3} = 288^g.159 - 0^g.006 = 288^g.833$$

f) <u>redução das distâncias ao horizonte</u>

$$d_{A,B}^{hor} = d_{A,B}^{incl} \sin L_{A,B}^z = 1628.090 \sin 103^g.922 = 1625.001 \text{ m}$$

$$d_{B,C}^{hor} = d_{B,C}^{incl} \sin L_{B,C}^z = 2104.551 \sin 98^g.615 = 2104.053 \text{ m}$$

$$d_{C,D}^{hor} = d_{C,D}^{incl} \sin L_{C,D}^z = 1972.649 \sin 93^g.710 = 1963.028 \text{ m}$$

g) <u>cálculo dos desníveis</u>

$$\Delta_{A,B} = d_{A,B}^{hor} / \tan L_{A,B}^z + \frac{0.43}{6371000} {d_{A,B}^{hor}}^2 + a_A^{ins} - a_A^{vis} = 1625.001 / \tan 103^g.922 + \frac{0.43}{6371000} 1625.001^2 + 1.72 - 1.65 = -99.988 \text{ m}$$

$$\Delta_{B,C} = d_{B,C}^{hor} / \tan L_{B,C}^z + \frac{0.43}{6371000} {d_{B,C}^{hor}}^2 + a_B^{ins} - a_B^{vis} = 2104.053 / \tan 98^g.615 + \frac{0.43}{6371000} 2104.053^2 + 1.69 - 1.76 = 46.014 \text{ m}$$

$$\Delta_{C,D} = d_{C,D}^{hor} / \tan L_{C,D}^z + \frac{0.43}{6371000} {d_{C,D}^{hor}}^2 + a_C^{ins} - a_D^{vis} = 1963.028 / \tan 93^g.710 + \frac{0.43}{6371000} 1963.028^2 + 1.74 - 1.80 = 194.790 \text{ m}$$

h) <u>cálculo do erro de fecho altimétrico</u>

$$\varepsilon_C = C_A - C_D + (\Delta_{A,B} + \Delta_{B,C} + \Delta_{C,D}) = 841.260 - 982.048 + (-99.988 + 46.014 + 194.790) = 0.028 \text{ m}$$

i) compensação dos desníveis

$$0\ \overline{\Delta}_{A,B} = \Delta_{A,B} - \frac{d^{hor}_{A,B}}{d^{hor}_{A,B} + d^{hor}_{B,C} + d^{hor}_{C,D}} \varepsilon_c = -99.988 - \frac{1625.001}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = -99.996 \text{ m}$$

$$\overline{\Delta}_{B,C} = \Delta_{B,C} - \frac{d^{hor}_{B,C}}{d^{hor}_{A,B} + d^{hor}_{B,C} + d^{hor}_{C,D}} \varepsilon_c = 46.014 - \frac{2104.053}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 46.004 \text{ m}$$

$$\overline{\Delta}_{C,D} = \Delta_{C,D} - \frac{d^{hor}_{C,D}}{d^{hor}_{A,B} + d^{hor}_{B,C} + d^{hor}_{C,D}} \varepsilon_c = 194.790 - \frac{1963.028}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 194.780 \text{ m}$$

j) cálculo das cotas

$$C_B = C_A + \overline{\Delta}_{A,B} = 841.260 - 99.996 = 741.264 \text{ m}$$

$$C_C = C_B + \overline{\Delta}_{B,C} = 741.264 + 46.004 = 787.268 \text{ m}$$

$$C_D = C_C + \overline{\Delta}_{C,D} = 787.268 + 194.780 = 982.048 \text{ m}$$

k) redução das distâncias ao elipsóide

$$d^{elip}_{A,B} = d^{hor}_{A,B} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_A + C_B}{2}} = 1624.799 \text{ m}$$

$$d^{elip}_{B,C} = d^{hor}_{B,C} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_B + C_C}{2}} = 2103.801 \text{ m}$$

$$d^{elip}_{C,D} = d^{hor}_{C,D} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_C + C_D}{2}} = 1962.755 \text{ m}$$

l) cálculo das coordenadas planimétricas

$$\delta M_A = d^{elip}_{A,B} \sin \overline{R}_{A,B} = 1624.799 \sin 316^g.157 = -1572.752$$

$$\delta P_A = d^{elip}_{A,B} \cos \overline{R}_{A,B} = 1624.799 \cos 316^g.157 = 407.951$$

$$\delta M_B = d^{elip}_{B,C} \sin \overline{R}_{B,C} = 2103.801 \sin 303^g.414 = -2100.777$$

$$\delta P_B = d^{elip}_{B,C} \cos \overline{R}_{B,C} = 2103.801 \cos 303^g.414 = 112.766$$

$$\delta M_C = d^{elip}_{C,D} \sin \overline{R}_{C,D} = 1962.755 \sin 288^g.833 = -1932.636$$

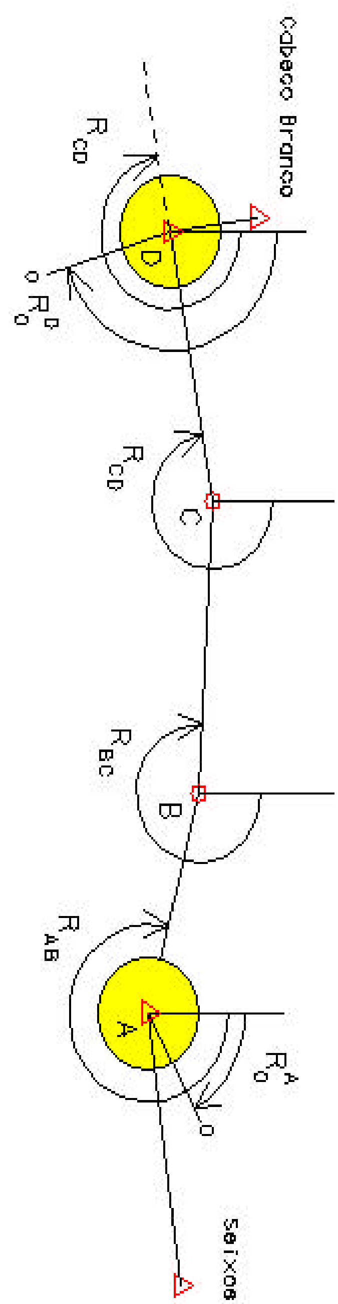
$$\delta P_C = d^{elip}_{C,D} \cos \overline{R}_{C,D} = 1962.755 \cos 288^g.833 = -342.526$$

$M_B = M_A + \delta M_A = 208.715 - 1572.752 = -1364.037$ m
$P_B = P_A + \delta P_A = -73095.011 + 407.951 = -72687.060$ m

$M_C = M_B + \delta M_B = -1364.037 - 2100.777 = -3464.814$ m
$P_C = P_B + \delta P_B = -72687.060 + 112.7664 = -72574.294$ m

$M_D = M_C + \delta M_C = -3464.814 - 1932.636 = -5397.450$ m
$P_D = P_C + \delta P_C = -72574.294 - 342.526 = -72916.820$ m

m) <u>cálculo definitivo da planimetria</u>



$\sum \delta M = \delta M_A + \delta M_B + \delta M_C = -5606.165$
$\sum \delta P = \delta P_A + \delta P_B + \delta P_C = 178.191$

$\Delta M = M_A - M_D = 5606.092$
$\Delta P = P_A - P_D = -178.118$

$EFM = \Delta M + \sum \delta M = -0.073$
$EFP = \Delta P + \sum \delta P = 0.073$

$\left|\sum \delta M\right| = |\delta M_A| + |\delta M_B| + |\delta M_C| = 5606.165$
$\left|\sum \delta P\right| = |\delta P_A| + |\delta P_B| + |\delta P_C| = 863.243$

$KM = -EFM / \left|\sum \delta M\right| = 1.302138 \times 10^{-5}$
$KP = -EFP / \left|\sum \delta P\right| = -8.456448 \times 10^{-5}$

$\bar{\delta}M_A = \delta M_A + KM \times |\delta M_A| = -1572.732$
$\bar{\delta}P_A = \delta P_A + KP \times |\delta P_A| = 407.917$
$\bar{\delta}M_B = \delta M_B + KM \times |\delta M_B| = -2100.750$
$\bar{\delta}P_B = \delta P_B + KP \times |\delta P_B| = 112.756$
$\bar{\delta}M_C = \delta M_C + KM \times |\delta M_C| = -1932.611$
$\bar{\delta}P_C = \delta P_C + KP \times |\delta P_C| = -342.555$

$M_B = M_A + \bar{\delta}M_A = -1364.017$
$P_B = P_A + \bar{\delta}P_A = -72687.094$
$M_C = M_B + \bar{\delta}M_B = -3464.767$
$P_C = P_B + \bar{\delta}P_B = -72574.338$
$M_D = M_C + \bar{\delta}M_C = -5397.378$
$P_D = P_C + \bar{\delta}P_C = -72916.893$