



UniversidadeTécnica de Lisboa

Instituto Superior Técnico

Circuitos Eléctricos

Sistemas Eléctricos e Electromecânicos

Gil Marques

Maria José Resende

Área Científica de Energia

2009/2010

Índice

ÍNDICE 3

Um Pouco de História.....	9
CAPÍTULO 1 NOÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DOS CIRCUITOS	11
1.1 Noção de Dipolo.....	11
1.1.1 Corrente num Dipolo.....	12
1.1.2 Diferença de Potencial aos Terminais de um Dipolo	12
1.1.3 Potência num Dipolo.....	13
1.1.4 Convenção Receptor	13
1.1.5 Convenção Gerador.....	14
1.2 Leis de Kirchhoff	15
1.2.1 Introdução	15
1.2.2 Lei dos Nós.....	17
1.2.3 Lei das Malhas.....	18
1.2.4 Exercícios	19
1.3 Componentes.....	19
1.3.1 Introdução.....	19
1.3.2 Fonte de Tensão.....	20
1.3.3 Fonte de Corrente.....	21
1.3.4 Resistência	23
1.3.5 Indutância	24
1.3.6 Capacidade.....	25
1.3.7 Modelos mais Realistas	26
CAPÍTULO 2 CIRCUITOS LINEARES	29
2.1 Introdução 29	
2.2 Associação de Resistências	29
2.2.1 Resistências em Série	29
2.2.2 Resistências em Paralelo	30
2.2.3 Alguns casos particulares.....	32
2.3 Dipolo de Thévenin e Dipolo de Norton	33
2.3.1 Equivalência entre dipolo de Thévenin e dipolo de Norton.....	34
2.3.2 Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de tensão.....	35
2.3.3 Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de corrente	37
2.4 Métodos de Análise de Circuitos.....	38
2.4.1 Método Geral	38
2.4.2 Método das malhas ou das correntes fictícias.....	39
2.4.3 Forma matricial	40
2.4.4 Exemplo.....	41
CAPÍTULO 3 CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA.....	43
3.1 Grandezas Alternadas Sinusoidais	43
3.1.1 Introdução	43
3.1.2 Definição	43
3.1.3 Valor Eficaz.....	45
3.1.4 Notação Complexa	46
3.1.5 Operações Matemáticas com Amplitudes Complexas	47
3.2 Circuitos Básicos.....	50
3.2.1 Elementos Ideais	50
3.2.2 Conceito de Impedância Complexa	54
3.2.3 Circuito RL série	56
3.2.4 Circuito RC série.....	60

3.3	Potências	64
3.3.1	Potência Instantânea	64
3.3.2	Potência Complexa	65
3.3.3	Potência em Elementos Ideais	67
3.3.4	Circuito RL Série	70
3.3.5	Circuito RC Série	72
3.3.6	Exercícios	75
3.4	Compensação do factor de potência	75
3.4.1	Introdução	75
3.4.2	Exercícios	76
3.4.3	Sistema monofásico – Compensação total	77
3.4.4	Sistema monofásico – Compensação parcial	78
3.4.5	Exercício	79
CAPÍTULO 4 SISTEMAS TRIFÁSICOS		81
4.1	Conceitos Básicos	81
4.1.1	Definição	81
4.1.2	Sistema Equilibrado	82
4.1.3	Tensões Simples e Compostas	82
4.2	Ligação de Cargas	85
4.2.1	Ligação em ESTRELA	85
4.2.2	Ligação em Triângulo ou Delta	87
4.2.3	Comparação Estrela Triângulo	89
4.2.4	Cargas Desequilibradas	91
4.2.5	Exemplos	92
4.3	Potências em sistemas trifásicos	93
4.3.1	Cargas desequilibradas	93
4.3.2	Cargas equilibradas	94
4.3.3	Cargas equilibradas ligadas em estrela	94
4.3.4	Cargas equilibradas ligadas em triângulo ou delta	95
4.3.5	Comparação entre cargas em Estrela e em Triângulo	95
4.3.6	Exemplos	97
4.3.7	Exercícios	99
CAPÍTULO 5 CIRCUITOS MAGNÉTICOS		101
5.1	Introdução	101
5.2	Conceitos Básicos – Noção de Circuito Magnético	102
5.2.1	Exemplo	109
5.3	Variação no tempo – Noção de força electromotriz	111
5.3.1	Exemplo	114
5.3.2	Exercícios	116
CAPÍTULO 6- PRINCÍPIOS DE CONVERSÃO ELECTROMECÂNICA DE ENERGIA		119
6.1	Introdução	119
6.2	Princípio da conservação de energia	119
6.3	Expressões da força mecânica e energia	122
6.3.1	Máquinas em "translação" e em "rotação"	122
6.3.2	Expressões da força electromagnética em função da energia	123
6.3.3	Expressões da força em função da co-energia magnética	126
6.3.4	Expressões do binário electromagnético	129
6.4	Expressões simplificadas - circuitos magnéticos lineares	129
6.5	Sistemas magnéticos de excitação múltipla	132
6.6	Sistemas com vários graus de liberdade mecânica	133
6.7	Excitação múltipla — caso do circuito magnético linear	135

6.8	Aplicação ao caso de sistemas magnéticos com ímanes permanentes.	137
6.8.1	Classificação dos dispositivos electromecânicos consoante o uso de íman permanente.....	138
6.9	Exercícios	138
CAPÍTULO 7 TRANSFORMADORES		143
7.1	Introdução	143
7.1.1	Valores nominais	144
7.2	Princípio de funcionamento – transformador ideal	145
7.3	Circuito equivalente do transformador	146
7.3.2	Aspectos práticos da análise com circuitos equivalentes	150
7.4	Ensaio em vazio e em curto-circuito	151
7.4.1	Ensaio em vazio.....	151
7.4.2	Ensaio em Curto-circuito.....	151
7.5	Transformador em carga.....	152
7.5.1	Rendimento.....	152
7.5.2	Queda de tensão	154
7.6	Autotransformador	155
7.6.1	Redução de cobre no autotransformador	156
7.7	Transformadores em sistemas trifásicos	157
7.8	Transformadores de medida	158
7.9	Características dos transformadores	158
7.10	Métodos mais comuns de refrigeração de transformadores	159
7.11	Exercícios	160
CAPÍTULO 8 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DAS MÁQUINAS DE CORRENTE ALTERNADA POLIFÁSICAS		163
8.1	Introdução	163
8.2	Campo criado por um enrolamento concentrado.....	163
8.2.1	Conceito de força magnetomotriz de entreferro	164
8.3	Campo criado por um enrolamento distribuído	166
8.3.1	Enrolamento monofásico	166
8.3.2	Enrolamento trifásico	167
8.4	Campo criado por um sistema trifásico sinusoidal.....	169
8.5	Cálculo do campo de indução no entreferro	172
8.6	Fluxos ligados com os enrolamentos (não incluindo os fluxos de dispersão)	173
8.7	Vector espacial de fluxo.	175
8.8	Forças electromotrizes induzidas nos enrolamentos.....	176
8.8.1	Correntes induzidas no rotor de uma máquina assíncrona	177
8.8.2	Campo girante criado pelas correntes do rotor.....	177
8.8.3	Princípio de funcionamento do gerador síncrono – geração das forças electromotrizes	178
8.9	Geração do binário.....	178
8.9.1	Princípio de funcionamento do motor assíncrono.....	181
8.9.2	Princípio de funcionamento do motor síncrono	181
8.10	Exercícios	181
CAPÍTULO 9 MÁQUINAS DE INDUÇÃO POLIFÁSICAS.....		183
9.1	Descrição das máquinas de indução polifásicas	183
9.1.1	Rotor em gaiola de esquilo	184
9.1.2	Rotor bobinado	185
9.2	Obtenção de um circuito equivalente.....	185
9.3	Análise do comportamento da máquina assíncrona através de circuitos equivalentes .	189

9.3.1	Introdução.....	189
9.3.2	Circuito equivalente em ângulo.....	192
9.4	Características das Máquinas de Indução.....	195
9.4.1	Circuito equivalente aproximado.....	195
9.4.2	Cálculo do desempenho a partir do circuito equivalente aproximado.....	196
9.4.3	Características do motor de indução ligado a uma rede eléctrica.....	200
9.4.4	O gerador de indução.....	205
9.5	Ensaio do motor de indução.....	206
9.5.1	Introdução.....	206
9.5.2	Determinação das resistências.....	206
9.5.3	Ensaio em vazio.....	206
9.5.4	Ensaio com rotor bloqueado ou em curto-circuito.....	208
9.5.5	Ensaio em Carga.....	208
9.6	Ajuste de velocidade das máquinas de indução.....	208
9.6.1	Introdução.....	208
9.6.2	Ajuste de velocidade por variação da frequência de alimentação.....	209
9.6.3	Ajuste da velocidade por variação do número de pares de pólos.....	211
9.6.4	Ajuste por variação do escorregamento.....	211
9.7	Arranque dos motores trifásicos de indução.....	213
9.7.1	Aspecto eléctrico.....	213
9.7.2	Aspecto mecânico.....	214
9.7.3	Aspecto energético ou térmico.....	215
9.7.4	Tipos de arranque para a máquina de rotor em gaiola.....	215
9.7.5	Tipos de arranque para o motor de rotor bobinado.....	219
9.8	Exercícios	220
CAPÍTULO 10 MÁQUINAS SÍNCRONAS.....		225
10.1	Descrição das Máquinas Síncronas.....	225
10.1.1	Descrição sumária.....	225
10.1.2	Descrição detalhada das máquinas síncronas.....	225
10.2	Circuito equivalente das máquinas síncronas.....	227
10.3	Máquina síncrona isolada da rede.....	232
10.3.1	Introdução.....	232
10.3.2	Determinação da reactância síncrona.....	234
10.3.3	As características exteriores.....	235
10.4	Máquina síncrona ligada a uma rede de potência infinita.....	237
10.4.1	Equações gerais.....	237
10.4.2	Balanço energético.....	239
10.4.3	Diagramas vectoriais em carga.....	240
10.4.4	Funcionamento como compensador síncrono.....	241
10.4.5	Funcionamento como gerador (ou alternador).....	245
10.4.6	Funcionamento como motor.....	247
10.4.7	Diagrama de Potências.....	251
10.4.8	As curvas limite da máquina síncrona.....	252
10.5	Exercícios	253
CAPÍTULO 11 MÁQUINAS DE CORRENTE CONTÍNUA.....		255
11.1	Introdução às máquinas de corrente contínua.....	255
11.1.1	Definição.....	255
11.1.2	Representação esquemática.....	255
11.2	Constituição das máquinas de corrente contínua.....	255
11.2.1	Classificação das máquinas de corrente contínua.....	260
11.3	Princípio de funcionamento das máquinas de corrente contínua. O funcionamento do colector	262
11.3.1	Campo eléctrico induzido num condutor sujeito a um campo de indução magnética.....	262

11.3.2	Expressão da força mecânica sobre um condutor	262
11.3.3	Potência mecânica num condutor em movimento.....	263
11.3.4	Princípio de funcionamento de uma máquina de corrente contínua.....	264
11.3.5	O Funcionamento do colector.....	266
11.3.6	Força electromotriz e corrente numa secção	268
11.4	O modelo matemático das máquinas de corrente contínua	269
11.4.1	Expressão da força electromotriz	269
11.4.2	Modelo matemático da máquina de corrente contínua.....	271
11.4.3	Balanço energético.....	271
11.4.4	Obtenção da expressão do binário electromagnético.....	272
11.4.5	A reacção magnética do induzido.....	274
11.4.6	Máquina de corrente contínua com pólos auxiliares de comutação.....	276
11.4.7	Máquina de corrente contínua com enrolamentos de compensação.....	278
11.5	Características dos motores de corrente contínua	280
11.5.1	Motores de excitação em derivação	280
11.5.2	Motores de excitação independente.....	282
11.5.3	Motores de excitação em série.....	282
11.5.4	Máquinas de excitação composta.....	284
11.5.5	Ajuste de velocidade dos motores de corrente contínua	286
11.5.6	Arranque dos motores de corrente contínua.....	288
11.5.7	Inversão do sentido de marcha.....	290
11.6	Motor série universal.....	291
11.7	Exercícios	293
NOMENCLATURA.....		297



e-Learning in Electrical Engineering

Este texto foi desenvolvido no âmbito do projecto europeu “**e-LEE "e-Learning tools for Electrical Engineering”** em parceria com a l'Université Catholique de Louvain (Bélgica), l'École des Hautes Etudes Industrielles (França) de Lille e a l'Universitatea din Craiova (Roménia).

Os alunos de Sistemas Eléctricos e Electromecânicos podem aceder livremente a <http://e-lee.ist.utl.pt/>

Um Pouco de História...

O conjunto de fenómenos físicos que explicam o funcionamento dos sistemas electromecânicos tem por base a teoria do Electromagnetismo isto é, a teoria que explica e descreve a profunda interligação existente entre o campo eléctrico e o campo magnético.

É remota no tempo a percepção destes fenómenos por parte do homem; conta-se que, no ano de 900 AC, um pastor de origem grega constatou que os pregos de ferro das suas sandálias “ficavam presos” ao chão quando ele caminhava em determinado campo cujo solo era constituído por pedras negras!

Muitas outras situações análogas estão descritas na história, mas é principalmente durante o século XIX que se assiste a um conjunto de experiências verdadeiramente notáveis das quais se podem salientar:

Em 1800 Alexandre Volta, físico italiano (1745–1827) inventa a primeira bateria química, conhecida como a “pilha de Volta”.

Em 1820 Hans Christian Ørsted, físico e químico dinamarquês (1777-1851), constata que a corrente eléctrica provoca o desvio da agulha de uma bússola colocada nas proximidades. Demonstra ainda que o efeito é recíproco. A explicação científica desta experiência é apresentada nesse mesmo ano por André-Marie Ampere, físico francês (1775 – 1836), iniciando assim a teoria do electromagnetismo.

Em 1820, Jean-Baptiste Biot, físico, astrónomo e matemático francês (1774-1862) em conjunto com o seu assistente Felix Savart (1792-1841) deduzem a formulação matemática da intensidade do campo magnético em função da corrente que lhe dá origem. Descobrem também que a intensidade do campo magnético varia inversamente com a distância ao condutor percorrido pela corrente. Esta relação é conhecida, actualmente, como a lei de Biot-Savart e dela se pode derivar o Teorema de Ampere, sendo fundamental para moderna teoria do electromagnetismo.

Em 1827 Georg Simon Ohm (Alemanha, 1789-1854) formula a relação matemática entre corrente, força electromotriz e resistência; a conhecida Lei de Ohm.

Em 1838 Michael Faraday, físico, químico e filósofo inglês (1791, 1867) explica matematicamente o fenómeno da indução electromagnética e introduz o conceito de linhas de força. O princípio da indução electromagnética é um marco na história dos sistemas electromecânicos pois é nele que se baseia o funcionamento como gerador de uma máquina eléctrica (conversão de energia mecânica em eléctrica) bem como o funcionamento do transformador (conversão de energia eléctrica em eléctrica). Apesar de o conceito de linhas de força ter sido rejeitado pela maior parte dos físicos e matemáticos europeus da época, ele é determinante para James Clerk Maxwell traduzir matematicamente as ideias de Faraday, dando assim origem à moderna teoria de campo electromagnético.

De 1855 a 1868, James Clerk Maxwell, matemático escocês (1831-1879) completa a sua formulação matemática das equações de campo do electromagnetismo mostrando que um conjunto reduzido de equações matemáticas podia descrever completamente o comportamento dos campos eléctrico e magnéticos bem como a sua interligação. As quatro equações diferenciais, conhecidas como equações de Maxwell, foram publicadas pela primeira vez em 1873 no tratado *Electricity and Magnetism*. Constituem um dos grandes acontecimentos matemáticos do século XIX.

Capítulo 1 Noções Básicas da Teoria dos Circuitos

1.1 Noção de Dipolo

O electromagnetismo está presente na natureza, de diversas formas: electricidade estática, fenómenos de magnetização, queda de raios... Os fenómenos correspondentes podem ser descritos através de equações onde intervêm derivadas parciais das diversas grandezas em jogo; campo magnético, campo eléctrico... Em certas situações, a resolução destas equações, as equações de Maxwell, pode ser tão complexa que se tenha de recorrer a métodos numéricos (método dos elementos finitos, por exemplo) .

À escala de frequência dos circuitos eléctricos estudados neste curso (frequências relativamente baixas), pode considerar-se não estarem presentes muitos dos fenómenos descritos pelas equações de Maxwell, pelo que o comportamento dos dispositivos eléctricos que serão estudados é bastante mais simples. Para esta gama de frequências, diz-se que os sistemas se encontram em regime quase-estacionário. Genericamente, estes comportamentos poderão ser descritos por duas grandezas: correntes eléctricas que circulam através dos terminais de acesso dos dispositivos e por diferenças de potencial aos seus terminais.

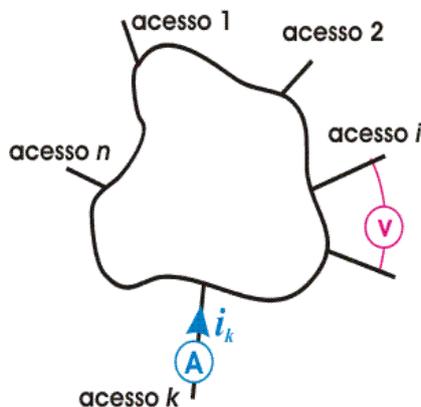


Figura 1.1 - Multipolo (n-pólos)

A **diferença de potencial** (ou tensão) u_{ij} entre um terminal i e um terminal j mede-se com recurso a um voltímetro, exprime-se em volt (símbolo V) e representa uma energia por unidade de carga. A **corrente** i_k que entra (ou sai, segundo a convenção escolhida) do terminal k mede-se com recurso a um amperímetro, exprime-se em ampere (símbolo A) e representa a quantidade de carga que atravessa uma secção por unidade de tempo. **Carga**, ou mais precisamente carga eléctrica, é uma propriedade física das partículas sub-atómicas que constituem a matéria e pode tomar valores positivos, negativos. Não pode ser criada nem destruída. Uma carga eléctrica é representada pela letra q e exprime-se em Coulomb (símbolo C)

Neste contexto, os componentes eléctricos mais simples são os dipolos. A maior parte dos multipolos pode-se decompor em dipolos elementares .

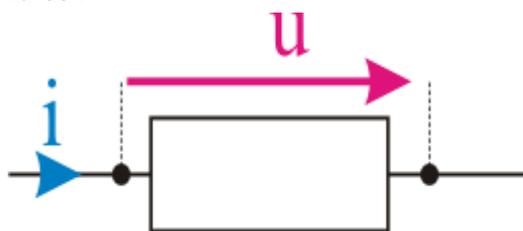


Figura 1.2 - Dipolo

Um dipolo, caracteriza-se pela corrente i que o percorre e pela tensão u aos seus terminais.

1.1.1 Corrente num Dipolo

Em regime quase-estacionário, pode afirmar-se que a corrente eléctrica é devida ao deslocamento de electrões (cargas) pelo que a corrente que entra no terminal A é igual à corrente que sai no terminal B.

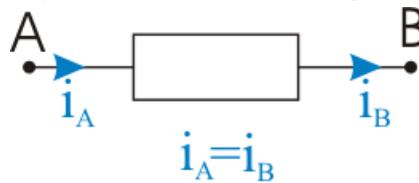


Figura 1.3 - Corrente num dipolo

A corrente i que percorre um dipolo, corresponde à quantidade de carga eléctrica q que atravessa uma secção recta desse dipolo, por unidade de tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

corrente de um ampere (1 A) corresponde à passagem de 1 coulomb (1 C) por segundo. O sentido de referência da passagem de corrente, pode ser escolhido de forma arbitrária: se a corrente passa efectivamente no sentido escolhido, o seu valor (a sua intensidade) é positiva; se passa no sentido contrário, é negativa.

NOTA: Tendo em conta que nos condutores metálicos habituais, os portadores de carga são electrões (cargas negativas), a passagem de A para B de uma corrente positiva de 1 A, corresponde, fisicamente, à passagem de B para A de um conjunto de electrões que totaliza, num segundo, uma carga de -1 C.

1.1.2 Diferença de Potencial aos Terminais de um Dipolo

O trabalho produzido pela passagem de cargas através de um elemento, traduz-se por uma diferença de potencial entre os terminais desse elemento.

A absorção pelo elemento, de uma energia eléctrica de um Joule (1 J) quando uma carga de um Coulomb (1 C) passa de A para B, resulta de uma diferença de potencial u de um volt (1V) medida entre A e B (o potencial V_A do terminal A está 1 V mais elevado do que o potencial V_B do terminal B).

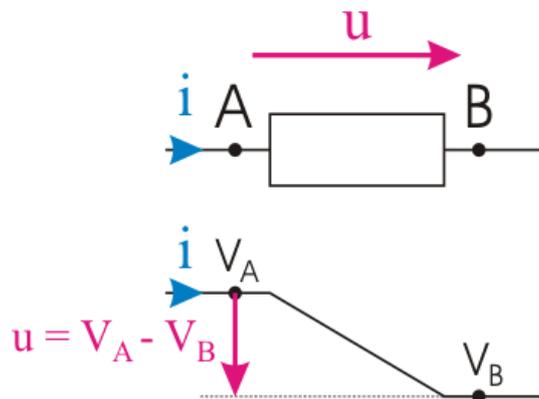


Figura 1.4 - Diferença de potencial medida entre o terminal A e o terminal B

Se, pelo contrário, o elemento fornece uma energia de um Joule (1 J) quando uma carga de um Coulomb passa de A para B, essa energia resulta de uma diferença de potencial u de um volt (1V) medida entre B e A (o potencial V_A do terminal A está 1 V mais baixo do que o potencial V_B do terminal B).

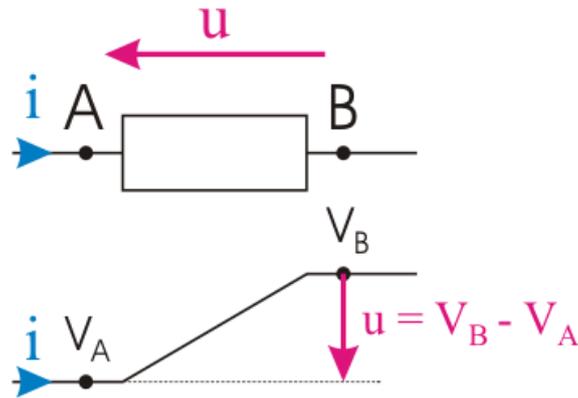


Figura 1.5 - Diferença de potencial medida entre o terminal A e o terminal B

Quando o elemento absorve energia, o potencial do terminal de entrada da corrente é superior ao potencial do terminal de saída. Quando o dipolo fornece energia, o potencial do terminal de entrada de corrente é inferior ao do terminal de saída .

A diferença de potencial aos terminais de um dipolo também se pode designar por tensão aos terminais desse elemento. O sentido de referência desta tensão, pode ser escolhido arbitrariamente: se o potencial do terminal “+” é, efectivamente, superior ao do terminal “-“, a tensão é positiva; caso contrário, é negativa.

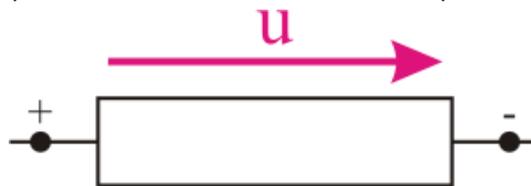


Figura 1.6 – Animação multimédia “Tensão aos terminais de um dipolo”

1.1.3 Potência num Dipolo

Por definição de tensão aos terminais de um dipolo, a energia dW absorvida ou fornecida por um dipolo num intervalo de tempo dt é igual ao produto da carga dq que o atravessa, pela diferença de potencial u aos seus terminais:

$$dW = u dq \tag{1.2}$$

Por definição de corrente que atravessa uma secção de um dipolo, tem-se:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.3}$$

Pelo que resulta que a potência p absorvida ou produzida pelo dipolo, vem :

$$dW = p dt \Rightarrow u dq \Rightarrow u i dt = p dt \Rightarrow p = u i \tag{1.4}$$

Para saber se o produto $u i$ corresponde a uma energia absorvida ou produzida, há que ter em conta os sentidos de referência escolhidos para a corrente e para a tensão aos terminais do dipolo.

1.1.4 Convenção Receptor

Os sentidos de referência das tensões e correntes são escolhidos conforme se representa no esquema da figura 7.

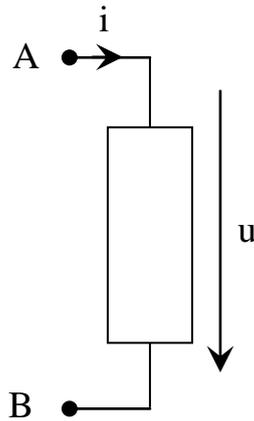


Figura 1.7 - Convenção receptor

http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/ApprocheCircuits/DipolesElectriques/5_cours.htm

Com o sentido de referência escolhido para a tensão, uma tensão u positiva, significa que o potencial V_A do terminal A é superior ao potencial V_B do terminal B. Com o sentido de referência escolhido para a corrente, uma corrente i positiva corresponde a um movimento de cargas positivas de A para B pelo interior do dipolo. Sendo o potencial do terminal de entrada, superior ao do terminal de saída da corrente, o dipolo absorve potência eléctrica. O produto $u i$ é positivo.

Se u é positivo e i é negativo, o potencial do terminal de entrada da corrente é inferior ao do terminal de saída. O dipolo fornece potência eléctrica. O produto $u i$ é negativo.

Se u é negativo e i é positivo, a transferência de cargas faz-se do terminal ao potencial mais baixo, para o terminal a potencial mais elevado. O dipolo fornece potência eléctrica. O produto $u i$ é negativo.

Finalmente, se u e i são negativos, a transferência de cargas faz-se do terminal ao potencial mais elevado, para o terminal a potencial mais baixo. O dipolo absorve potência eléctrica. O produto $u i$ é positivo.

Com a convenção representada na Figura 1.7, um produto $p = u i$ positivo, corresponde a uma absorção de potência eléctrica por parte do dipolo. Um produto $p = u i$ negativo, corresponde ao fornecimento de potência eléctrica; neste caso, fala-se de convenção receptor. Habitualmente, esta convenção é escolhida para todos os dipolos que absorvam energia (resistências, indutâncias, condensadores, de facto, todas as cargas eléctricas, resistências de aquecimento, lâmpadas, motores, etc.).

1.1.5 Convenção Gerador

Os sentidos de referência das tensões e correntes são escolhidos conforme se representa no esquema da Figura 1.8. Neste caso, alterou-se o sentido convencional da corrente.

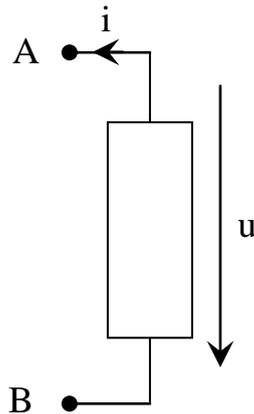


Figura 1.8 - Convenção gerador

http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/ApprocheCircuits/DipolesElectriques/6_cours.htm

Com o sentido de referência escolhido para a tensão, uma tensão u positiva, significa que o potencial V_B do terminal B é superior ao potencial V_A do terminal A. Com o sentido de referência escolhido para a corrente, uma corrente i positiva corresponde a um movimento de cargas positivas de B para A pelo interior do dipolo. Sendo o potencial do terminal de entrada, inferior ao do terminal de saída da corrente, o dipolo fornece potência eléctrica. O produto $u i$ é positivo.

Se u é positivo e i é negativo, o potencial do terminal de entrada da corrente é superior ao do terminal de saída. O dipolo absorve potência eléctrica. O produto $u i$ é negativo, segundo esta convenção.

Se u é negativo e i é positivo, a transferência de cargas faz-se do terminal ao potencial mais elevado, para o terminal a potencial mais baixo. O dipolo absorve potência eléctrica. O produto $u i$ é negativo.

Finalmente, se u e i são negativos, a transferência de cargas faz-se do terminal ao potencial mais baixo, para o terminal a potencial mais elevado. O dipolo fornece potência eléctrica. O produto $u i$ é positivo.

Com a convenção da Figura 1.8 um produto positivo, corresponde a um fornecimento de potência eléctrica por parte do dipolo. Um produto negativo, corresponde à absorção de potência eléctrica; neste caso, fala-se de convenção gerador. Habitualmente, esta convenção é escolhida para todos os dipolos que forneçam energia (fontes de tensão e corrente, pilhas, baterias e outros geradores eléctricos, etc).

1.2 Leis de Kirchhoff

1.2.1 Introdução

Um circuito é, normalmente, constituído por vários elementos ligados entre si por forma a que exista pelo menos um percurso fechado por onde a corrente possa circular; cada um destes percursos designa-se por “**ramo**”.

Considere-se o circuito representado na Figura 1 constituído por uma fonte e 3 elementos.

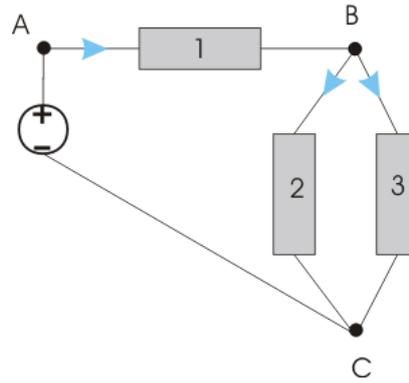


Figura 1.9 - Circuito com uma fonte e 3 elementos

Para formar este circuito, efectuaram-se várias ligações entre os terminais dos elementos; cada uma destas ligações designa-se por “nó”. Assim:

- um dos terminais da fonte foi ligado a um dos terminais do elemento 1 (nó A)
- o outro terminal do elemento 1 foi ligado a um terminal do elemento 2 e a um terminal do elemento 3 (nó B)
- finalmente, os outros terminais dos elementos 2 e 3 foram ligados ao restante terminal da fonte, fechando o circuito (nó C)

Graficamente, o circuito pode ser redesenhado da forma que se representa na figura seguinte:

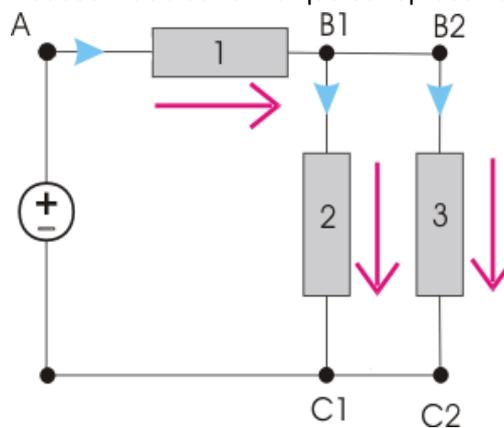


Figura 1.10 - Circuito da Figura 1 redesenhado

Esquemáticamente, é como se o nó B tivesse sido “esticado” subdividindo-se agora em B1 e B2; como o potencial de um ponto é único, a diferença de potencial entre B1 e B2 é nula; esquemáticamente, é como se existisse um condutor perfeito a ligar estes dois pontos. Os pontos B1 e B2 constituem um único nó. Idêntica explicação se pode dar relativamente ao nó C. O circuito representado tem apenas 3 nós: nó A, B e C.

Além dos nós, podem ainda identificar-se num circuito um ou mais percursos fechados onde pode circular corrente; cada um destes percursos designa-se por “malha”.

O circuito representado tem 3 malhas, tal como indicado na figura seguinte.

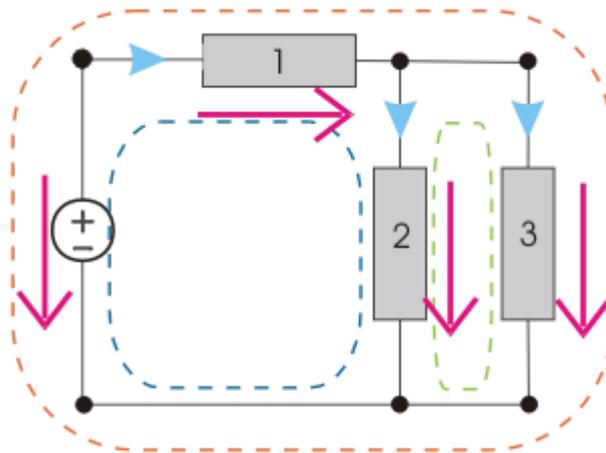


Figura 1.11 - Identificação das malhas do circuito da Figura 1

- a malha representada, a vermelho que passa pelo elemento 1, pelo elemento 3 e se fecha pela fonte;
- a malha representada a azul, que passa pelo elemento 1 pelo elemento 2 e se fecha pela fonte;
- e finalmente, a malha representada a verde, que passa pelo elemento 3 e se fecha pelo elemento 2.

Qualquer um destes percursos é passível de ser percorrido pela corrente eléctrica.

1.2.2 Lei dos Nós

Apenas com o conhecimento dos elementos que constituem o circuito e respectivas equações características (ver, § 1.3), não é possível determinar a totalidade das tensões e correntes presentes num circuito. Será ainda necessário o conhecimento de duas importantes leis, conhecidas como Leis de Kirchhoff.

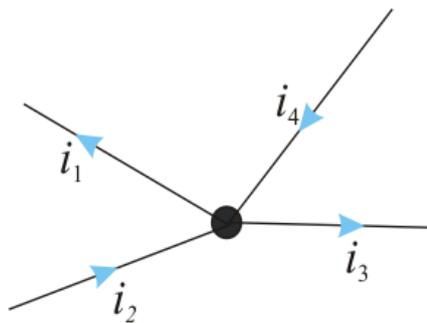


Figura 1.12 - Esquema representativo da Lei dos Nós

A Lei dos Nós determina que, em qualquer instante, é nula a soma algébrica das correntes que entram num qualquer nó.

$$\sum i_n = 0 \quad (1.5)$$

De acordo com as correntes representadas na Figura 1.12, a lei dos nós permite obter a equação:

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0 \quad (1.6)$$

Note-se que se considerou o simétrico das correntes i_1 e i_3 uma vez que o seu sentido de referência representado é o de saída do nó. Obter-se-ia uma equação equivalente se, no enunciado da lei dos nós, a palavra “entram” fosse ser substituída pela palavra “saem”.

Se, em algum instante, a soma das correntes que entram no nó não fosse nula, isso quereria dizer que o nó

estava a acumular carga (pois corrente, é um deslocamento de cargas). Contudo, um nó é um condutor perfeito e, portanto, não pode armazenar carga. A lei dos nós traduz o princípio da conservação de carga eléctrica.

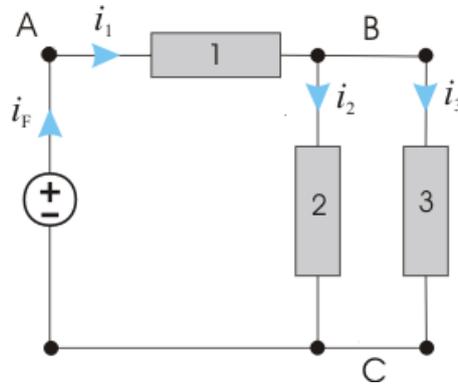


Figura 1.13 - Correntes do circuito

Relativamente ao circuito representado na figura seguinte, a aplicação da Lei dos nós conduz a:

- No nó A $i_F - i_1 = 0$
- No nó B $i_1 - i_2 - i_3 = 0$
- No nó C $-i_F + i_2 + i_3 = 0$

Das 3 equações representadas, apenas duas são linearmente independentes.

Existindo N nós no circuito, a Lei dos Nós permite escrever $N - 1$ equações linearmente independentes.

A primeira equação permite afirmar que a corrente que sai da fonte é igual à corrente que entra no elemento 1; por outras palavras, a fonte e o elemento 1 são percorridos pela mesma corrente. Nesta situação, diz-se que a fonte e o elemento 1 estão ligados em série.

1.2.3 Lei das Malhas

A Lei das Malhas determina que, em qualquer instante, é nula a soma algébrica das tensões ao longo de qualquer malha.

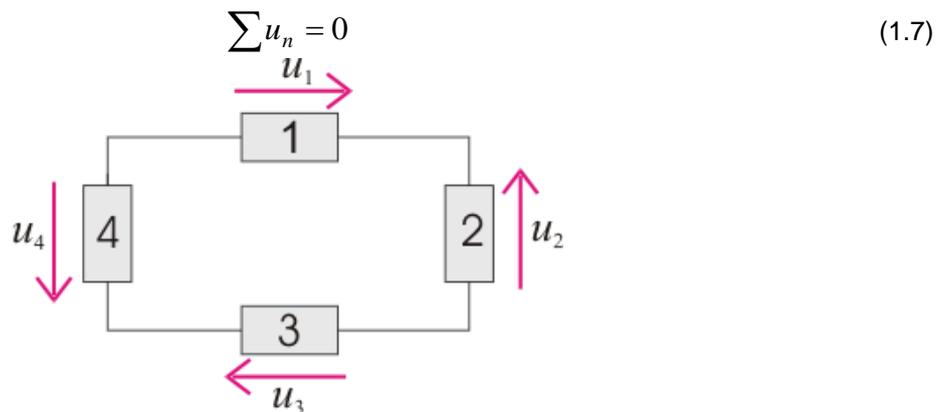


Figura 1.14 - Esquema representativo da Lei das Malhas

De acordo com o sentido de referência das tensões representadas na figura anterior e circulando no sentido dos ponteiros do relógio, a lei das malhas permite obter a equação:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \quad (1.8)$$

Note-se que se considerou o simétrico das tensões u_2 e u_4 uma vez que o seu sentido de referência representado é o oposto ao de circulação. Não é determinante escolher o sentido horário ou o anti-horário, pois as equações obtidas de uma ou outra forma são exactamente equivalentes.

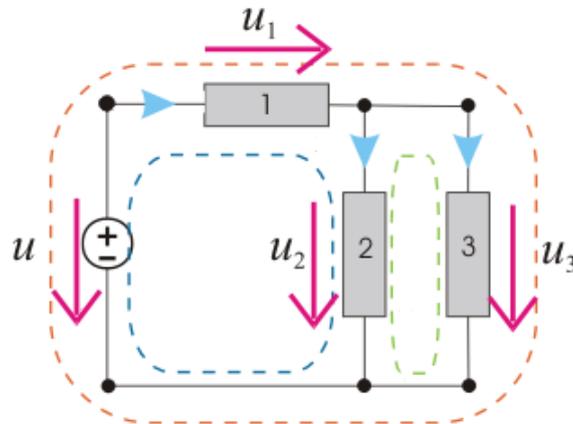


Figura 1.15 - Malhas do circuito

O somatório das tensões ao longo da malha ser nulo, equivale a dizer que é nulo o trabalho necessário para deslocar uma carga ao longo da malha fechada. Isto acontece porque o sistema é conservativo.

Relativamente ao circuito representado na figura 7, a aplicação da Lei das Malhas conduz a:

Na malha vermelha e circulando no sentido horário $u_1 + u_3 - u = 0$

Na malha azul e circulando no sentido horário $u_1 + u_2 - u = 0$

Na malha verde e circulando no sentido horário $u_3 - u_2 = 0$

Das 3 equações representadas, apenas duas são linearmente independentes.

Existindo M malhas no circuito, a Lei das Malhas permite escrever $M - 1$ equações linearmente independentes

A última equação permite afirmar que a tensão aos terminais do elemento 2 é igual à tensão aos terminais do elemento 3; por outras palavras, os dois elementos apresentam a mesma tensão aos seus terminais. Nesta situação, diz-se que os dois elementos estão ligados em paralelo.

1.2.4 Exercícios

<http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/ApprocheCircuits/LoisKirchhoff/Exercicios.htm>

1.3 Componentes

1.3.1 Introdução

Baseados no Princípio da Conservação da Energia, pode afirmar-se que uma fonte de energia eléctrica é um conversor (dispositivo ou máquina eléctrica) com capacidade para transformar um outro tipo de energia (química, mecânica, térmica, solar, potencial, cinética) em energia eléctrica.

Como exemplos de fontes/conversores de energia eléctrica, tem-se:

- Pilha ou bateria - conversão de energia Química em energia Eléctrica
- Painel Fotovoltaico - conversão de energia Solar em energia Eléctrica
- Gerador - conversão de energia Mecânica em energia Eléctrica

- Motor - conversão de energia Eléctrica em energia Mecânica

Uma grande parte das fontes utilizadas em circuitos eléctricos, pode ser reversível isto é, o sentido do fluxo de conversão de energia pode ser invertido. Assim:

- Uma pilha ou uma bateria, quando estão a carregar, estão a converter a energia Eléctrica em energia Química
- Um gerador pode funcionar como motor quando converte em energia Mecânica a energia Eléctrica que absorve

Um painel fotovoltaico é um exemplo de uma fonte não reversível pois, absorvendo energia eléctrica, não consegue converter em energia solar.

1.3.2 Fonte de Tensão

Uma fonte de tensão ideal independente¹ é um dipolo com capacidade para impor uma diferença de potencial aos seus terminais, independentemente do valor da corrente que a percorre.

A equação que caracteriza uma fonte de tensão ideal é:

$$u(t) = E(t) \tag{1.9}$$

designando-se, genericamente, por $E(t)$ a força electromotriz da fonte.

No caso de uma fonte de tensão contínua (DC), $E(t)$ representa um valor constante.

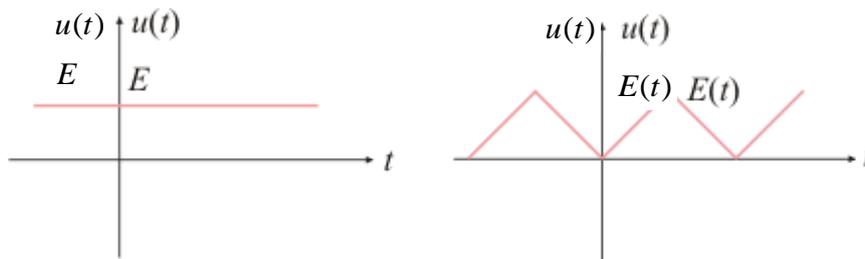


Figura 1.16 - Exemplos de fontes de tensão contínua e não contínua

Os símbolos mais utilizados para representar uma fonte de tensão, são:

Fonte de Tensão Genérica	Fonte de Tensão Contínua (DC)	Fonte de Tensão Alternada (AC)

Figura 1.17 - Fonte de tensão ideal

Quando se liga uma fonte de tensão a um outro elemento passivo estabelece-se um percurso fechado onde circula a corrente $i(t)$.

¹ As fontes de tensão dependentes ou controláveis estão fora do âmbito desta Unidade Curricular

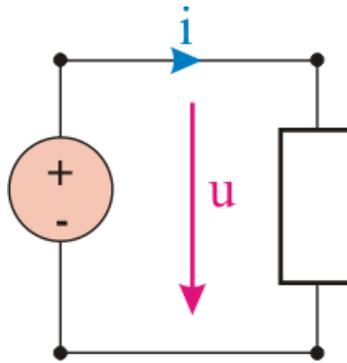


Figura 1.18 - Fonte de tensão ideal a alimentar um elemento passivo

no entanto, a corrente que a fonte de tensão fornece, depende dos elementos que ela alimenta:

- uma fonte de tensão ideal pode ser deixada em circuito aberto, isto é, sem qualquer ligação aos seus terminais. Neste caso, são nulas a corrente $i(t)$ que ela fornece e, conseqüentemente, a potência $p(t) = u(t) i(t)$;
- os terminais de uma fonte de tensão ideal não podem ser ligados entre si por um condutor ideal (curto-circuito) pois essa situação corresponderia a anular a tensão do gerador; enquanto a fonte de tensão impõe $u(t) = E(t)$, o curto-circuito impõe $u(t) = 0$
- duas fontes de tensão só podem ser ligadas em paralelo se tiverem valores iguais de força electromotriz; através da Lei das Malhas obtém-se $E_1(t) = E_2(t)$, que só é uma expressão verdadeira se as duas forças electromotrizes forem iguais.

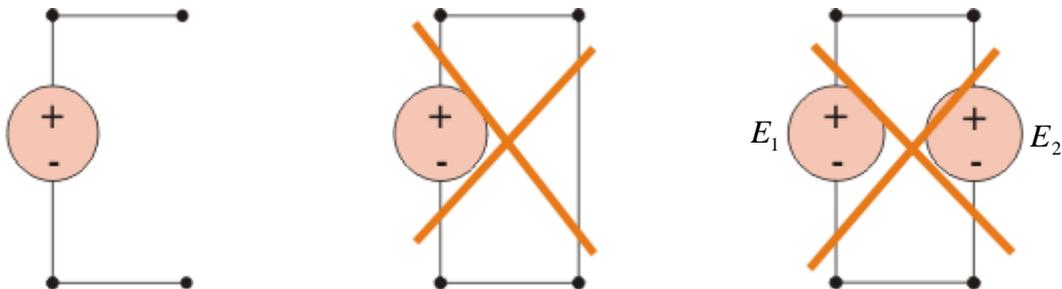


Figura 1.19 - Fonte de tensão ideal em vazio, em curto-circuito e duas fontes de tensão em paralelo

1.3.3 Fonte de Corrente

Uma fonte de corrente ideal independente² é um dipolo com capacidade para impor a corrente fornecida, independentemente da tensão que apresenta aos seus terminais.

O símbolo para representar uma fonte de corrente, é:

² As fontes de corrente dependentes ou controláveis estão fora do âmbito desta Unidade Curricular

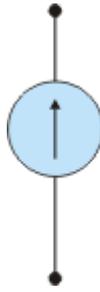


Figura 1.20 - Fonte de corrente

não existindo símbolos específicos para representar uma fonte de corrente contínua (DC) ou alternada (AC). A equação que caracteriza uma fonte de corrente ideal é:

$$i(t) = I(t) \tag{1.10}$$

Quando se liga uma fonte de corrente a um outro elemento passivo estabelece-se um percurso fechado onde circula a corrente $i(t)$

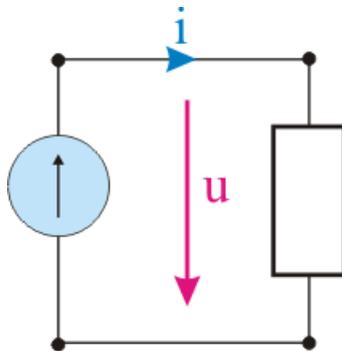


Figura 1.21 - Fonte de corrente ideal a alimentar um elemento passivo

no entanto, a diferença de potencial $u(t)$ aos seus terminais, dependerá do elemento que a fonte alimenta:

- os terminais de uma fonte de corrente podem ser ligados entre si. Neste caso, são nulas a tensão aos seus terminais $u(t)$ e, conseqüentemente, a potência $u(t) i(t)$ que ela debita;
- uma fonte de corrente não pode ser deixada em circuito aberto, pois isso corresponderia a anular a corrente que ela fornece; deve sempre existir um caminho para que a corrente se feche; enquanto a fonte impõe $i(t) = I(t)$ o circuito aberto impõe $i(t) = 0$
- duas fontes de corrente só podem ser ligadas em série se impuserem o mesmo valor de corrente; através da Lei dos Nós obtém-se $I_1(t) = I_2(t)$ que só é uma expressão verdadeira se os dois valores de corrente forem iguais.

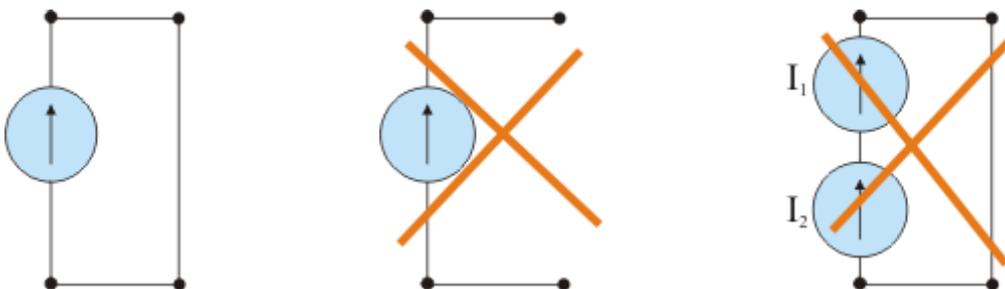


Figura 1.22 - Fonte de corrente ideal em curto-circuito, em vazio e duas fontes de corrente em série

1.3.4 Resistência

A resistência ideal é um dipolo que converte toda a energia eléctrica absorvida, em energia calorífica. Representa a característica física que os materiais apresentam de se oporem à passagem da corrente eléctrica; materiais bons condutores eléctricos apresentam baixas resistências, enquanto que os materiais isolantes apresentam resistências elevadas.

A resistência de um condutor varia com a resistividade ρ do material de que é feito, com a secção do condutor S e com o seu comprimento ℓ de acordo com:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (1.11)$$

Simbolicamente, uma resistência e os sentidos de referência (convenção receptor) para a corrente que a atravessa e para a tensão aos seus terminais, representa-se por:

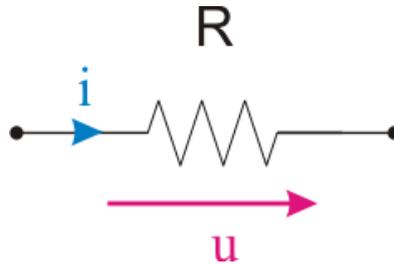


Figura 1.23 - Representação simbólica da resistência e sentidos de referência

O valor R da resistência exprime-se em ohm ($1\Omega = 1V/1A$) e, atendendo à expressão anterior, é um valor intrinsecamente positivo.

A equação característica da resistência é:

$$u(t) = R i(t) \quad (1.12)$$

E a potência aos seus terminais, designada por efeito de Joule, pode ser dada por:

$$p(t) = u(t) i(t) = R [i(t)]^2 = \frac{[u(t)]^2}{R} \quad (1.13)$$

Atendendo a que tanto $R [i(t)]^2$ como $\frac{[u(t)]^2}{R}$ são valores intrinsecamente positivos e tendo sido utilizada a convenção receptor, conclui-se que a potência $p(t)$ é sempre uma potência absorvida pela resistência.

Define-se condutância G associada a uma resistência R por:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.14)$$

O valor G da condutância exprime-se em siemens ($1S = 1\Omega^{-1}$).

A equação característica da condutância é:

$$i(t) = G u(t) \quad (1.15)$$

e a potência aos seus terminais:

$$p(t) = u(t) i(t) = G [u(t)]^2 = \frac{[i(t)]^2}{G} \quad (1.16)$$

Analogamente ao caso da resistência, a condutância só absorve potência.

1.3.5 Indutância

A indutância ideal é representada por um dipolo que pode armazenar energia por intermédio do campo magnético. Consiste num conjunto de espiras de material condutor eléctrico que, normalmente, rodeiam um circuito de material ferromagnético (material bom condutor do campo magnético, Ver temática Máquinas Eléctricas) cuja função é concentrar as linhas do campo magnético produzido pela corrente que esteja a percorrer a bobine.

Uma indutância caracteriza-se pelo seu coeficiente de auto-indução L que depende do número de espiras N e da relutância magnética do circuito R_m (tal como se verá no capítulo “Circuitos Magnéticos”), de acordo com:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (1.17)$$

Simbolicamente, uma indutância e os respectivos sentidos de referência (convenção receptor), representa-se por:

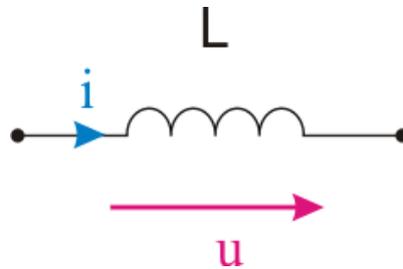


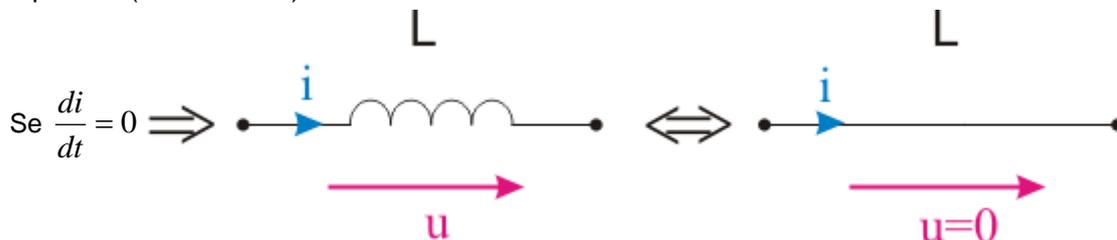
Figura 1.24 - Representação simbólica da indutância e sentidos de referência

O valor L do coeficiente de auto-indução exprime-se em henry ($1H = 1V1s/1A$) e, atendendo à expressão anterior, é um valor intrinsecamente positivo.

Na ausência de deslocamento físico do elemento, verifica-se que a tensão aos terminais da indutância é directamente proporcional à derivada da corrente que o percorre, sendo L a constante de proporcionalidade:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \quad (1.18)$$

Uma primeira conclusão a retirar da expressão anterior é que, se a corrente $i(t)$ for invariável no tempo, é nula a tensão aos terminais da indutância. Esta situação ocorre quando se atinge o regime permanente de um circuito alimentado em corrente contínua (corrente DC); nesta situação, a indutância é equivalente a um condutor perfeito (curto-circuito).



Relativamente à potência aos terminais da indutância, tem-se:

$$p(t) = u(t) i(t) = L i \frac{di}{dt} \quad (1.19)$$

Contrariamente ao verificado para a resistência, o sinal da potência aos terminais da indutância depende do

sinal da corrente que a percorre e da respectiva derivada; conclui-se que a indutância tanto pode fornecer como absorver potência.

A energia W_m que transita pela indutância entre os instantes t_1 e t_2 pode ser calculada através de:

$$W_m = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L i(t) \frac{di}{dt} dt = \int_{i_1}^{i_2} L i(t) di = \frac{1}{2} L [i_2]^2 - \frac{1}{2} L [i_1]^2 \quad (1.20)$$

Atendendo a que se utilizou a convenção receptor para os sentidos de referência da corrente e tensão, conclui-se que:

- se $p > 0$ (isto é, se a corrente e a sua derivada tiverem o mesmo sinal) a indutância absorve potência e aumenta a energia armazenada;
- se $p < 0$ (isto é, se a corrente e a sua derivada tiverem sinais diferentes) a indutância fornece potência e restitui a energia armazenada.

1.3.6 Capacidade

A capacidade é representada por um dipolo que pode armazenar energia eléctrica por intermédio do campo eléctrico.

A capacidade C varia com a constante do dieléctrico, ϵ , com a área das placas condutoras, A , e com a distância, d , a que estas se encontram uma da outra, de acordo com:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (1.21)$$

Simbolicamente, uma capacidade e os respectivos sentidos de referência (convenção receptor), representa-se por:

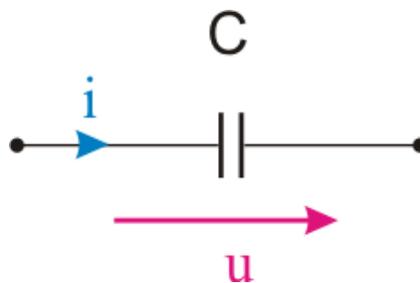


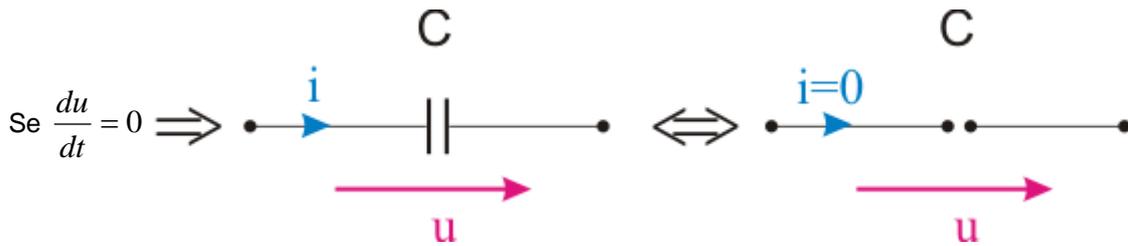
Figura 1.25 - Representação simbólica da capacidade e sentidos de referência

O valor C da capacidade exprime-se em farads ($1F = 1As/V$) e, atendendo à expressão anterior, é um valor intrinsecamente positivo.

Na ausência de deslocamento físico do elemento, verifica-se que a corrente que percorre a capacidade é directamente proporcional à derivada da tensão que apresenta aos seus terminais, sendo C a constante de proporcionalidade:

$$i(t) = C \frac{du}{dt} \quad (1.22)$$

Analogamente à indutância, uma primeira conclusão a retirar da expressão anterior é que, se a tensão $u(t)$ for invariável no tempo, é nula a corrente que percorre a capacidade. Esta situação ocorre quando se atinge o regime permanente de um circuito alimentado em corrente contínua (corrente DC); nesta situação, a capacidade é equivalente a um circuito aberto.



Relativamente à potência aos terminais da capacidade, tem-se:

$$p(t) = u(t) i(t) = C u \frac{du}{dt} \quad (1.23)$$

Analogamente ao verificado para a indutância, o sinal da potência aos terminais da capacidade depende do sinal da tensão aos seus terminais e da respectiva derivada; conclui-se que a capacidade tanto pode fornecer como absorver potência.

A energia W_C que transita pela capacidade entre os instantes t_1 e t_2 pode ser calculada através de:

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} C u(t) \frac{du}{dt} dt = \int_{u_1}^{u_2} C u(t) du = \frac{1}{2} C [u_2]^2 - \frac{1}{2} C [u_1]^2 \quad (1.24)$$

Atendendo a que se utilizou a convenção receptor para os sentidos de referência da corrente e tensão, conclui-se que:

se $p > 0$ (isto é, se a tensão e a sua derivada tiverem o mesmo sinal) a capacidade absorve potência e aumenta a energia armazenada;

se $p < 0$ (isto é, se a tensão e a sua derivada tiverem sinais diferentes) a capacidade fornece potência e restitui a energia armazenada.

1.3.7 Modelos mais Realistas

Um modelo é um conjunto de relações matemáticas que descreve o comportamento de determinado sistema em determinadas situações. Dependendo da precisão que se queira obter e da situação em análise, podem usar-se modelos de maior ou menor precisão; haverá sempre uma situação de compromisso entre a simplicidade do modelo e a representatividade (precisão) deste.

Atendendo ao âmbito deste curso poder-se-á afirmar que a maior parte dos componentes que constitui um circuito será, idealmente, semelhante a uma fonte ou a um dos elementos R , L e C anteriormente estudados.

Pilha ou bateria	↔	fonte de tensão
Resistência	↔	dipolo R
Bobine	↔	dipolo L
Condensador	↔	dipolo C

No entanto, em situações um pouco mais realistas, haverá necessidade de uma maior aproximação à realidade nos modelos destes componentes.

Na prática o que acontece quando se efectua um curto-circuito aos terminais de uma bateria? A resposta é que se estabelece uma corrente muito elevada e rapidamente a bateria se “descarrega”, isto é, anula-se a

tensão aos seus terminais. Este comportamento verificado na prática, não é descrito pelo modelo de fonte de tensão ideal anteriormente apresentado porque a bateria é uma fonte de tensão real e não ideal!

Um modelo mais realista para representar uma fonte de tensão, consiste na ligação série de uma fonte de tensão ideal, com uma pequena resistência r_i , designada por resistência interna, conforme se representa na figura seguinte.

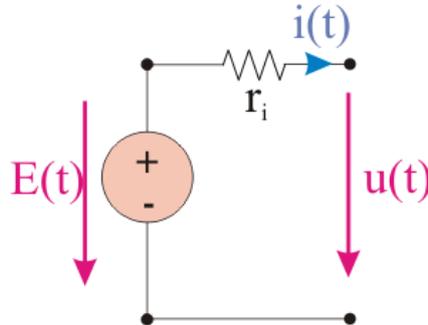


Figura 1.26 - Esquema equivalente de uma fonte de tensão

Aplicando a Lei das Malhas e a equação característica da resistência, obtém-se:

$$u(t) = E(t) - r_i i(t) \quad (1.25)$$

Se ocorrer um curto-circuito aos terminais da fonte de tensão, $u(t) = 0$ na expressão anterior, a corrente de curto-circuito, $i_{cc}(t)$, que vai atravessar a fonte é:

$$i_{cc}(t) = \frac{E(t)}{r_i} \quad (1.26)$$

Como o valor de $r_i i_{cc}$ é muito pequeno comparado com o valor de $E(t)$, a corrente de curto-circuito, $i_{cc}(t)$, toma valores muito elevados e pode mesmo danificar a fonte.

Os valores de $E(t)$, r_i e $i_{cc}(t)$ são características da fonte. Conhecidos dois deles, poder-se-á determinar o terceiro.

Analogamente, um modelo mais realista para representar uma fonte de corrente, consiste na ligação paralelo de uma fonte de corrente ideal, com uma grande resistência r_i , designada por resistência interna, conforme se representa na figura seguinte.

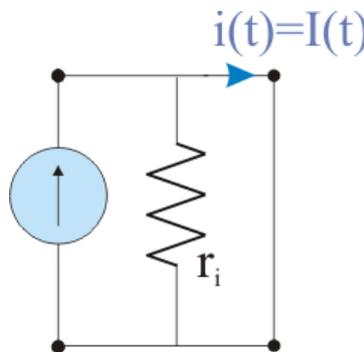


Figura 1.27 - Esquema equivalente de uma fonte de corrente

Se a fonte for deixada em aberto, $i(t) = 0$, a corrente $I(t)$ circulará entre a fonte e a resistência interna, sendo a tensão aos terminais da fonte, $u_0(t)$:

$$u_0(t) = r_i I(t) \quad (1.27)$$

Na prática, também uma resistência real apresenta um certo comportamento indutivo, pelo que o seu modelo mais realista pode ser dado por uma resistência ideal, R , em série com uma pequena indutância ℓ , conforme se representa na figura.



Figura 1.28 - Esquema equivalente de resistência real

Uma bobine é constituída por várias espiras de material condutor, podendo o comprimento total deste condutor atingir valores consideráveis; assim sendo, e atendendo à resistividade do material de que é feito o condutor, a bobine vai apresentar um certo carácter resistivo. O seu modelo real poderá então ser dado por uma indutância L em série com uma pequena resistência r , tal como representado na figura.



Figura 1.29 - Esquema equivalente de uma bobine real

Um condensador que tenha sido “carregado” (apresente uma tensão não nula aos seus terminais) mas que não seja percorrido por qualquer corrente (circuito aberto), irá, lentamente, “descarregando” (baixando a tensão aos seus terminais), facto que não é explicado pelo modelo anteriormente apresentado. Na prática, representa-se o condensador como uma capacidade ideal C em paralelo com uma grande resistência R . A corrente que circulará entre a capacidade e esta resistência, modeliza o fenómeno de “descarga” do condensador. Este modelo encontra-se representado na figura seguinte.

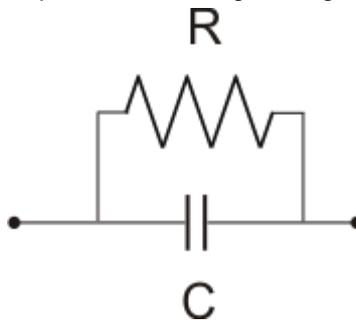


Figura 1.30 - Esquema equivalente de um condensador real

NOTA - Os modelos apresentados não são únicos; são apenas aqueles que, no âmbito deste curso, poderão explicar a maior parte dos fenómenos estudados. Situações particulares ou necessidade de uma grande precisão de valores, poderão requerer modelos mais elaborados.

Capítulo 2 Circuitos Lineares

2.1 Introdução

A análise de um circuito eléctrico consiste na determinação de todas as tensões aos terminais dos elementos e correntes que os percorrem. Para esta análise, faz-se uso das equações características de cada elemento e das equações obtidas através das leis de Kirchhoff, lei das malhas e lei dos nós.

Existem diversas metodologias que podem ser seguidas; apesar de todas serem válidas, a configuração do circuito pode determinar uma resolução mais fácil através de um determinado método, face a outro.

2.2 Associação de Resistências

Para certos circuitos de reduzida complexidade, por vezes, é mais simples utilizar equivalências entre associações de resistências em série (ver Leis dos Nós) e em paralelo (ver Leis das Malhas), do que resolver o circuito apenas com recurso a métodos mais gerais, discutidos nas secções seguintes; certos circuitos podem ser inicialmente simplificados pelo facto de existirem associações de resistências e, posteriormente, podem-se utilizar os métodos mais gerais. Estas equivalências também são válidas para resolução de alguns circuitos mais complexos.

2.2.1 Resistências em Série

Considere-se uma parte de um circuito onde duas resistências R_A e R_B estão ligadas em série, tal como se representa na figura seguinte.

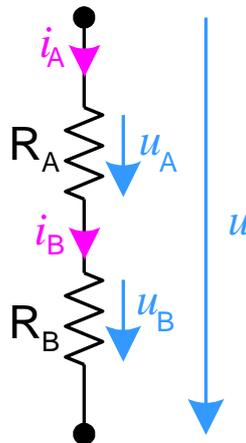


Figura 2.1 - Resistências em série; divisor de tensão

Sendo u a tensão aos terminais da série, como se repartirá esta tensão por cada uma das resistências?

Pela Lei das Malhas obtém-se:

$$u = u_A + u_B \quad (2.1)$$

Atendendo à equação característica de uma resistência, resulta:

$$u = R_A i_A + R_B i_B \quad (2.2)$$

Pela Lei dos Nós obtém-se $i_A = i_B$, pelo que:

$$u = (R_A + R_B)i_A = (R_A + R_B)i_B \quad (2.3)$$

o que permite afirmar que duas resistências em série são equivalentes a uma resistência cujo valor corresponde à soma dos valores de cada uma.

Resistências em série	$R_{eq} = R_A + R_B$
-----------------------	----------------------

(2.4)

A expressão (2.3) é equivalente a:

$$\frac{u}{R_A + R_B} = i_A = i_B \quad (2.5)$$

o que permite concluir que a tensão aos terminais de cada resistência será então:

$$u_A = R_A i_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} u \quad \text{e} \quad u_B = R_B i_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} u \quad (2.6)$$

O raciocínio anterior pode ser generalizado para n resistências em série, sendo a tensão aos terminais da resistência R_k dada por:

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} u \quad (2.7)$$

A associação de resistências representada na Figura 2.1 também se denomina de **divisor de tensão**, uma vez que a tensão u aos terminais da série se subdivide pelas diversas tensões aos terminais das resistências; num divisor de tensão, a tensão aos terminais de uma resistência será tanto maior quanto maior for o valor da resistência.

2.2.2 Resistências em Paralelo

Considere-se uma parte de um circuito onde duas resistências R_A e R_B estão ligadas em paralelo, tal como se representa na figura seguinte.

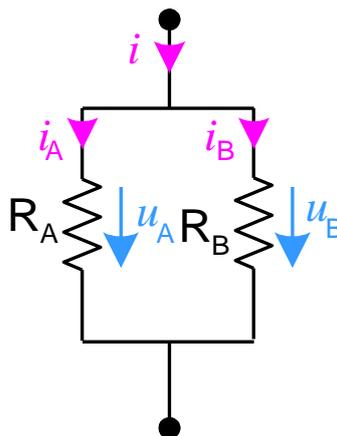


Figura 2.2 - Resistências em paralelo; divisor de corrente

Sendo i a corrente que circula nesta associação paralelo, como se repartirá esta corrente por cada uma das resistências?

Pela Lei dos Nós obtém-se:

$$i = i_A + i_B \quad (2.8)$$

Atendendo à equação característica de uma resistência, resulta:

$$i = \frac{u_A}{R_A} + \frac{u_B}{R_B} \quad (2.9)$$

Pela Lei das Malhas obtém-se $u_A = u_B$, pelo que:

$$i = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right) u_A = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right) u_B \quad (2.10)$$

ou, o que é equivalente,

$$i = \frac{R_A + R_B}{R_A \times R_B} u_A = \frac{R_A + R_B}{R_A \times R_B} u_B \quad (2.11)$$

o que permite afirmar que duas resistências em paralelo são equivalentes a uma resistência cujo inverso do valor corresponde à soma dos inversos dos valores de cada uma.

Resistências em paralelo	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$
--------------------------	--

$$(2.12)$$

A expressão (2.10) é equivalente a:

$$\frac{i}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} = u_A = u_B \quad (2.13)$$

o que permite concluir que a corrente em cada resistência será então:

$$i_A = \frac{u_A}{R_A} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i}{R_A} \quad \text{e} \quad i_B = \frac{u_B}{R_B} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i}{R_B} \quad (2.14)$$

O raciocínio anterior pode ser generalizado para n resistências em paralelo, sendo a corrente na resistência R_k dada por:

$$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{R_j} \right)} i \quad (2.15)$$

A associação de resistências representada na Figura 2.2 também se denomina de **divisor de corrente**, uma vez que a corrente i que circula no paralelo se subdivide pelas diversas correntes nas resistências; num divisor de corrente, a corrente que percorre uma resistência será tanto maior quanto menor for o valor da resistência.

2.2.3 Alguns casos particulares

2.2.3.1 Circuito com fonte de tensão e todos os elementos em série

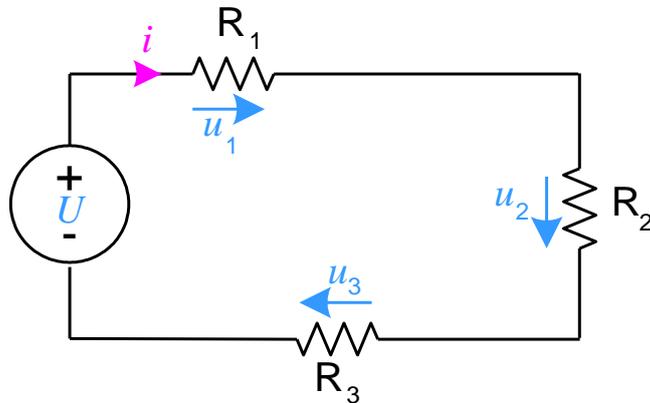


Figura 2.3 - Fonte de tensão e resistências em série

Todos os elementos são percorridos pela mesma corrente i

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.16)$$

Pelo que as tensões aos terminais das resistências são:

$$u_1 = R_1 i \quad u_2 = R_2 i \quad u_3 = R_3 i$$

2.2.3.2 Circuito com fonte de tensão e todos os elementos em paralelo

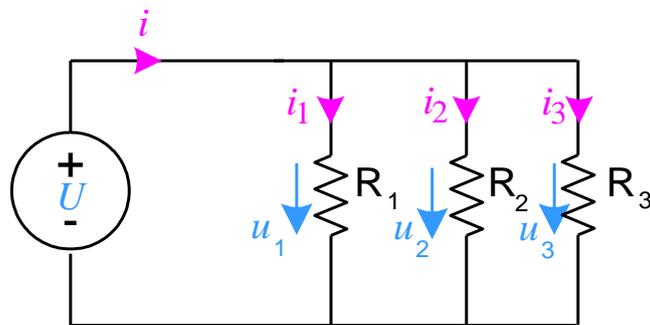


Figura 2.4 - Fonte de tensão e resistências em paralelo

Todos os elementos estão submetidos à mesma tensão U

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \quad i_2 = \frac{U}{R_2} \quad i_3 = \frac{U}{R_3}$$

Aplicando a Lei dos Nós a corrente i será:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \quad (2.17)$$

2.2.3.3 Circuito com fonte de corrente e todos os elementos em série

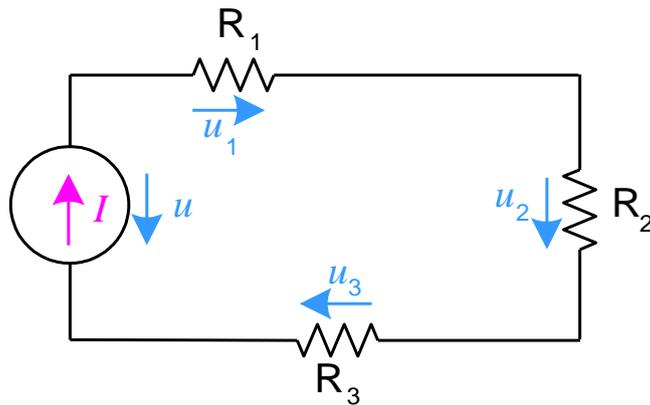


Figura 2.5 - Fonte de corrente e resistências em série

Todos os elementos são percorridos pela mesma corrente I

$$u = (R_1 + R_2 + R_3) I \quad (2.18)$$

Pelo que as tensões aos terminais das resistências são:

$$u_1 = R_1 I \quad u_2 = R_2 I \quad u_3 = R_3 I$$

2.2.3.4 Circuito com fonte de corrente e todos os elementos em paralelo

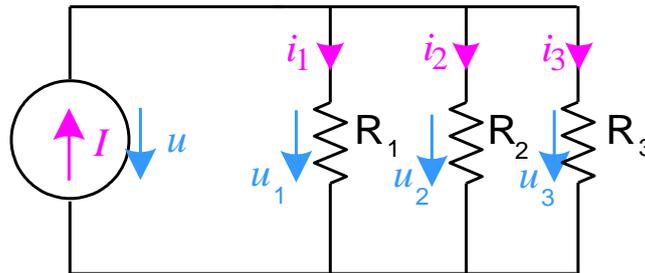


Figura 2.6 - Fonte de corrente e resistências em paralelo

Todos os elementos estão submetidos à mesma tensão u

$$u = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (2.19)$$

Pelo que as correntes em cada uma das resistências são:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} \quad i_2 = \frac{u}{R_2} \quad i_3 = \frac{u}{R_3}$$

2.3 Dipolo de Thévenin e Dipolo de Norton

O dipolo de Thévenin é constituído por uma fonte de tensão u_T em série com uma resistência R_T tal como representado na figura seguinte.

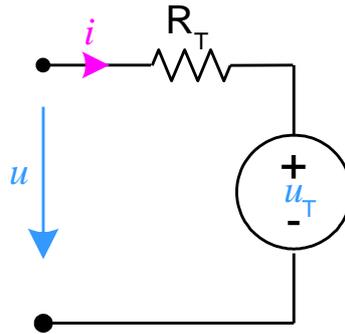


Figura 2.7 - Dipolo de Thévenin

Através da Lei das Malhas obtém-se:

$$u = u_T + R_T i \quad (2.20)$$

O dipolo de Norton é constituído por uma fonte de corrente i_N em paralelo com uma resistência R_N tal como representado na figura seguinte.

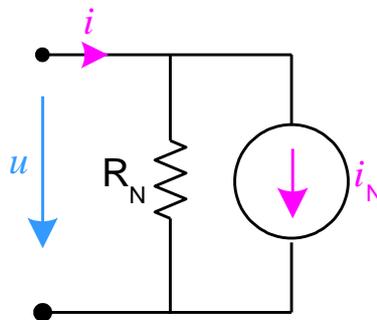


Figura 2.8 - Dipolo de Norton

Através da Lei dos Nós obtém-se:

$$i = \frac{u}{R_N} + i_N \quad (2.21)$$

A resolução de circuitos através do uso do dipolo de Thévenin ou de Norton, consiste na substituição de parte do circuito, pelo seu equivalente de Thévenin ou de Norton.

2.3.1 Equivalência entre dipolo de Thévenin e dipolo de Norton

Por comparação dos dois equivalentes, facilmente se passa de um para o outro.

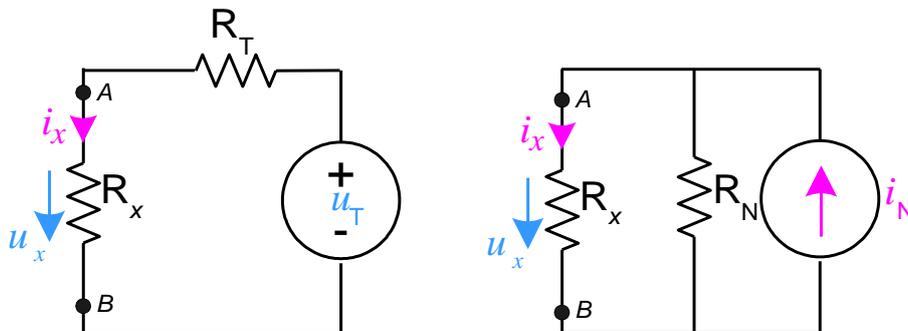


Figura 2.9 - Equivalente de Thévenin e equivalente de Norton

Aplicando a Lei das Malhas no equivalente de Thévenin, obtém-se:

$$u_x = u_T - R_T i_x \quad (2.22)$$

e dividindo ambos os membros da expressão por R_T , resulta:

$$\frac{u_x}{R_T} = \frac{u_T}{R_T} - i_x \quad (2.23)$$

ou seja:

$$i_x = \frac{u_T}{R_T} - \frac{u_x}{R_T} \quad (2.24)$$

Por aplicação da Lei dos Nós no equivalente de Norton pode obter-se a expressão:

$$i_x = i_N - \frac{u_x}{R_N} \quad (2.25)$$

Como, do ponto de vista dos terminais AB, os dois circuitos são equivalentes, conclui-se que:

$$i_N = \frac{u_T}{R_T} \quad \text{e} \quad R_N = R_T$$

O método de resolução de circuitos através dos equivalentes de Thévenin e de Norton é particularmente interessante quando se quer **conhecer a tensão e corrente aos terminais de um determinado elemento, sem que para isso se tenha de resolver todo o circuito.**

Pode-se sempre calcular o equivalente de Thévenin ou de Norton, excepto em dois casos particulares:

- Se o equivalente de Thévenin se reduz a uma fonte de tensão ideal, não existe equivalente de Norton
- Se o equivalente de Norton se reduz a uma fonte de corrente ideal, não existe equivalente de Thévenin

No entanto, estes casos particulares, correspondem a circuitos para os quais não existe necessidade de calcular os equivalentes de Thévenin ou de Norton, pois tratam-se de circuitos onde todos os elementos estão em série ou todos em paralelo.

2.3.2 Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de tensão

Considere-se o circuito representado na Figura seguinte e o respectivo dipolo de Thévenin, do ponto de vista dos terminais AB:

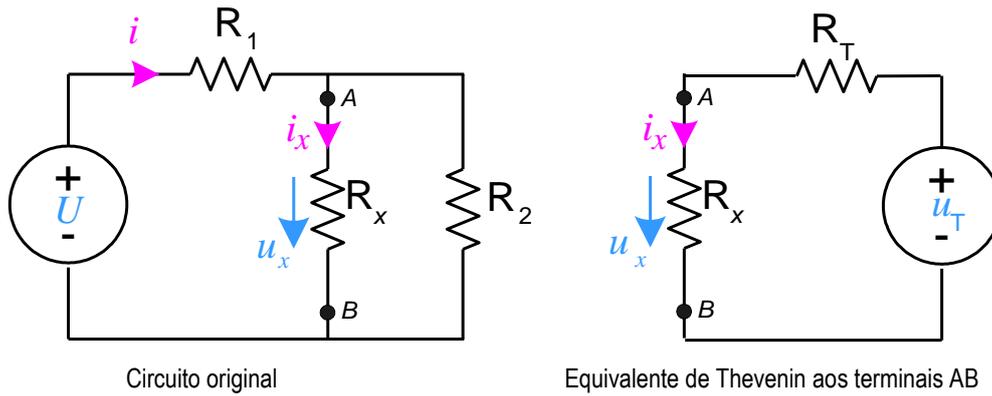


Figura 2.10 - Circuito com fonte de tensão e respectivo dipolo de Thévenin, relativamente aos terminais AB

A tensão u_T é a tensão que estaria aos terminais AB se R_x fosse substituído por um circuito aberto.

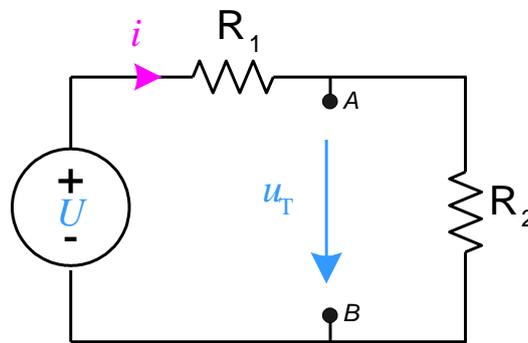


Figura 2.11 - Circuito aberto aos terminais AB

Pela relação do divisor de tensão u_T é igual a:

$$u_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \tag{2.26}$$

A resistência R_T é a resistência vista dos terminais AB, quando se anula a fonte de tensão, isto é, quando se substitui a fonte de tensão por um curto-circuito.

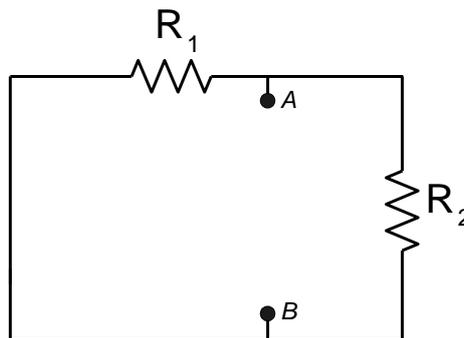


Figura 2.12 - Circuito aberto aos terminais AB

Pela relação da associação de resistências em paralelo R_T é igual a:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.27}$$

2.3.3 Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de corrente

Considere-se o circuito representado na Figura seguinte e o respectivo dipolo de Norton, do ponto de vista dos terminais AB:

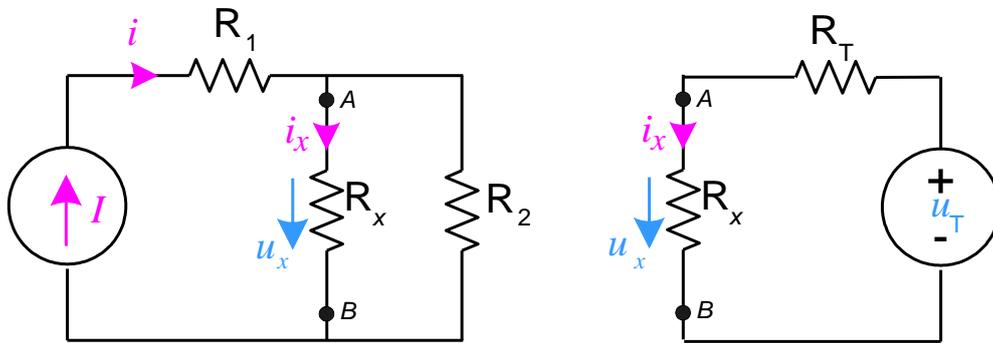


Figura 2.13 - Circuito com fonte de corrente e respectivo dipolo de Thevenin, relativamente aos terminais AB

A tensão u_T é a tensão que estaria aos terminais AB se R_x fosse substituído por um circuito aberto.

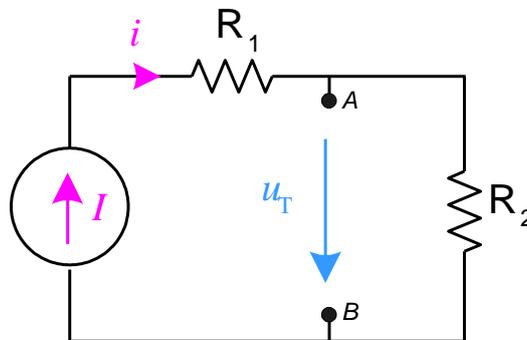


Figura 2.14 - Circuito aberto aos terminais AB

A tensão u_T é igual a:

$$u_T = R_2 I \quad (2.28)$$

A resistência R_T é a resistência vista dos terminais AB, quando se anula a fonte de corrente, isto é, quando se substitui a fonte de corrente por um circuito aberto.

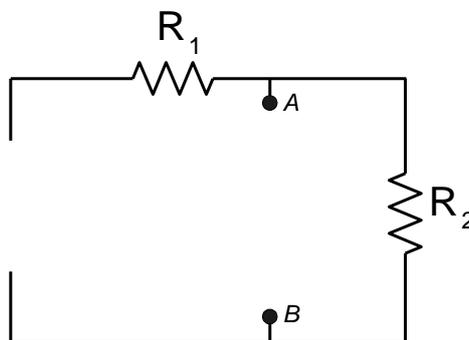


Figura 2.15 - Circuito aberto aos terminais AB

Nestas condições R_T é igual a:

$$R_T = R_2 \quad (2.29)$$

2.4 Métodos de Análise de Circuitos

2.4.1 Método Geral

O método geral para resolução de um circuito, consiste na escrita e resolução de um conjunto de equações que relacionam as tensões e correntes presentes no circuito. Estas equações são obtidas tanto através das leis de Kirchhoff, quanto das equações características dos elementos presentes no circuito. Neste capítulo, os circuitos resumir-se-ão a circuitos resistivos isto é, não serão analisados circuitos contendo indutâncias nem capacidades. No capítulo seguinte, ver-se-á que a metodologia agora apresentada é válida para a análise de circuitos mais complexos.

Os passos a seguir para aplicação deste método são:

- Contar o número de elementos n (fontes e resistências) presentes no circuito. Como a cada elemento, está associada uma tensão e uma corrente, n elementos correspondem a $2n$ incógnitas a determinar, pelo que serão necessárias $2n$ equações linearmente independentes.
- Escrever as n equações características resultantes dos n elementos presentes no circuito
- Contar o número de nós, N , presentes no circuito (ver Lei dos Nós) e escrever as $N - 1$ equações linearmente independentes que resultam da aplicação da Lei dos Nós.
- Pode mostrar-se que o número M de equações linearmente independentes resultantes da aplicação da Lei das Malhas se relaciona com o número de elementos e de nós através da relação $M = n - N + 1$.
- Finalmente, resolver o sistema composto pela totalidade das $n + (N - 1) + M$ equações obtidas

O sistema é formado por $n + (N - 1) + M$ (ou $2n$ atendendo a que $M = n - N + 1$) equações linearmente independentes e, portanto, necessárias e suficientes para determinar as $2n$ incógnitas (tensão e corrente em cada um dos elementos).

Considere-se o circuito representado na Figura 1:

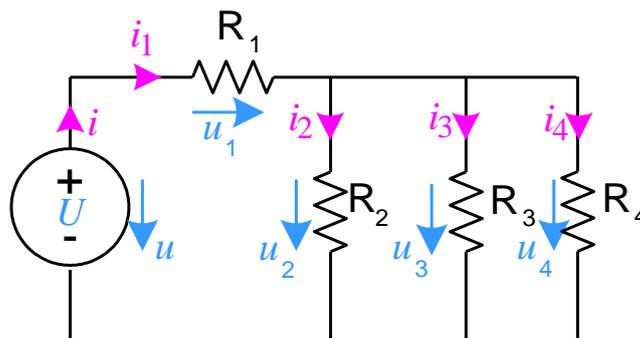


Figura 2.16 – Circuito exemplificativo

- Neste circuito existem $n = 5$ elementos (4 resistências e uma fonte de tensão) o que equivale a dizer que existem $2n = 10$ grandezas a determinar; 5 tensões (u, u_1, u_2, u_3, u_4) e 5 correntes (i, i_1, i_2, i_3, i_4).
- As 5 equações provenientes das características de cada elemento são:

$$u = U \quad u_1 = R_1 i_1 \quad u_2 = R_2 i_2 \quad u_3 = R_3 i_3 \quad u_4 = R_4 i_4 \quad (2.30)$$

- Existem $N = 3$ nós neste circuito, pelo que se podem escrever $N - 1 = 2$ equações linearmente independentes através da Lei dos Nós:

$$i = i_1 \qquad i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \qquad (2.31)$$

- Existem $M = n - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ equações linearmente independentes resultantes da aplicação da Lei das Malhas. Uma escolha possível para estas 3 equações é:

$$u = u_1 + u_3 \qquad u_2 = u_3 \qquad u_3 = u_4 \qquad (2.32)$$

mas também poderia ser:

$$u = u_1 + u_4 \qquad u_2 = u_4 \qquad u = u_1 + u_2 \qquad (2.33)$$

O sistema de equações a resolver poderia ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U \\ u_1 = R_1 i_1 \\ u_2 = R_2 i_2 \\ u_3 = R_3 i_3 \\ u_4 = R_4 i_4 \\ i = i_1 \\ i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \\ u = u_1 + u_3 \\ u_2 = u_3 \\ u_3 = u_4 \end{array} \right. \qquad (2.34)$$

2.4.2 Método das malhas ou das correntes fictícias

O método das malhas ou das correntes fictícias consiste em

- converter fontes de corrente em fontes de tensão através do equivalente Norton-Thevenin
- associar a cada uma das malhas independentes do circuito uma corrente fictícia, J_i
- exprimir cada uma das correntes do circuito em termos das correntes fictícias, J_i
- escrever, para cada malha, a equação resultante da aplicação da lei das malhas de Kirchhoff, em termos de J_i

O circuito representado na Figura 2.17 tem 3 malhas independentes pelo que se associam 3 correntes fictícias designadas por J_1 , J_2 e J_3 conforme representado na figura seguinte.

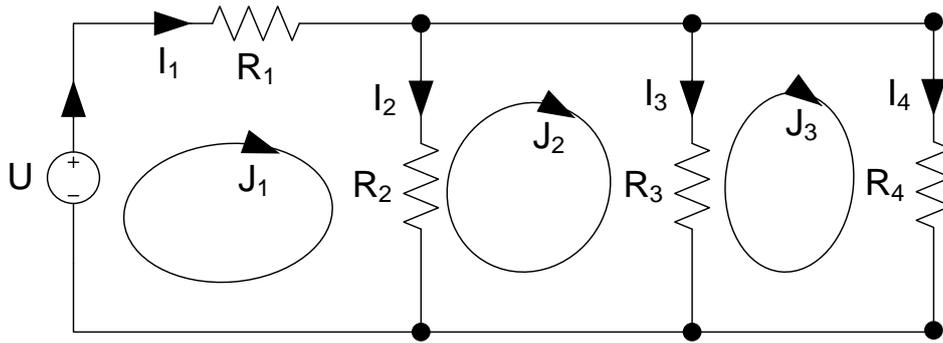


Figura 2.17 - Circuito da Fig1 e correntes fictícias

Cada uma das correntes do circuito expressa em termos de J_1 , J_2 e J_3 resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} i = J_1 \\ i_1 = J_1 \\ i_2 = J_1 - J_2 \\ i_3 = J_2 - J_3 \\ i_4 = J_3 \end{cases} \quad (2.35)$$

As equações resultantes da aplicação da lei das malhas de Kirchhoff, são:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = U \\ u_3 - u_2 = 0 \\ u_4 - u_3 = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

ou, em termos de i_1 , i_2 e i_3 ,

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = U \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0 \\ R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

ou ainda, em termos de J_1 , J_2 e J_3 resulta no sistema:

$$\begin{cases} R_1 J_1 + R_2 (J_1 - J_2) = U \\ R_3 (J_2 - J_3) - R_2 (J_1 - J_2) = 0 \\ R_4 J_3 - R_3 (J_2 - J_3) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

O conhecimento dos valores de J_1 , J_2 e J_3 resultantes da solução do sistema anterior, conduz ao conhecimento das correntes através de (2.35) e das tensões aos terminais dos elementos do circuito através das equações características de cada elemento.

2.4.3 Forma matricial

Rearranjando o sistema de equações (2.38) obtém-se:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)J_1 - R_2J_2 = U \\ -R_2J_1 + (R_2 + R_3)J_2 - R_3J_3 = 0 \\ -R_3J_2 + (R_3 + R_3)J_3 = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Que, em termos matriciais se pode escrever:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Algumas regras simples para construção da equação matricial anterior são:

- A matriz R é simétrica
- Os elementos R_{ii} da diagonal principal correspondem à soma das resistências presentes na malha onde foi definida a corrente fictícia J_i . Por exemplo, na malha onde foi definida J_2 existem as resistências R_2 e R_3 ; o elemento R_{22} será $R_2 + R_3$.
- Os elementos R_{ij} correspondem à soma das resistências presentes no ramo comum às malhas i e j . Estes elementos serão afectados de sinal negativo se as correntes fictícias J_i e J_j circularem no elemento em questão com sentidos contrários. Por exemplo, no ramo comum às malhas de J_2 e J_3 existe a resistência R_3 ; o elemento R_{23} (e o R_{32} porque a matriz é simétrica) deverá ser afectado de sinal negativo porque J_2 e J_3 circulam em R_3 com sentidos contrários.
- O elemento U_i da matriz dos termos independentes corresponde ao somatório das fontes de tensão presentes na malha i . Este elemento será afectado de sinal negativo se a corrente fictícia J_i tiver sido definida com o mesmo sentido da fonte de tensão em causa. No exemplo em causa só existe elemento U_1 pois apenas a malha de J_1 contém uma fonte de tensão; J_1 e U foram definidos com sentidos contrários pelo que U não deverá ser afectado de sinal negativo.

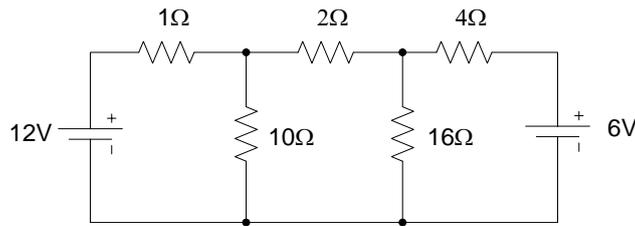
A resolução da equação anterior é obtida através de:

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Uma vez calculadas as correntes fictícias, as correntes do circuito obtêm-se através de (2.35) e as tensões através de (2.36) e (2.37).

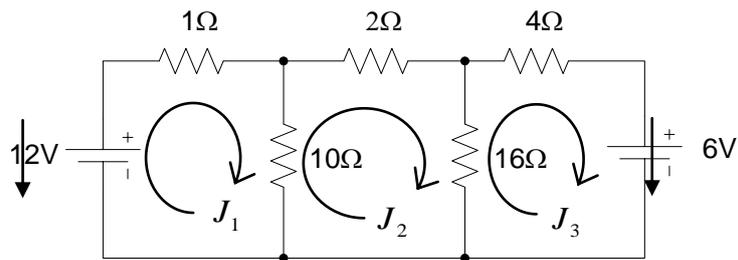
2.4.4 Exemplo

QUESTÃO 1: Considere o circuito da figura. Utilizando o método que preferir escreva o sistema de equações que lhe permite calcular as tensões e correntes do circuito.



Resposta>>

Definam-se as correntes J_1 , J_2 e J_3 como indicado na figura. , e



- Os elementos da diagonal correspondem à soma das resistências de cada malha; assim,

$$R_{11} = 1 + 10, \quad R_{22} = 10 + 2 + 10 \quad \text{e} \quad R_{33} = 10 + 1$$

- Os elementos R_{ij} correspondem à soma das resistências presentes no ramo comum às malhas i e j ; assim,

$$R_{12} = -10 \quad \text{sinal negativo porque } J_1 \text{ e } J_2 \text{ têm sentidos opostos}$$

$$R_{13} = 0 \quad \text{porque não há resistências comuns às malhas 1 e 3}$$

$$R_{23} = -16 \quad \text{sinal negativo porque } J_2 \text{ e } J_3 \text{ têm sentidos opostos}$$

- Como a matriz é simétrica

$$R_{21} = R_{12}, \quad R_{31} = R_{13} \quad \text{e} \quad R_{32} = R_{23}$$

- O sentido da tensão 12V é contrário a $J_1 \Rightarrow U_1 = 12$
- O sentido da tensão 6V é coincidente com $J_3 \Rightarrow U_3 = -6$

O sistema de equações resultante é:

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 & 0 \\ -10 & 28 & -16 \\ 0 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3 Circuitos em Corrente Alternada

3.1 Grandezas Alternadas Sinusoidais

3.1.1 Introdução

As funções alternadas sinusoidais são particularmente importantes para a análise de circuitos pois a maior parte dos sistemas de produção e distribuição eléctrica gera e transporta energia através de grandezas cuja evolução no tempo se pode considerar sinusoidal; a sigla, normalmente utilizada para designar esta forma de energia eléctrica é “AC” e deriva da designação inglesa *Alternating Current*.

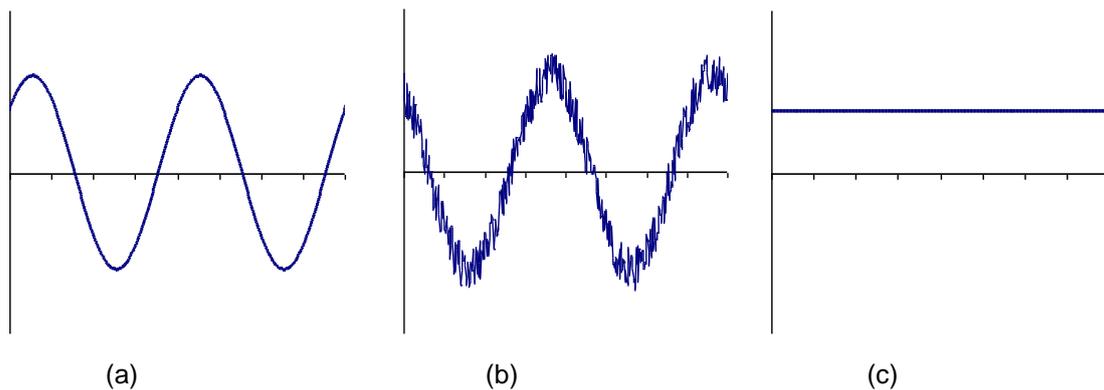


Figura 3.1 - (a) Grandeza alternada sinusoidal; (b) Grandeza Alternada não sinusoidal (c) Grandeza contínua

A grande vantagem da alimentação em AC, comparativamente à DC (*Direct Current*) onde as grandezas têm uma evolução constante no tempo, verifica-se na eficiência do transporte de energia por esta se poder fazer a muito alta tensão de forma económica; a tensão alternada produzida numa central é elevada por um transformador que, conseqüentemente diminui, aproximadamente, na mesma proporção a corrente; as perdas $R i^2$ são assim menores em alta tensão, do que seriam se a energia fosse transportada ao nível de tensão a que é produzida. Esta foi a principal razão porque os sistemas AC se impuseram face aos sistemas DC.

O conceito de “grandeza contínua” em electrotecnia é diferente do conceito matemático de “grandeza contínua”; em electrotecnia, entende-se que uma “grandeza contínua” é uma grandeza cujo valor é constante no tempo.

3.1.2 Definição

Uma grandeza alternada sinusoidal, $x(t)$, pode ser descrita pela expressão matemática:

$$x(t) = X_M \sin (\omega t + \psi) \quad (3.1)$$

sendo $x(t)$ o **valor instantâneo**, X_M a sua **amplitude máxima**, $(\omega t + \psi)$ a **fase**, ω a **frequência angular** que se expressa em radianos por segundo $[rad / s]$ e ψ a fase inicial expressa em radianos.

A frequência angular relaciona-se com a **frequência** f , expressa em ciclos por segundo ou hertz (Hz), através de:

$$\omega = 2\pi f \quad (3.2)$$

A frequência pode ser expressa em função do período T , através de:

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.3}$$

Todos estes parâmetros da sinusóide estão graficamente representados na figura seguinte

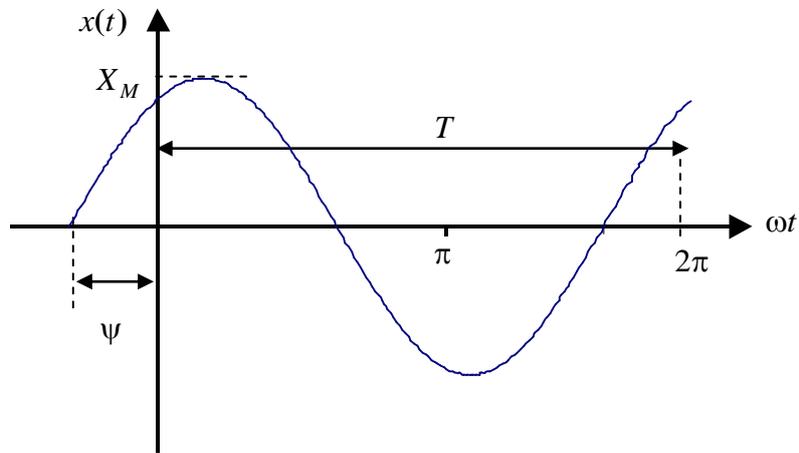


Figura 3.2 - Representação gráfica de uma grandeza sinusoidal

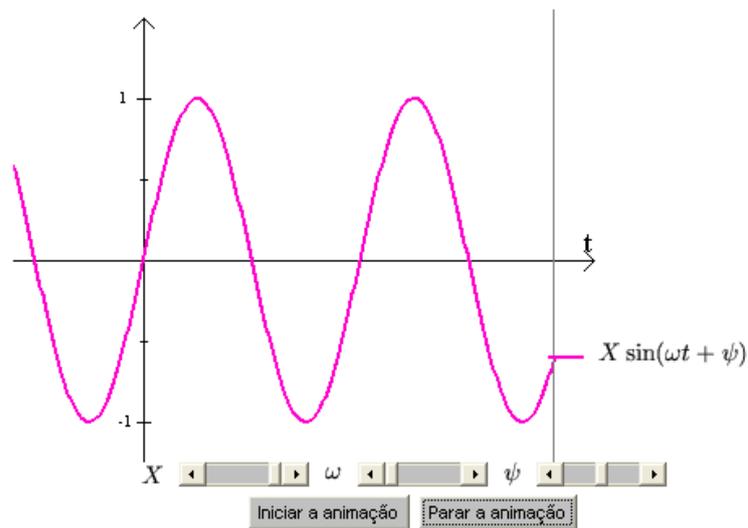


Figura 3.3 - Animação multimédia de uma grandeza sinusoidal

http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/GrandezasSinusoidais/2_cours.htm

Dadas duas grandezas sinusoidais com igual frequência, descritas pelas expressões:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad y(t) = Y_M \sin(\omega t + \gamma) \tag{3.4}$$

designa-se por **desfasagem** entre as grandezas, a diferença de fases iniciais, \$(\varphi - \gamma)\$.

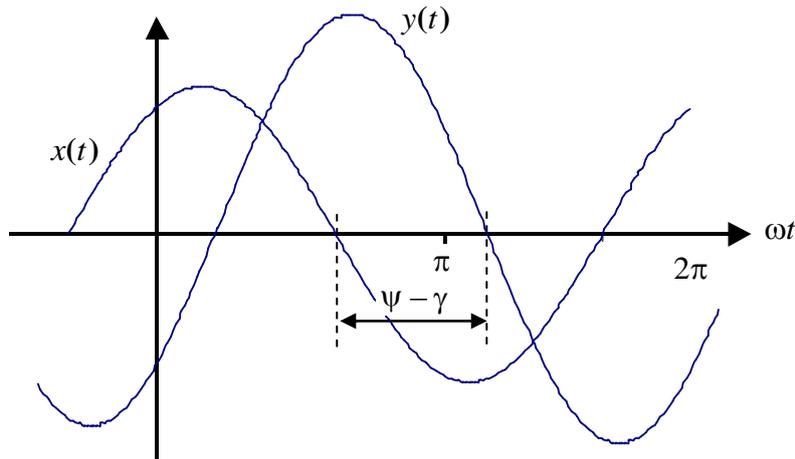


Figura 3.4 - Representação gráfica do desfasamento entre duas grandezas sinusoidais

De acordo com o exemplo dado, diz-se que a grandeza $x(t)$ está avançada $(\psi - \gamma)$ radianos, relativamente a $y(t)$. A afirmação dual também é válida: a grandeza $y(t)$ está atrasada $(\psi - \gamma)$ radianos, relativamente a $x(t)$.

3.1.3 Valor Eficaz

O conceito de valor eficaz de uma tensão ou corrente alternada sinusoidal está directamente ligado à potência associada a esse par de grandezas; é através do valor eficaz que se pode comparar a potência associada a grandezas AC com potências associadas a grandezas DC.

Fisicamente, o **valor eficaz** de uma corrente alternada é o valor da intensidade de uma corrente contínua que produziria, numa resistência, o mesmo efeito calorífico que a corrente alternada em questão.

Matematicamente, o valor eficaz, X_{ef} , de uma grandeza periódica $x(t)$ é determinado através de:

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t))^2 dt} \quad (3.5)$$

O caso particular de uma grandeza alternada sinusoidal expressa por $x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi)$, a expressão anterior conduz a:

$$X_{ef} = \frac{X_M}{\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

Poder-se-á assim escrever:

$$x(t) = \sqrt{2} X_{ef} \sin(\omega t + \psi) \quad (3.7)$$

Gráficamente, o valor eficaz está relacionado com a área sob a curva que representa a evolução temporal do quadrado da grandeza, tal como se representa na figura seguinte.

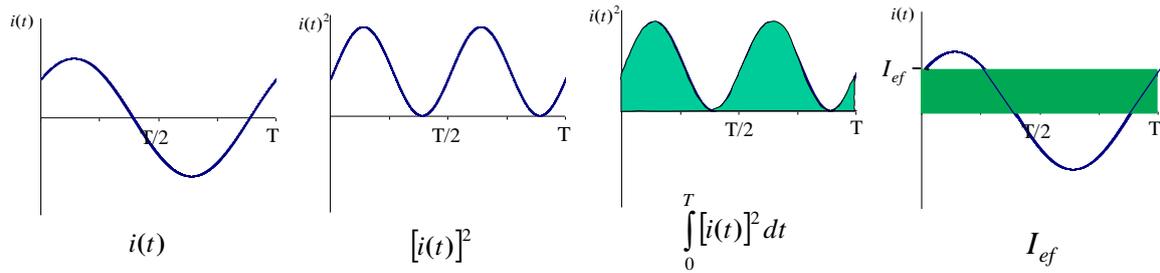


Figura 3.5 - Representação gráfica do cálculo do valor eficaz

O valor eficaz de uma grandeza altera-se com a amplitude, com perturbações na forma da onda, mas não é afectado por variação da frequência, nem da fase inicial

3.1.4 Notação Complexa

A notação complexa é uma forma de representar grandezas alternadas sinusoidais através de vectores que variam no tempo (vectores girantes). A notação complexa foi introduzida por Steinmetz, em 1893, e veio simplificar a análise do regime permanente de circuitos alimentados em AC.

Pretende-se determinar qual o vector representativo da tensão descrita por

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.8)$$

Partindo da identidade de Euler

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (3.9)$$

onde j representa a unidade imaginária, pode-se escrever:

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi) \quad (3.10)$$

multiplicando ambos os membros da expressão por U_M , obtém-se:

$$U_M e^{j(\omega t + \psi)} = U_M \cos(\omega t + \psi) + j U_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.11)$$

que será designado por **vector girante** e representado por:

$$\bar{U}_M(t) = U_M e^{j(\omega t + \psi)} \quad (3.12)$$

Comparando a expressão de $\bar{U}_M(t)$ com a da evolução temporal de $u(t)$, conclui-se que $u(t)$ corresponde à parte imaginária de $\bar{U}_M(t)$. Em termos matemáticos tem-se:

$$u(t) = \text{Im} \left\{ U_M e^{j(\omega t + \psi)} \right\} \quad (3.13)$$

Atendendo a que

$$U_M e^{j(\omega t + \psi)} = U_M e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} \quad (3.14)$$

o número complexo $\bar{U}_M(t)$ pode ser representado no plano complexo como um vector que, para $t = 0$, vale $U_M e^{j\psi}$ e que rodará com frequência angular ω ao longo do tempo (correspondente à multiplicação por $e^{j\omega t}$)

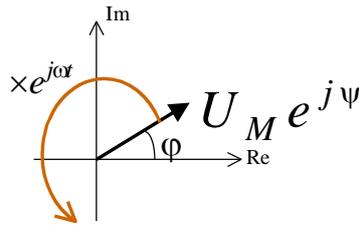


Figura 3.6 - Representação gráfica de um vector girante

O vector $U_M e^{j\psi}$ designa-se por **amplitude complexa** do vector girante $\bar{U}_M(t)$

Graficamente, a tensão descrita por $u(t) = U_M \sin(\omega t + \psi)$ será, em cada instante, a projecção de $\bar{U}_M(t)$ sobre o eixo dos imaginários.

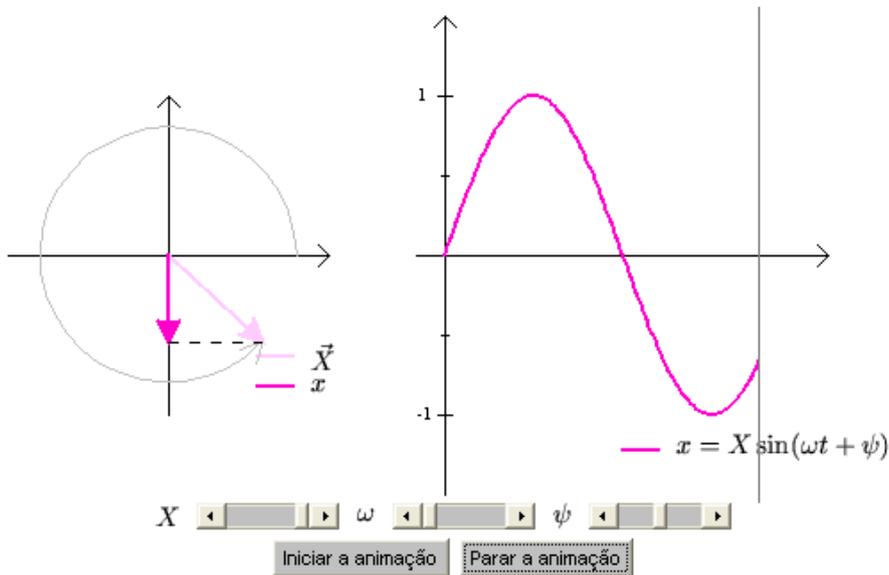


Figura 3.7 - Animação multimédia de um vector girante

http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/GrandezasSinusoidais/4_cours.htm

3.1.5 Operações Matemáticas com Amplitudes Complexas

3.1.5.1 Adição de grandezas sinusoidais com a mesma frequência angular

Dadas duas grandezas sinusoidais descritas por:

$$x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \psi_2) \quad (3.15)$$

analiticamente, a sua soma será dada por:

$$x_1(t) + x_2(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) + X_{M2} \sin(\omega t + \psi_2) \quad (3.16)$$

Se se representar cada grandeza pelo respectivo vector girante, a sua soma será representada pela soma dos dois vectores; a evolução temporal da soma corresponde à parte imaginária deste vector soma:

$$x_1(t) + x_2(t) = \text{Im}\{\bar{X}_{M1}(t) + \bar{X}_{M2}(t)\}$$

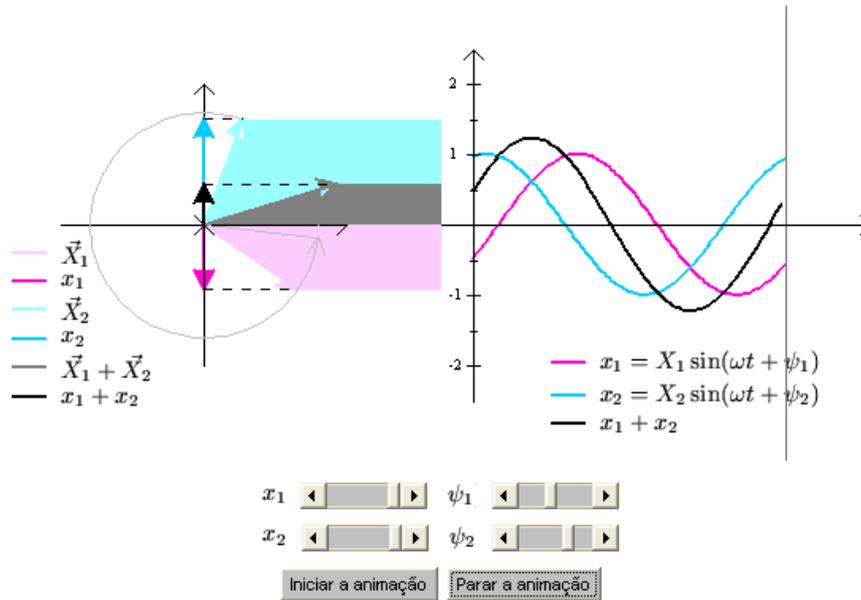


Figura 3.8 - Animação multimédia da soma de dois vectores girantes

http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/GrandezasSinusoidais/5_cours.htm

3.1.5.2 Multiplicação de uma grandeza sinusoidal por uma constante real

Dada a grandeza sinusoidal descrita por:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.17)$$

analiticamente, a sua multiplicação pela constante real K é dada por:

$$a x(t) = a X_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.18)$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, a sua multiplicação por a é representada por um vector colinear com $\vec{X}_M(t)$ mas cujo módulo vale $a X_M$; a evolução temporal $a x(t)$ corresponde à parte imaginária deste vector:

$$a x(t) = \text{Im}\{a \vec{X}_M(t)\} = \text{Im}\{a X_M e^{j(\omega t + \psi)}\} \quad (3.19)$$

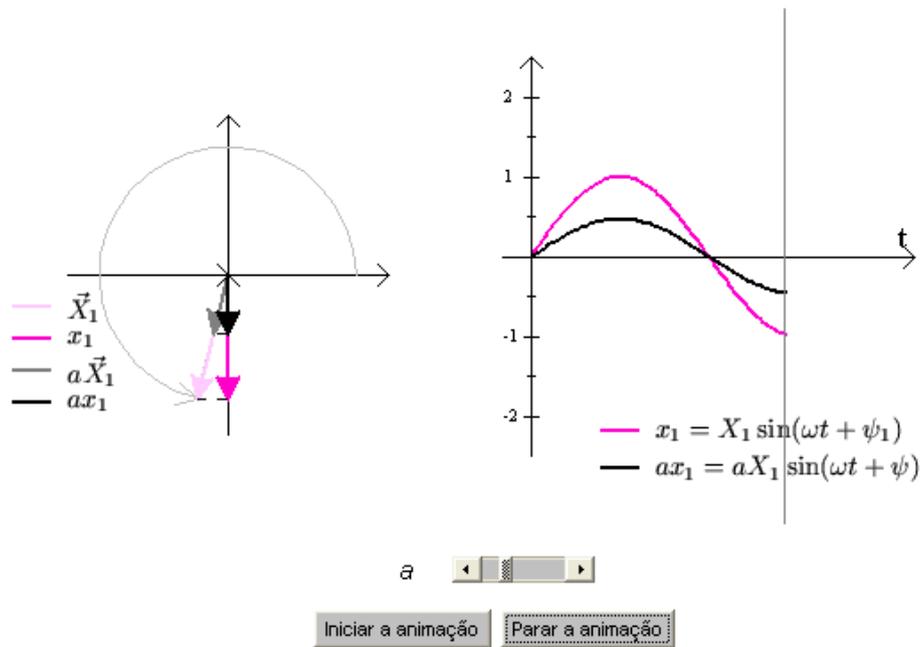


Figura 3.9 - Animação multimédia da multiplicação de um vector girante por uma constante

3.1.5.3 Derivação de uma grandeza sinusoidal

Dada a grandeza sinusoidal descritas por:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.20)$$

analiticamente, a sua derivada será dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega X_M \cos(\omega t + \psi) = \omega X_M \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \quad (3.21)$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, a sua derivada será representada por um vector de fase $(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$, isto é, avançado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $x(t)$, e de módulo ωX_M ; a evolução temporal da derivada corresponde à parte imaginária deste vector:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \text{Im} \left\{ \frac{d\bar{X}_M(t)}{dt} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{d}{dt} \left(X_M e^{j(\omega t + \psi)} \right) \right\} = \text{Im} \left\{ j\omega X_M e^{j(\omega t + \psi)} \right\} = \text{Im} \left\{ \omega X_M e^{j(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})} \right\} \quad (3.22)$$

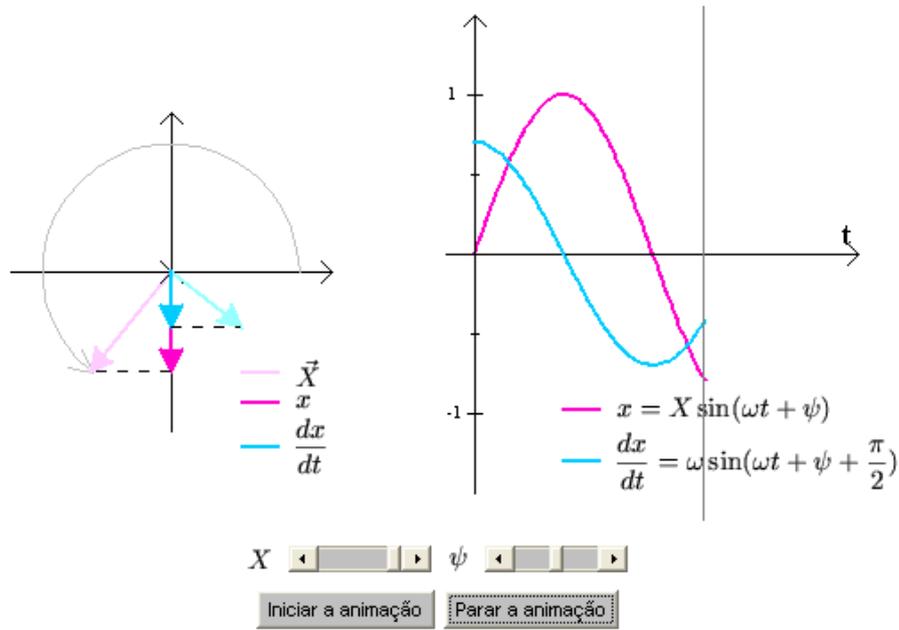


Figura 3.10 - Animação multimédia da derivação de um vector girante

3.1.5.4 Integração de uma grandeza sinusoidal

Dadas a grandeza sinusoidal descritas por:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi) \quad (3.23)$$

analiticamente, o seu integral será dado por:

$$\int x(t) dt = -\frac{X_M}{\omega} \cos(\omega t + \psi) = \frac{X_M}{\omega} \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) \quad (3.24)$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, o seu integral será representado por um vector de fase $(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})$, isto é, atrasado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $x(t)$, e de módulo $\frac{X_M}{\omega}$; a evolução temporal do integral corresponde à parte imaginária deste vector:

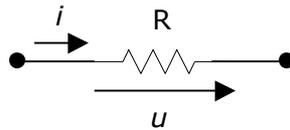
$$\int x(t) dt = \text{Im} \left\{ \int \bar{X}_M(t) dt \right\} = \text{Im} \left\{ \int (X_M e^{j(\omega t + \psi)}) dt \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{X_M}{j\omega} e^{j(\omega t + \psi)} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{X_M}{\omega} e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} \right\} \quad (3.25)$$

3.2 Circuitos Básicos

3.2.1 Elementos Ideais

3.2.1.1 Resistência

Considere-se uma resistência cujos sentidos de referência para a tensão e corrente se encontram representados na figura seguinte.



Admitindo que a corrente que percorre a resistência é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.26)$$

através da equação característica da resistência, $u = Ri$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$u(t) = R i(t) = R I_M \sin(\omega t + \varphi) = U_M \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.27)$$

A tensão aos terminais da resistência também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular ω , está em fase com $i(t)$ e apresenta uma amplitude dada por $R I_M$.

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (3.28)$$

e, através da equação característica, o vector girante da tensão, $\bar{U}_M(t)$ será:

$$\begin{aligned} \bar{U}_M(t) &= R I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= U_M e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\bar{I}_M(t)$ e é colinear com este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

Numa resistência, a tensão aos seus terminais e a corrente que a percorre estão em fase.

A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.

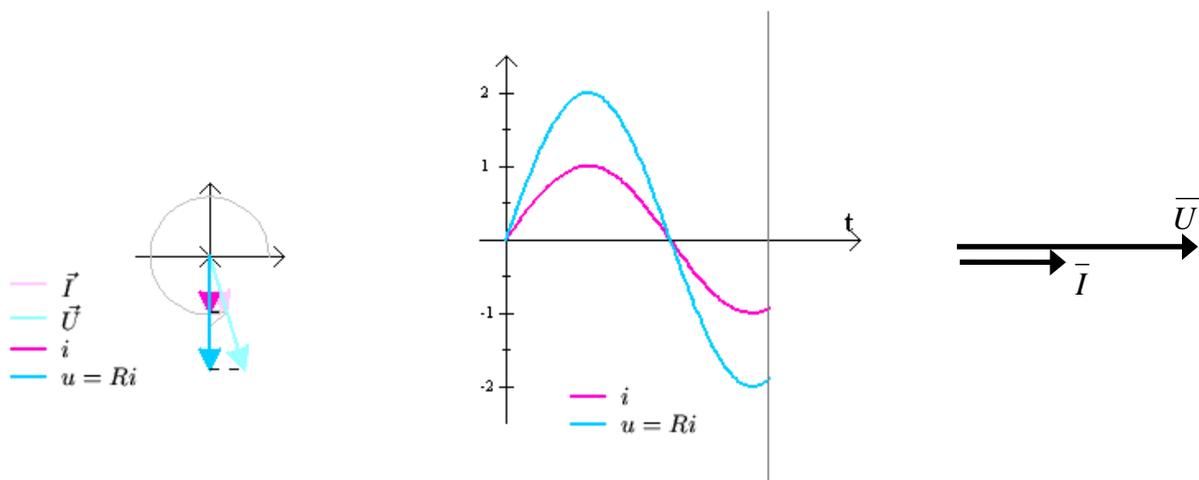
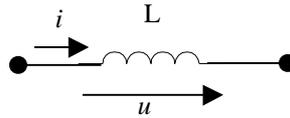


Figura 3.11 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da tensão e corrente numa resistência
http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/CircuitosSinusoidal/1_aula.htm

3.2.1.2 Indutância

Considere-se uma indutância cujos sentidos de referência para a tensão e a corrente se encontram

representados na figura seguinte.



Admitindo que a corrente que percorre a indutância é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.30)$$

através da equação característica da indutância, $u = L \frac{di}{dt}$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{d}{dt} [I_M \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= \omega L I_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= U_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

A tensão aos terminais da indutância também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular ω , está avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $i(t)$ e apresenta uma amplitude de $\omega L I_M$.

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (3.32)$$

e, através da equação característica, o vector girante da tensão, $\bar{U}_M(t)$ será:

$$\begin{aligned} \bar{U}_M(t) &= L \frac{d}{dt} [I_M e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= j \omega L I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= \omega L I_M e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} \\ &= U_M e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (3.33)$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\bar{I}_M(t)$ e está avançado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.

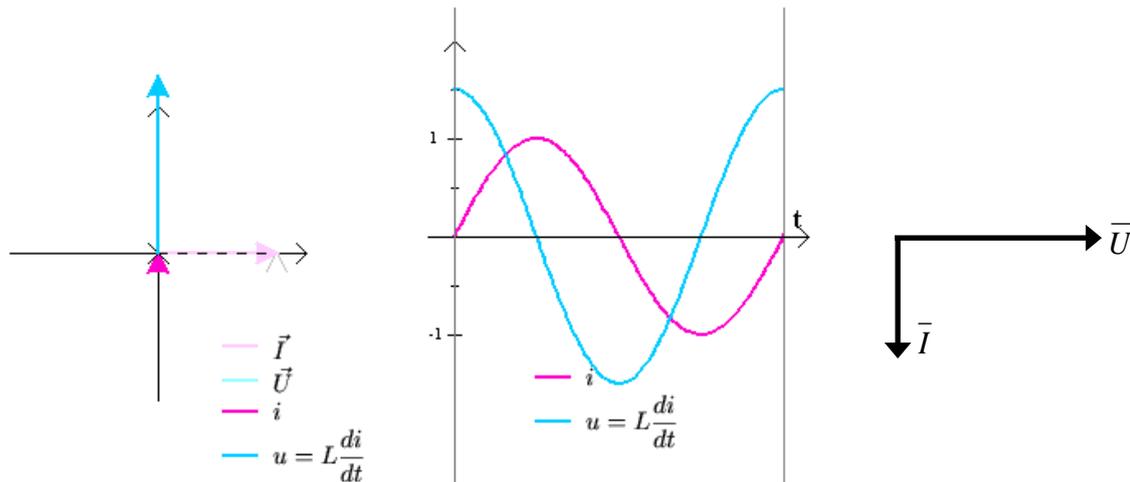
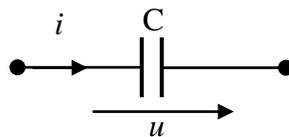


Figura 3.12 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da tensão e corrente numa indutância
http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/CircuitosSinusoidal/1_aula.htm

3.2.1.3 Capacidade

Considere-se uma capacidade cujos sentidos de referência para a tensão e corrente se encontram representados na figura seguinte.



Admitindo que a corrente que percorre a indutância é alternada sinusoidal representada pela expressão:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.34)$$

através da equação característica da capacidade, $i = C \frac{du}{dt}$ é possível determinar a tensão aos seus terminais:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int [I_M \sin(\omega t + \varphi)] dt \\ &= \frac{I_M}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= U_M \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

A tensão aos terminais da capacidade também é uma grandeza alternada sinusoidal de frequência angular ω , está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $i(t)$ e apresenta uma amplitude de $\frac{I_M}{\omega C}$.

Em notação complexa, o vector girante representativo de $i(t)$ é:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (3.36)$$

e, através da equação característica da capacidade, o vector girante da tensão, $\bar{U}_M(t)$ será:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_M(t) &= \frac{1}{C} \int [I_M e^{j(\omega t + \varphi)}] dt \\
 &= \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\
 &= \frac{1}{\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} \\
 &= U_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

O vector girante da tensão apresenta a mesma frequência angular de $\bar{I}_M(t)$ e está atrasado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a este; obtém-se $u(t)$ fazendo a projecção deste vector sobre o eixo dos Imaginários.

A figura seguinte representa a evolução temporal e o diagrama vectorial da tensão e corrente aos terminais da resistência.

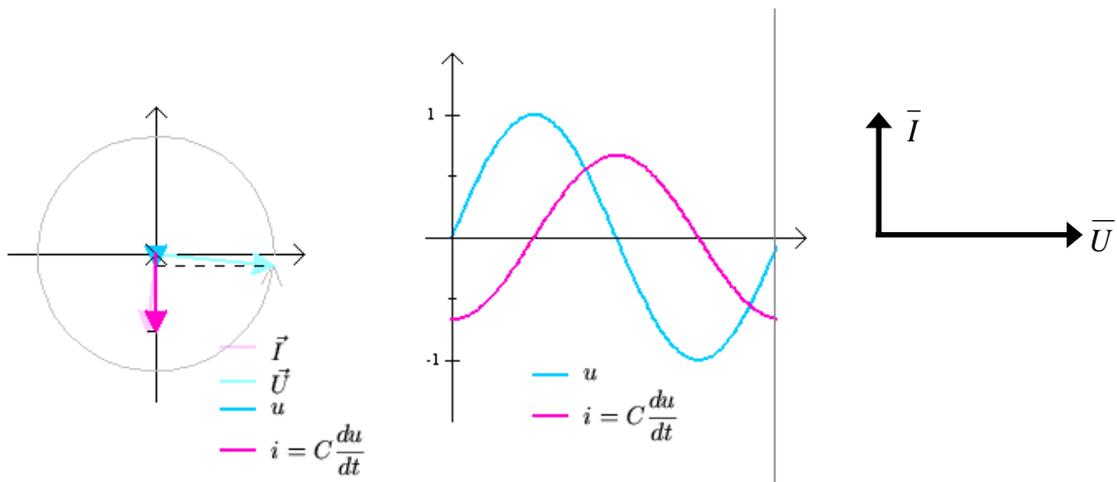


Figura 3.13 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da tensão e corrente numa capacidade http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/CircuitosSinusoidal/1_aula.htm

3.2.2 Conceito de Impedância Complexa

Através da notação complexa e admitindo que o vector girante da corrente que percorria cada um dos elementos era representado pela expressão:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}
 \tag{3.38}$$

obtiveram-se, na secção anterior as seguintes expressões para os vectores girantes das tensões, respectivamente, na resistência, indutância e capacidade:

Resistência	Indutância	Capacidade
$\bar{U}_M(t) = R I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\bar{U}_M(t) = j \omega L I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\bar{U}_M(t) = \frac{1}{j \omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$

Atendendo à expressão de $\bar{I}_M(t)$, as expressões anteriores podem reescrever-se na forma:

Resistência	Indutância	Capacidade
$\bar{U}_M(t) = R \bar{I}_M(t)$	$\bar{U}_M(t) = j\omega L \bar{I}_M(t)$	$\bar{U}_M(t) = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_M(t)$

Define-se **impedância complexa**, \bar{Z} , a razão entre os vectores girantes da tensão e da corrente:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}_M}{\bar{I}_M} \tag{3.39}$$

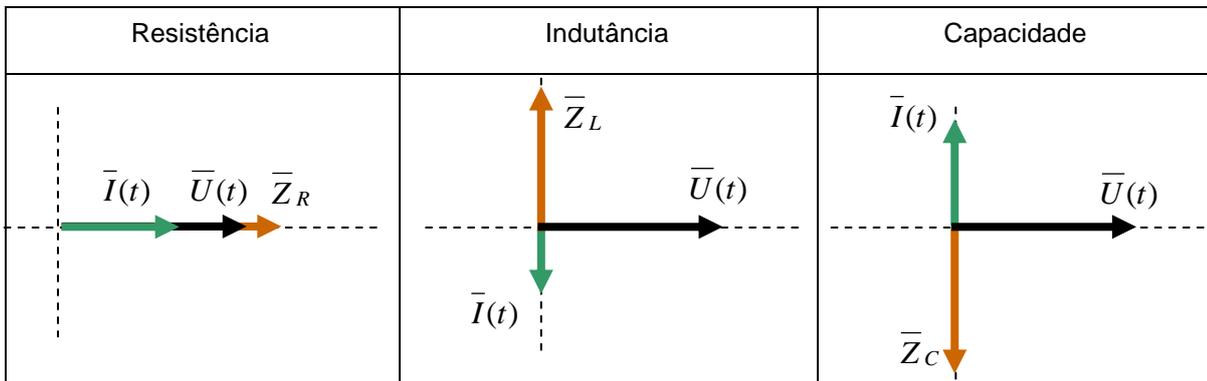
Explicitando a impedância complexa de cada um dos elementos R, L e C, obtém-se:

Resistência	Indutância	Capacidade
$\bar{Z}_R = R = R e^{j0}$	$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Uma impedância complexa expressa-se em Ohm $[\Omega]$

A componente imaginária da impedância designa-se por **reactância**.

Podem representar-se vectorialmente as impedâncias e as amplitudes complexas de cada um dos elementos.



Note-se que a impedância não é um vector girante, pois não está a representar qualquer grandeza alternada sinusoidal.

Saliente-se, também, o facto de as impedâncias das indutâncias e dos condensadores se alterar com a frequência de alimentação do circuito, contrariamente ao que acontece com a impedância da resistência

Como a tensão e a corrente aos terminais de um elemento oscilam com a mesma frequência ω , o termo $e^{j\omega t}$ pode ser suprimido das equações características dos elementos escritas em notação vectorial, simplificando-se a notação. As equações ficarão escritas, não em termos de vectores girantes, mas sim de amplitudes complexas, isto é, a representação do vector girante no instante $t = 0$.

Resistência	Indutância	Capacidade
$\bar{U}_R = \bar{Z}_R \bar{I}_R$	$\bar{U}_L = \bar{Z}_L \bar{I}_L$	$\bar{U}_C = \bar{Z}_C \bar{I}_C$

As expressões deduzidas para as associações de resistência em série e paralelo podem ser generalizadas

para as impedâncias, tendo em particular atenção que estas são representadas por números complexos.

Também a Lei dos Nós e das Malhas mantêm a sua validade mas a sua verificação gráfica com amplitudes complexas tem de ter em conta a sua representação vectorial; as Leis dos Nós e das Malhas verificam-se vectorialmente!

3.2.3 Circuito RL série

NOTA

Atendendo à relevância dos valores eficazes (e não dos valores máximos) e de forma a simplificar a escrita das expressões, suprimir-se-á, a partir daqui, o índice $_{ef}$ para denotar um valor eficaz. Assim, a notação X passará a representar o valor eficaz da grandeza x e não X_{ef} como até aqui. Se se tratar de uma grandeza alternada sinusoidal, a sua amplitude máxima será, de acordo com (3.6), $X_M = \sqrt{2} X$.

Considere-se o circuito RL série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$

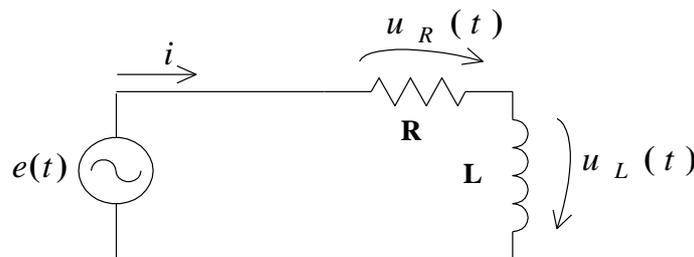


Figura 3.14 - Esquema do circuito RL série

Conhecidos os valores de R e L , pretende determinar-se o regime permanente da evolução temporal da corrente no circuito, $i(t)$, e das tensões aos terminais da resistência, $u_R(t)$, e da indutância, $u_L(t)$.

Através da Lei das Malhas, a soma da tensão aos terminais da resistência, com a tensão aos terminais da bobine, igualará a tensão da fonte:

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) \tag{3.40}$$

Em termos de amplitudes complexas a expressão anterior escreve-se:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= R \bar{I} + j\omega L \bar{I} \\ &= (R + j\omega L) \bar{I} \end{aligned} \tag{3.41}$$

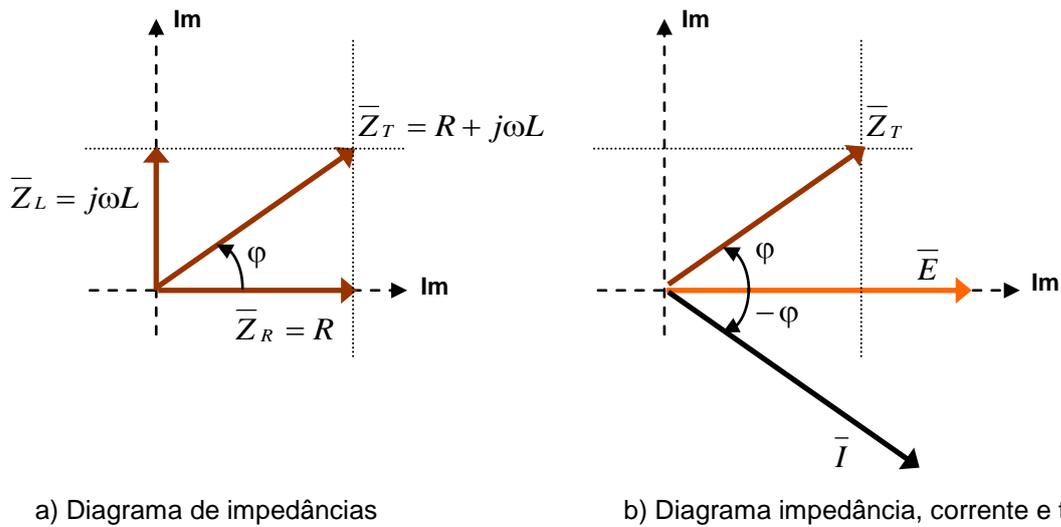
onde $R + j\omega L$ representa a impedância complexa da resistência em série com a indutância; a componente resistiva da impedância é R , enquanto a reactância (componente reactiva) é ωL .

Explicitando \bar{I} na expressão anterior, obtém-se:

$$\bar{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad \text{e } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \tag{3.42}$$

O diagrama vectorial da impedância, e amplitudes complexas da tensão da fonte e corrente, está

representado na figura seguinte.



a) Diagrama de impedâncias

b) Diagrama impedância, corrente e tensão

Figura 3.15. Diagrama vectorial circuito RL série.

Uma vez determinada a corrente, é imediato o cálculo das tensões aos terminais dos elementos:

$$\bar{U}_R = R \bar{I} = \frac{R E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\phi} \quad (3.43)$$

A amplitude complexa \bar{U}_R é colinear com \bar{I} , isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

Relativamente à tensão aos terminais da bobine, tem-se:

$$\bar{U}_L = j\omega L \bar{I} = \frac{\omega L E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\phi + j\frac{\pi}{2}} \quad (3.44)$$

A amplitude complexa \bar{U}_L está avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente \bar{I} , isto é, a tensão aos terminais da bobine está avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

O diagrama vectorial completo das tensões e corrente do circuito, encontra-se representado na figura seguinte, onde se evidenciou a lei das Malhas das amplitudes complexas: a soma dos vectores \bar{U}_L e \bar{U}_R iguala o vector \bar{E} .

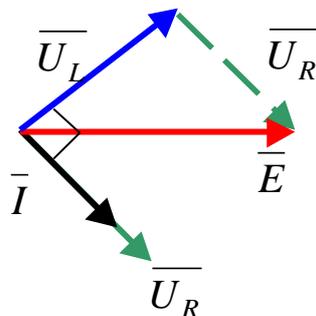


Figura 3.16 - Diagrama vectorial do circuito RL série

Para se obterem as expressões das evoluções temporais das grandezas há que determinar os respectivos vectores girantes (multiplicação das amplitudes complexas por $e^{j\omega t}$) e fazer a sua projecção sobre o eixo dos imaginários.

$$i(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{I}(t)\} = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.45)$$

$$u_R(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{U}_R(t)\} = \frac{\sqrt{2} R E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.46)$$

$$u_L(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{U}_L(t)\} = \frac{\sqrt{2} \omega L E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (3.47)$$

com $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ e $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

As expressões que foram deduzidas admitiram que a tensão que alimenta o circuito tem uma fase inicial nula. Como exercício, poder-se-á resolver o mesmo circuito RL série, admitindo que é a corrente no circuito que tem uma fase inicial nula, isto é $i(t) = I \sin(\omega t)$ representada pela amplitude complexa \bar{I} .

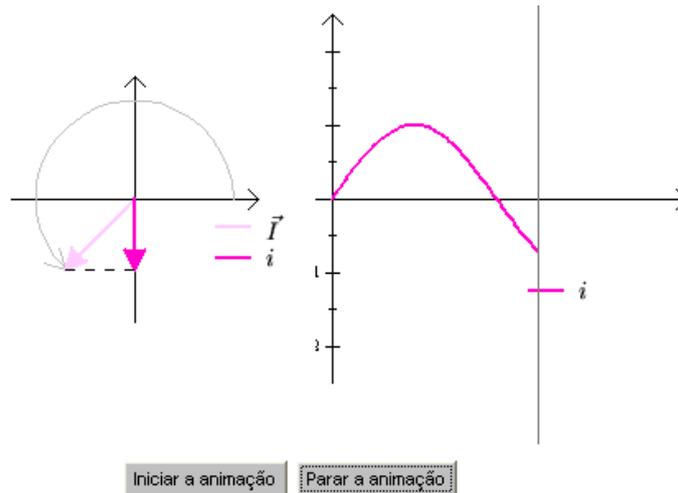


Figura 3.17 - Animação multimédia do vectores girante representativo da corrente num circuito RL série
http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/CircuitosSinusoidal/3_aula.htm

A amplitude complexa \bar{U}_R representando a tensão aos terminais da resistência é colinear com \bar{I} , isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

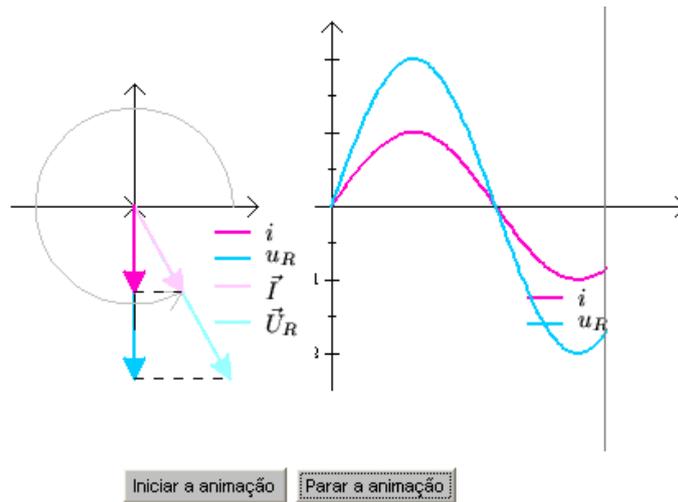


Figura 3.18 - Animação multimédia do vectores girantes representativos da corrente e tensão numa resistência, num circuito RL série

Relativamente à amplitude complexa \bar{U}_L , representativa da tensão aos terminais da indutância, está adiantada $\frac{\pi}{2}$ relativamente \bar{I} , isto é, a tensão aos terminais da indutância está adiantada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

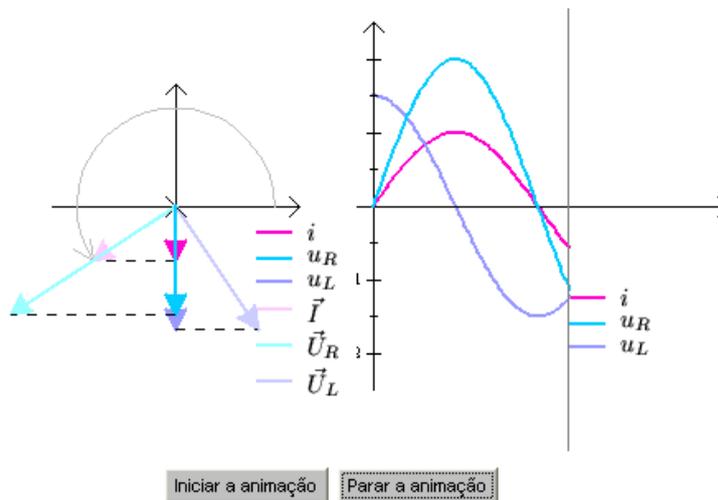


Figura 3.19 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da corrente, da tensão na resistência e da tensão na indutância, num circuito RL série

Finalmente, os diagramas vectorial e temporal que se obtêm são perfeitamente equivalentes aos obtidos quando se considera a tensão de alimentação com fase inicial nula; apenas diferem no instante a que se referem.

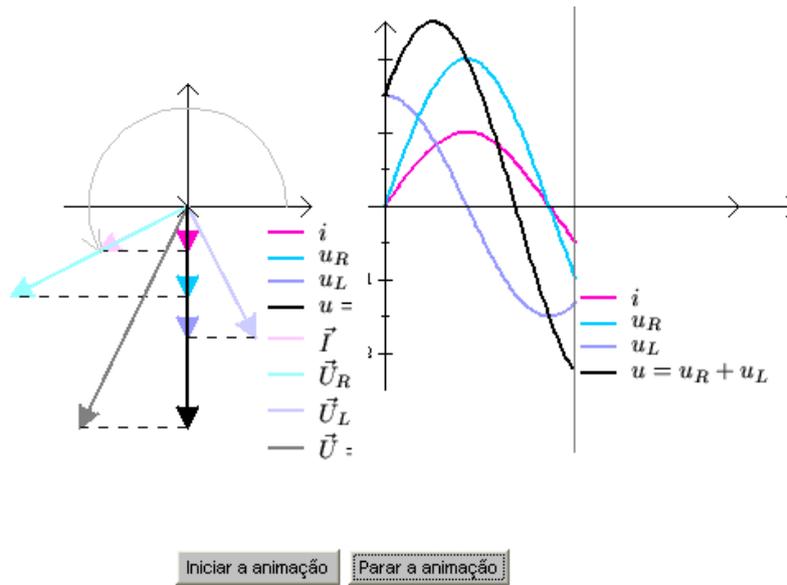


Figura 3.20 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da corrente, da tensão na resistência, da tensão na indutância, e da tensão aos terminais da série RL, num circuito RL série

3.2.4 Circuito RC série

Considere-se o circuito RC série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$

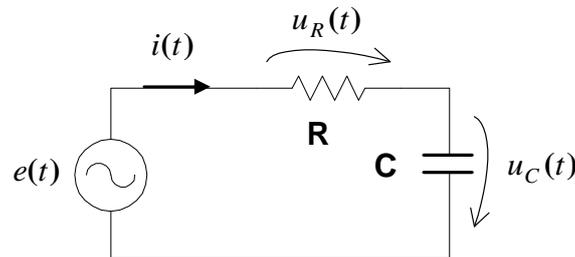


Figura 3.21 - Esquema do circuito RC série

Conhecidos os valores de R e C , pretende determinar-se o regime permanente da evolução temporal da corrente no circuito, $i(t)$, e das tensões aos terminais da resistência, $u_R(t)$, e da capacidade, $u_C(t)$.

Através da Lei das Malhas, a soma da tensão aos terminais da resistência, com a tensão aos terminais da capacidade, igualará a tensão da fonte:

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad (3.48)$$

Em termos de amplitudes complexas a expressão anterior escreve-se:

$$\bar{E} = R \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) \bar{I} \quad (3.49)$$

onde $R - j \frac{1}{\omega C}$ representa a impedância complexa da resistência em série com o condensador; a componente resistiva da impedância é R , enquanto a reactância (componente reactiva) é $-\frac{1}{\omega C}$.

Explicitando \bar{I} na expressão anterior, obtém-se:

$$\bar{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan -\frac{1}{\omega RC} \quad \text{e } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \quad (3.50)$$

O diagrama vectorial das impedâncias, e amplitudes complexas da tensão da fonte e corrente, está representado na figura seguinte.

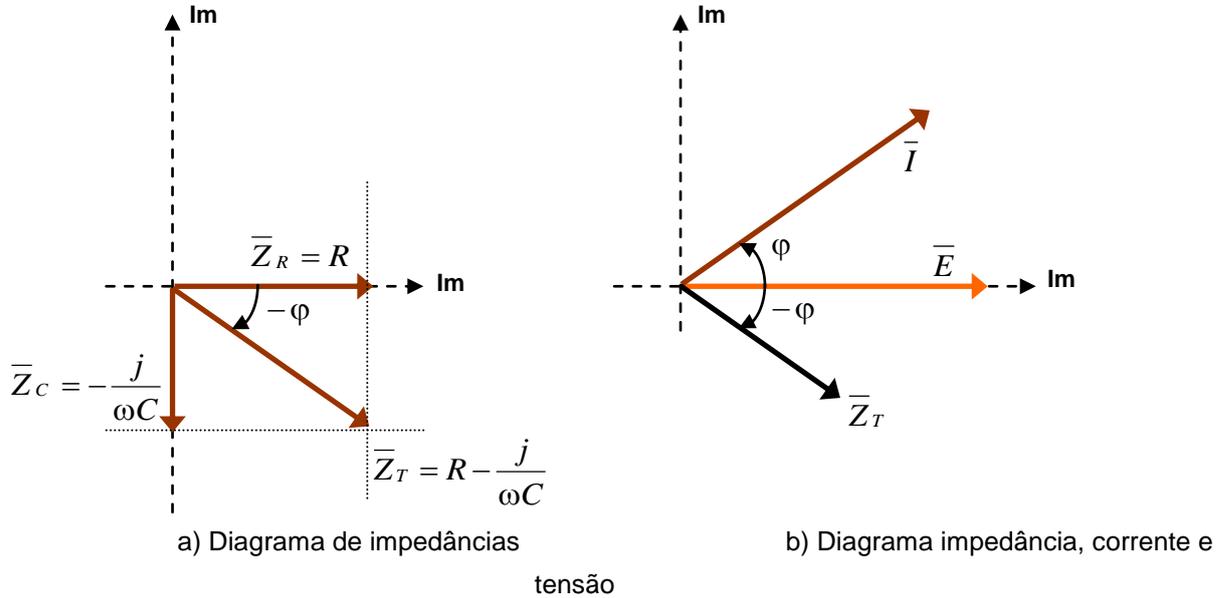


Figura 3.22. Diagrama vectorial circuito RC série.

Uma vez determinada a corrente, é imediato o cálculo das tensões aos terminais dos elementos:

$$\bar{U}_R = R \bar{I} = \frac{R E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} \quad (3.51)$$

A amplitude complexa \bar{U}_R é colinear com \bar{I} , isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

Relativamente à tensão aos terminais da capacidade, tem-se:

$$\bar{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \bar{I} = \frac{1}{\omega C} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - j\frac{\pi}{2}} \quad (3.52)$$

A amplitude complexa \bar{U}_C está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente \bar{I} , isto é, a tensão aos terminais da capacidade está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

O diagrama vectorial completo das tensões e corrente do circuito, encontra-se representado na figura seguinte, onde se evidenciou a lei das Malhas: a soma dos vectores \bar{U}_C e \bar{U}_R iguala o vector \bar{E} .

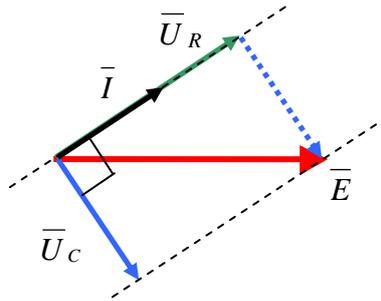


Figura 3.23 - Diagrama vectorial do circuito RC série

Para se obterem as expressões das evoluções temporais das grandezas há que determinar os respectivos vectores girantes (multiplicação das amplitudes complexas por $e^{j\omega t}$) e fazer a sua projecção sobre o eixo dos imaginários.

$$i(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{I}(t)\} = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.53)$$

$$u_R(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{U}_R(t)\} = \frac{\sqrt{2} R E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.54)$$

$$u_L(t) = \text{Im}\{\sqrt{2} \bar{U}_L(t)\} = \frac{\sqrt{2} \omega L E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) \quad (3.55)$$

com $\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$ e $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$

As expressões que foram deduzidas admitiram que a tensão que alimenta o circuito tem uma fase inicial nula. Como exercício, poder-se-á resolver o mesmo circuito RC série, admitindo que é a corrente no circuito que tem uma fase inicial nula, isto é $i(t) = I \sin(\omega t)$ representada pela amplitude complexa \bar{I}

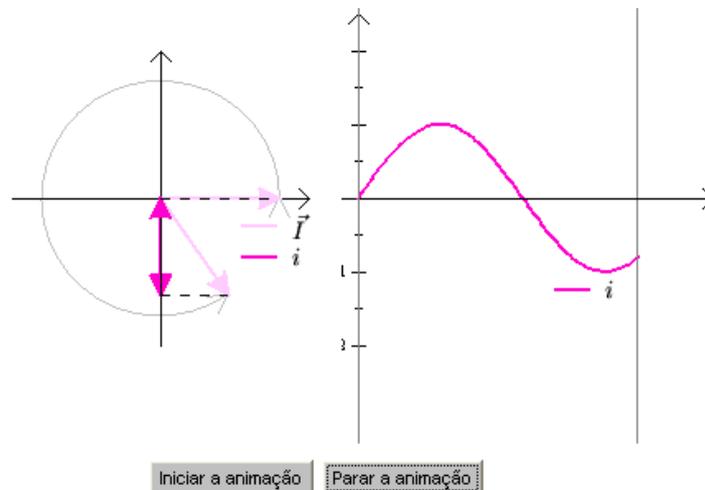


Figura 3.24 - Animação multimédia do vectores girante representativo da corrente num circuito RC série
http://e-lee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/CircuitosSinusoidal/4_aula.htm

A amplitude complexa \bar{U}_R representando a tensão aos terminais da resistência é colinear com \bar{I} , isto é, tensão e corrente aos terminais da resistência, estão em fase.

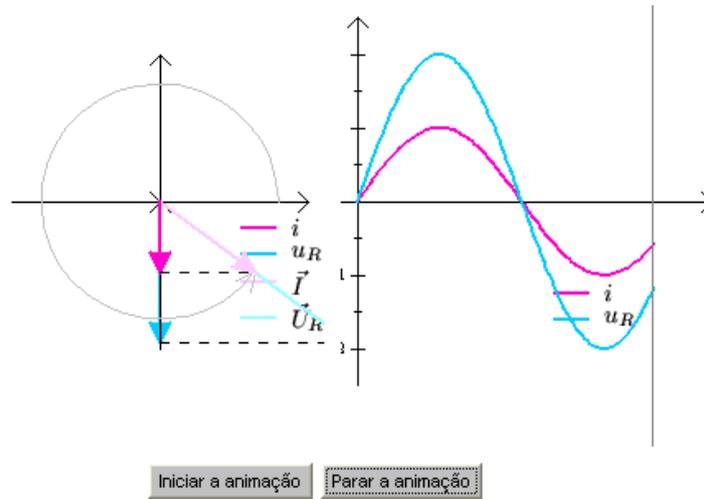


Figura 3.25 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da corrente e tensão numa resistência, num circuito RC série

Relativamente à amplitude complexa \bar{U}_C , representativa da tensão aos terminais da capacidade, está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente \bar{I} , isto é, a tensão aos terminais da capacidade está atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à corrente que a percorre.

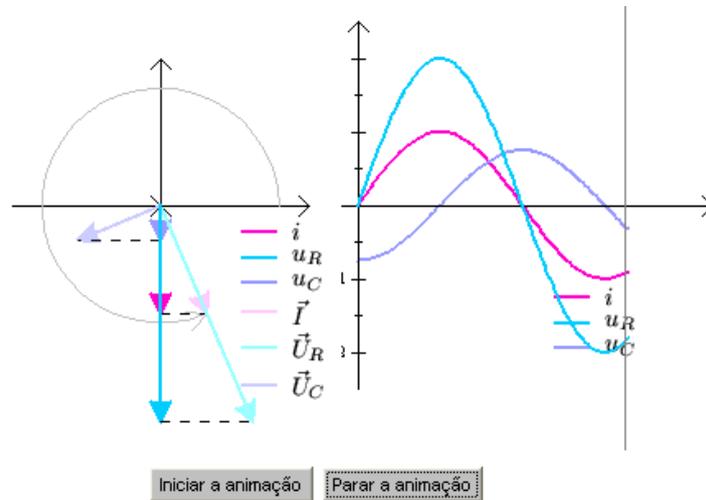


Figura 3.26 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da corrente, da tensão na resistência e da tensão na capacidade, num circuito RC série

Finalmente, os diagramas vectorial e temporal que se obtêm são perfeitamente equivalentes aos obtidos quando se considera a tensão de alimentação com fase inicial nula; apenas diferem no instante a que se referem.

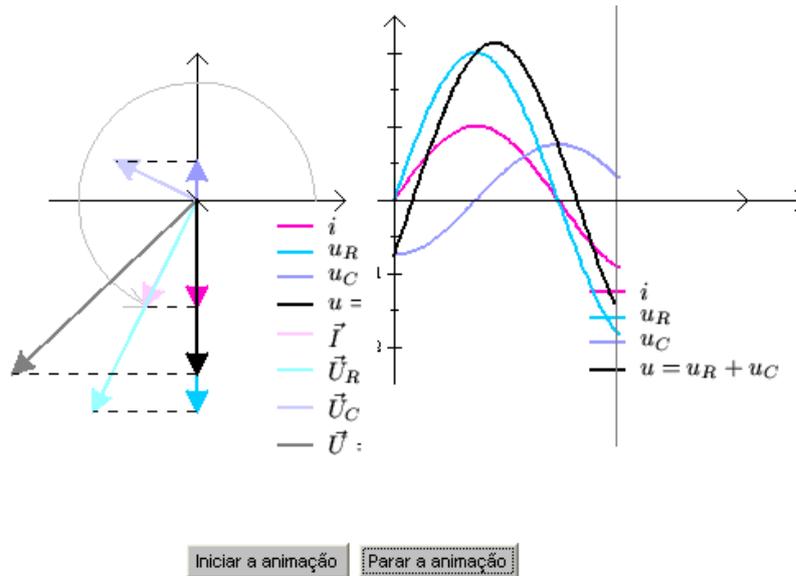


Figura 3.27 - Animação multimédia dos vectores girantes representativos da corrente, da tensão na resistência, da tensão na capacidade, e da tensão aos terminais da série RC, num circuito RC série

3.3 Potências

3.3.1 Potência Instantânea

Considere-se o dipolo representado na figura, onde os sentidos de referência da corrente e tensão se apresentam segundo a convenção receptor.

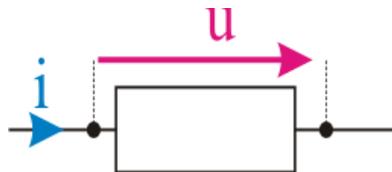


Figura 3.28. Dipolo eléctrico; convenção receptor.

Sendo a tensão e a corrente grandezas alternadas sinusoidais descritas pelas expressões:

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{e} \quad i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Define-se como **potência instantânea**, $p(t)$, o produto do valor instantâneo da tensão pelo valor instantâneo da corrente:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) i(t) \\ &= \frac{U_M I_M}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{U_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned} \quad (3.56)$$

A potência instantânea é expressa em watts [W]

Atendendo a que as grandezas são alternadas sinusoidais e portanto os seus valores máximos e eficazes são:

$$U_M = \sqrt{2} U_{ef} \quad \text{e} \quad I_M = \sqrt{2} I_{ef} \quad (3.57)$$

A potência instantânea pode ser reescrita na forma:

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad (3.58)$$

onde se realça a importância dos valores eficazes das grandezas alternadas sinusoidais na transmissão de potência.

Com base na expressão anterior, pode afirmar-se que a potência instantânea é representada por uma componente sinusoidal de amplitude $U_{ef} I_{ef}$ e que oscila com uma frequência angular dupla da tensão e corrente, $U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$, em torno de um valor médio representado por, $U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$.

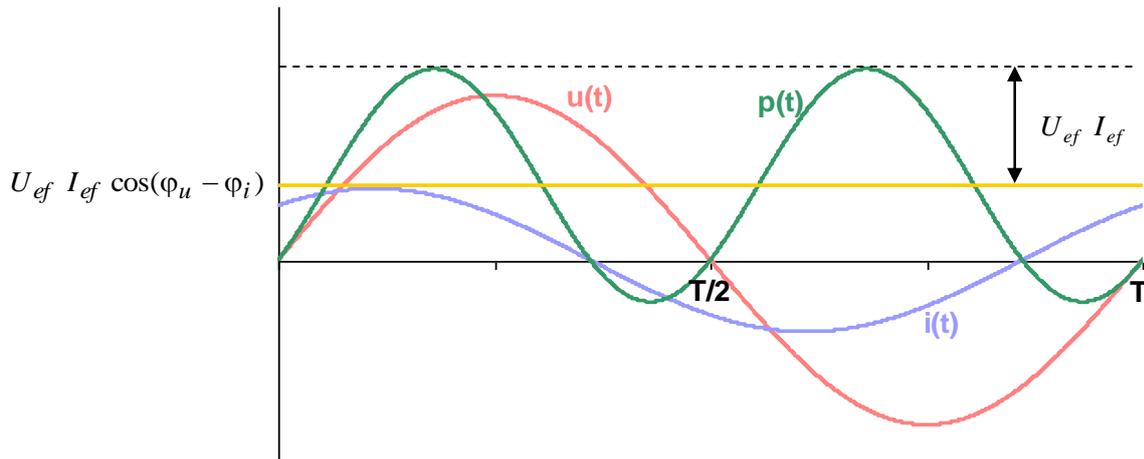


Figura 3.29. Diagrama temporal da tensão, corrente e potência instantânea.

Define-se **potência activa** ou **potência real**, P , como o valor médio da potência instantânea.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (3.59)$$

A potência activa também se expressa em watts [W]

3.3.2 Potência Complexa

Fazendo uso das amplitudes complexas da tensão e corrente de um dipolo, define-se **potência complexa**, \bar{S} , o produto da amplitude complexa eficaz da tensão pelo conjugado da amplitude complexa eficaz da corrente.

$$\bar{S} = \bar{U}_{ef} \bar{I}_{ef}^* \quad (3.60)$$

onde \bar{I}_{ef}^* representa o complexo conjugado de \bar{I}_{ef} .

Sendo as amplitudes complexas eficazes:

$$U_{ef} e^{j\varphi_u} \quad \text{e} \quad I_{ef} e^{j\varphi_i} \quad (3.61)$$

A potência complexa pode ser escrita na forma:

$$\bar{S} = U_{ef} I_{ef} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi + j U_{ef} I_{ef} \sin \varphi \quad (3.62)$$

onde $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

É possível identificar na expressão anterior, a potência activa (ou real), P , definida na secção anterior; por

analogia, define-se a **potência reactiva** (ou imaginária) e representa-se por Q :

$$Q = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi \quad (3.63)$$

A potência reactiva expressa-se em volt ampere reactivo [var].

A potência complexa pode, então, ser reescrita na forma:

$$\bar{S} = P + jQ \quad (3.64)$$

e representada graficamente pelo designado **triângulo de potências**, representado na figura seguinte.

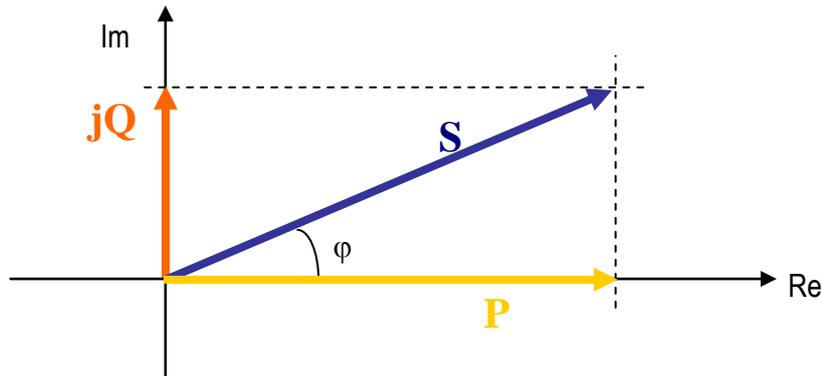


Figura 3.30. Triângulo de potências.

Saliente-se que tanto a potência activa P , quanto a potência reactiva Q , assumem valores reais; apenas a potência complexa assume valores no conjunto dos números complexos.

Os vectores que representam as potências activa, reactiva e complexa não são vectores girantes pois a sua evolução no tempo não é sinusoidal; para uma dada corrente e tensão sinusoidais (que podem ser representadas por vectores girantes), as potências activa, reactiva e complexa assumem valores constantes (que não são representadas por vectores girantes).

O módulo da potência complexa, $U_{ef} I_{ef}$, designa-se por **potência aparente**, representa-se por S e expressa-se em volt ampere [VA].

O **factor de potência**, fp , é definido como a razão entre a potência activa e a potência aparente.

$$fp = \frac{P}{S} \quad (3.65)$$

O factor de potência é uma grandeza adimensional e, apenas no caso de regimes sinusoidais, tem um valor idêntico a $\cos \varphi$.

NOTA

Atendendo à relevância dos valores eficazes (e não dos valores máximos) e de forma a simplificar a escrita das expressões, suprimir-se-á, a partir daqui, o índice $_{ef}$ para denotar um valor eficaz. Assim, a notação X passará a representar o valor eficaz da grandeza x e não X_{ef} como até aqui. Se se tratar de uma grandeza alternada sinusoidal, a sua amplitude máxima será, de acordo com (3.6), $X_M = \sqrt{2} X$.

A tabela seguinte resume algumas expressões relativas às grandezas definidas nesta secção.

Potência Complexa	\bar{S}	$\bar{U} \bar{I}^*$	-	-
Potência Aparente	S	$U I = \sqrt{P^2 + Q^2}$	volt ampere	[VA]
Potência Activa	P	$\text{Re}\{\bar{S}\} = S \cos \varphi = U I \cos \varphi$	watt	[W]
Potência Reactiva	Q	$\text{Im}\{\bar{S}\} = S \sin \varphi = U I \sin \varphi$	volt ampere reactivo	[var]
Factor de Potência	f_p	$\frac{P}{S}$	-	-

3.3.3 Potência em Elementos Ideais

3.3.3.1 Resistência

No caso particular de uma resistência, tensão e corrente aos seus terminais estão em fase pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \quad (3.66)$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = U I - U I \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad (3.67)$$

cujo valor médio (potência activa) é:

$$P = U I \quad (3.68)$$

Como a expressão que relaciona a tensão e corrente numa resistência é

$$u(t) = R i(t) \quad (3.69)$$

também se terá, atendendo ao conceito de valor eficaz,

$$U = R I \quad (3.70)$$

pelo que a expressão para a potência instantânea pode tomar a forma

$$p(t) = R I^2 - R I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (3.71)$$

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa absorvidas por uma resistência, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

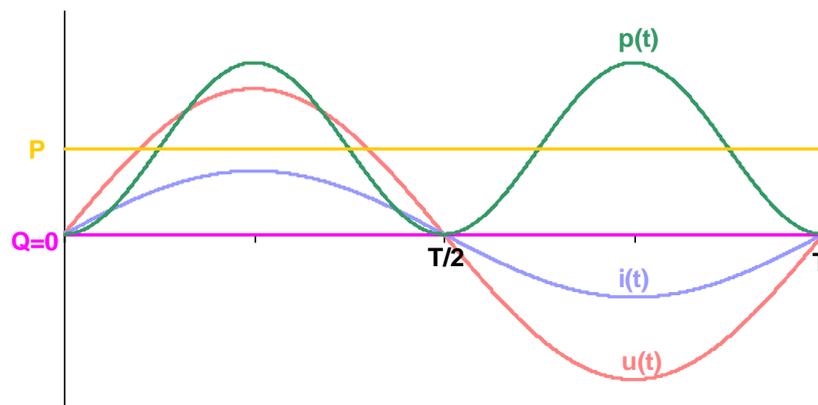


Figura 3.31. $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma resistência.

Como no caso da resistência se tem $\varphi = 0$, obtém-se:

$$\bar{S} = U I e^{j0} = U I \quad (3.72)$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = U I \quad (3.73)$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 0 \quad (3.74)$$

$$fp = \frac{P}{S} = 1 \quad (3.75)$$



Figura 3.32. Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma resistência.

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a resistência absorve potência activa (de valor numericamente igual à potência aparente). Uma resistência não absorve potência reactiva.

3.3.3.2 Indutância

No caso particular de uma indutância, a corrente encontra-se atrasada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à tensão, pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \quad (3.76)$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = -U I \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \frac{\pi}{2}) \quad (3.77)$$

cujo valor médio é nulo.

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa, absorvidas por uma indutância, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

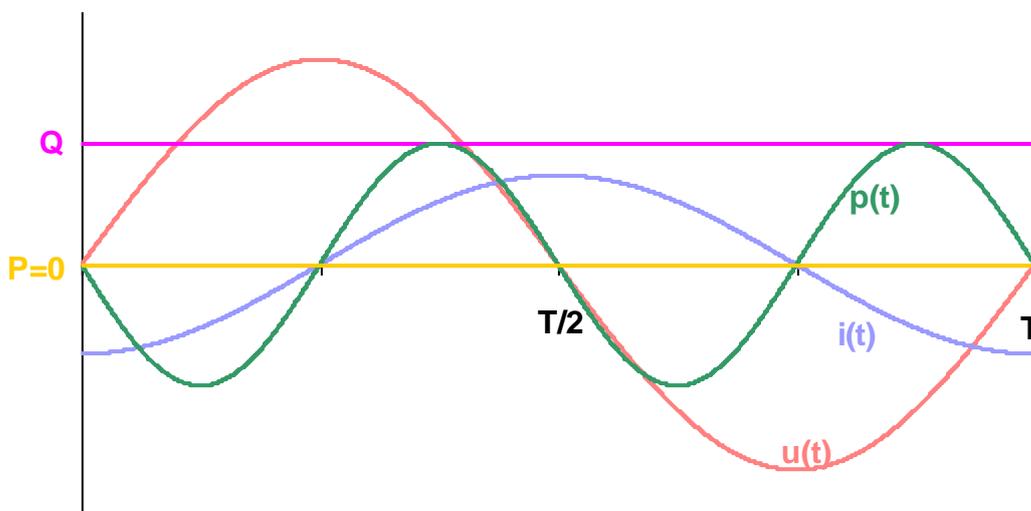


Figura 3.33. $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma indutância.

Como para o caso da indutância se tem $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\bar{S} = U I e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jU I \quad (3.78)$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 0 \quad (3.79)$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = U I \quad (3.80)$$

$$f_p = \frac{P}{S} = 0 \quad (3.81)$$

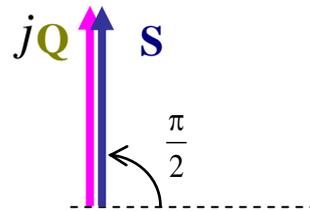


Figura 3.34. Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma indutância.

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a indutância absorve potência reactiva (de valor numericamente igual à potência aparente). Uma indutância não absorve potência activa.

3.3.3.3 Capacidade

No caso particular de uma capacidade, a corrente encontra-se avançada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à tensão, pelo que:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (3.82)$$

Sendo a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = -U I \cos(2\omega t + 2\varphi_u + \frac{\pi}{2}) \quad (3.83)$$

cujo valor médio é nulo.

Graficamente, a evolução temporal da tensão, corrente, potência instantânea e potência activa, absorvidas por uma capacidade, encontram-se representados na figura seguinte, onde se considerou $\varphi_u = 0$.

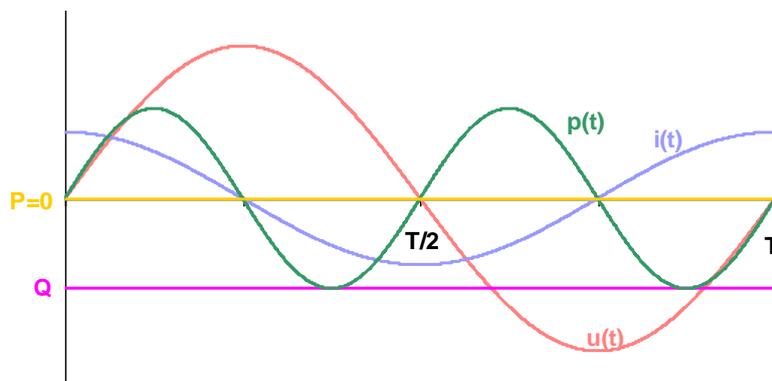


Figura 3.35. $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, P e Q absorvidas por uma capacidade.

Como para o caso da capacidade se tem $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

$$\bar{S} = U I e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 - jU I \quad (3.84)$$

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 0 \quad (3.85)$$

$$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = -U I \quad (3.86)$$

$$f_p = \frac{P}{S} = 0 \quad (3.87)$$

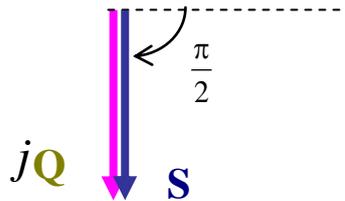


Figura 3.36. Diagrama vectorial das potências absorvidas por uma capacidade.

Como se considerou a convenção receptor para o dipolo, conclui-se que a capacidade absorve potência reactiva negativa (de valor numericamente igual à potência aparente), o que significa que a capacidade fornece potência reactiva. Uma capacidade não absorve nem fornece potência activa.

3.3.4 Circuito RL Série

Considere-se o circuito *RL* série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$

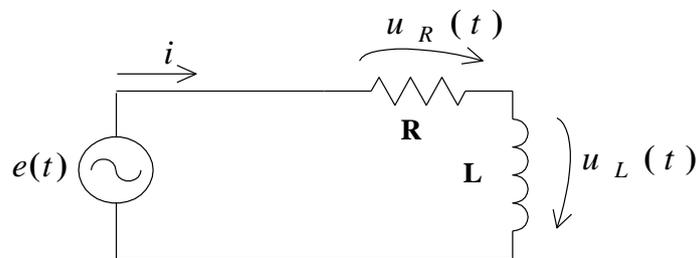


Figura 3.37. Esquema do circuito RL série.

Conhecidos os valores de *R* e *L*, determinaram-se já (ver Circuito RL série) as expressões da impedância total do circuito e da corrente que ele absorve em regime permanente, considerando que a amplitude complexa eficaz da tensão tem uma fase nula na origem, isto é, $\bar{E} = E e^{j0}$, a amplitude complexa eficaz da corrente será:

$$\bar{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} = I e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad \text{e } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (3.88)$$

A potência complexa deste circuito (isto é, a potência que a fonte deverá apresentar para alimentar este circuito) será dada por

$$\bar{S} = \bar{E} (\bar{I})^* \quad (3.89)$$

Atendendo às amplitudes complexas da tensão e da corrente, a potência complexa é dada por

$$\bar{S} = (E e^{j0}) (I e^{-j\varphi})^* = E I e^{j\varphi} \quad (3.90)$$

Pelo que as potências activa, reactiva e aparente são:

$$P = E I \cos \varphi \quad (3.91)$$

$$Q = E I \sin \varphi \quad (3.92)$$

$$S = E I \quad (3.93)$$

Como $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, todas estas potências assumem valores positivos.

Conhecendo as amplitudes complexas eficazes das tensões aos terminais de cada elemento, \bar{U}_R e \bar{U}_L (ver Circuito RL série), pode calcular-se a potência de cada um dos elementos do circuito (elemento R e elemento L).

Sendo $\bar{U}_R = \frac{R E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} = U_R e^{-j\varphi}$, a potência complexa associada à resistência é:

$$\begin{aligned} \bar{S}_R &= \left(\frac{R E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} \right) (I e^{-j\varphi})^* = \\ &= E I \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j0} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Como $\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \cos \varphi$ (ver Figura 3.15 de Circuito RL série), conclui-se que:

$$\bar{S}_R = E I \cos \varphi = P \quad (3.95)$$

Isto é, a potência activa em jogo no circuito está apenas associada à presença da resistência.

Analogamente, para a bobine tem-se $\bar{U}_L = \frac{\omega L E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi + j\frac{\pi}{2}} = U_L e^{-j\varphi + j\frac{\pi}{2}}$. Pelo que a

potência complexa associada à bobine é:

$$\begin{aligned} \bar{S}_L &= \left(\frac{\omega L E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi + j\frac{\pi}{2}} \right) (I e^{-j\varphi})^* = \\ &= E I \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Como $\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \sin \varphi$ (ver Figura 3.15 de Circuito RL série), conclui-se que:

$$\bar{S}_L = E I \sin \varphi = Q \quad (3.97)$$

Isto é, a potência reactiva em jogo no circuito está apenas associada à presença da bobine.

Como num **circuito RL série** $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, isto é, a impedância complexa é representada por um vector no 1º Quadrante, a **potência reactiva assume valores positivos**; o circuito consome energia reactiva da fonte de tensão.

3.3.5 Circuito RC Série

Considere-se o circuito *RC* série alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal cuja tensão é descrita pela expressão $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$

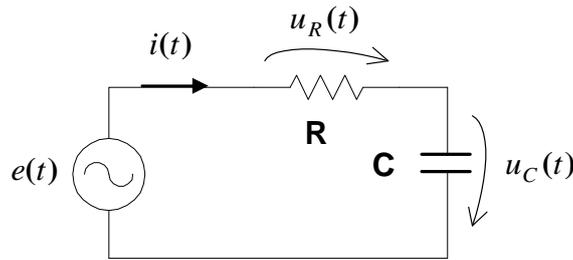


Figura 3.38. Esquema do circuito RC série.

Conhecidos os valores de *R* e *C*, determinaram-se já (ver Circuito RC série) as expressões da impedância total do circuito e da corrente que ele absorve em regime permanente, considerando que a amplitude complexa eficaz da tensão tem uma fase nula na origem, isto é, $\bar{E} = E e^{j0}$, a amplitude complexa eficaz da corrente será:

$$\bar{I}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} = I e^{-j\varphi} \quad \text{com } \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \quad \text{e } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

A potência complexa deste circuito (isto é, a potência que a fonte deverá apresentar para alimentar este circuito) será dada por

$$\bar{S} = \bar{E} (\bar{I})^* \quad (3.98)$$

Atendendo às amplitudes complexas da tensão e da corrente, a potência complexa é dada por

$$\bar{S} = (E e^{j0}) (I e^{-j\varphi})^* = E I e^{j\varphi} \quad (3.99)$$

Pelo que as potências activa, reactiva e aparente são:

$$P = E I \cos \varphi \quad (3.100)$$

$$Q = E I \sin \varphi \quad (3.101)$$

$$S = E I \quad (3.102)$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, as potências *P* e *S* assumem valores positivos mas a potência *Q* assume um valor negativo.

Conhecendo as amplitudes complexas das tensões aos terminais de cada elemento, \bar{U}_R e \bar{U}_C (ver

Circuito RC série), pode calcular-se a potência de cada um dos elementos do circuito (elemento R e elemento C).

Sendo $\bar{U}_R = \frac{R E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} = U_R e^{-j\varphi}$, a potência complexa associada à resistência é:

$$\begin{aligned} \bar{S}_R &= \left(\frac{R E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi} \right) (I e^{-j\varphi})^* = \\ &= E I \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{j0} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Como $\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \cos \varphi$ (ver Figura 3.22 de Circuito RC série), conclui-se que:

$$\bar{S}_R = E I \cos \varphi = P \quad (3.104)$$

Isto é, a potência activa em jogo no circuito está apenas associada à presença da resistência.

Analogamente, para o condensador tem-se:

$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - j\frac{\pi}{2}} = U_C e^{-j\varphi - j\frac{\pi}{2}} \quad (3.105)$$

Pelo que a potência complexa associada ao condensador é:

$$\begin{aligned} \bar{S}_C &= \left(\frac{1}{\omega C} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - j\frac{\pi}{2}} \right) (I e^{-j\varphi})^* = \\ &= E I \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Como $\frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \sin \varphi$ (ver Figura 3.22 de Circuito RC série), conclui-se que:

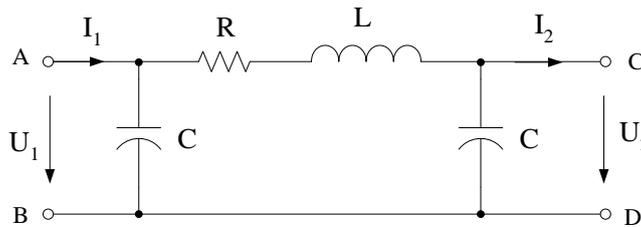
$$\bar{S}_C = E I \sin \varphi = Q \quad (3.107)$$

Isto é, a potência reactiva em jogo no circuito está apenas associada à presença do condensador.

Como num **circuito RC série** $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, isto é, a impedância complexa é representada por um vector no 4º Quadrante, a **potência reactiva assume valores negativos**; o circuito fornece energia reactiva à fonte de tensão.

Exemplo

Considere o circuito da figura onde $R=1\Omega$, $L=10mH$ e $C=16\mu F$



Aos terminais AB é aplicada uma fonte de tensão alternada sinusoidal de frequência igual a 50Hz e de valor eficaz igual a 10kV.

- a) Determine o valor da amplitude complexa da tensão U2 que se verifica entre os terminais CD quando a corrente I2 for nula.
- b) Colocando uma resistência R_2 de 100Ω aos terminais CD determine:
 - b1) as amplitudes complexas das correntes nos ramos deste circuito.
 - b2) o valor eficaz da tensão aos terminais da resistência de 100Ω .

Resolução

a) Como a corrente I_2 é nula, as impedâncias R, L e C encontram-se em série; a impedância equivalente desta série é $\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 1 - j196$

E a corrente que percorre estes elementos é: $\bar{I}_{RLC} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}} = 0,26 + j51$

A tensão U2 pedida é a tensão aos terminais do condensador, pelo que será: $\bar{U}_2 = \bar{Z}_C \bar{I}_{RLC} = 10160 - j51,89$ $|\bar{U}_2| = 10160$ V

b1) A impedância equivalente do paralelo de C com R_2 é:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_C R_2}{\bar{Z}_C + R_2} = 79,8 - j40,13$$

A impedância equivalente da série de R, L e \bar{Z}_1 é:

$$\bar{Z}_2 = R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_1 = 80,83 - j37$$

A impedância equivalente do paralelo de C com

$$\bar{Z}_2 \text{ é: } \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_C \bar{Z}_2}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_2} = 51,44 - j48,8$$

A corrente \bar{I}_1 será então: $\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_3} = 102,3 + j97$

A corrente no condensador de entrada é:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_C} = 0 + j50,27$$

A corrente no ramo RL é: $\bar{I}_{RL} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = 102 + j46,8$

A corrente \bar{I}_2 é:
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + R_2} \bar{I}_{RL} = 100,45 - j3,7$$

A corrente no condensador de saída é:

$$\bar{I}_{C2} = \frac{R_2}{\bar{Z}_C + R_2} \bar{I}_{RL} = 1,85 - j50,49$$

b2) $\bar{U}_2 = R_2 \bar{I}_2 = 10045 - j368 \Rightarrow |\bar{U}_2| = 10052 \text{ V}$

3.3.6 Exercícios

Outros exercícios em:

<http://elee.ist.utl.pt/realisations/CircuitsElectriques/RegimeSinusoidal/Potencias/Exercicios/Exercicios.htm>

3.4 Compensação do factor de potência

3.4.1 Introdução

Os motores e grande parte das cargas alimentadas pelas redes de energia eléctrica, são cargas de carácter indutivo, isto é, para além de consumirem energia activa, também são consumidores de energia reactiva.

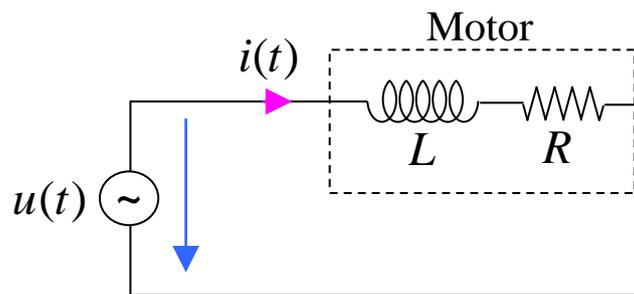


Figura 3.39 - Representação esquemática de um motor monofásico alimentado em corrente alternada

Em termos de diagrama vectorial, tem-se:

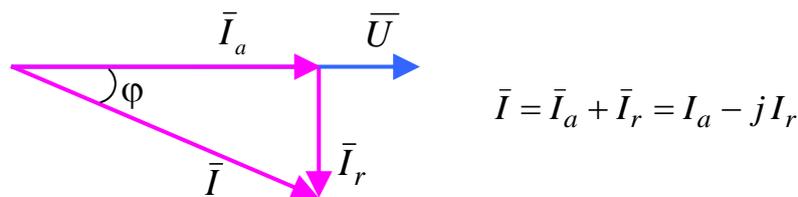


Figura 3.40 - Diagrama vectorial do esquema da Figura 1

sendo \bar{I}_a a componente activa da corrente e \bar{I}_r a componente reactiva. A presença da componente reactiva (devida à indutância) faz com que tensão e corrente aos terminais da fonte não estejam em fase; a corrente está atrasada φ relativamente à tensão.

A fonte que alimenta este motor deverá ser capaz de fornecer as potências:

$$\begin{aligned} P &= U I \cos \varphi = U I_a \\ Q &= U I \sin \varphi = U I_r \end{aligned} \tag{3.108}$$

ou seja, deverá ter, pelo menos, uma potência aparente de:

$$S = U I \tag{3.109}$$

e ser capaz de fornecer uma corrente de amplitude eficaz I .

Caso a fonte não tivesse de fornecer a energia reactiva (devida à presença da indutância), poderia ter uma potência aparente de apenas:

$$S' = U I_a = U I \cos \varphi \quad (3.110)$$

fornecendo uma corrente de amplitude eficaz $I_a = I \cos \varphi$

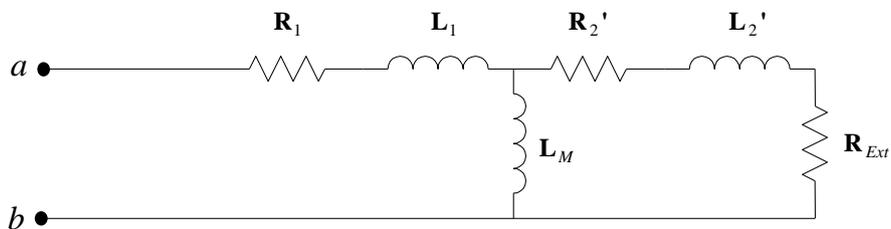
Esta solução é possível e implementa-se através da introdução, no circuito, de um condensador; este procedimento é conhecido por compensação do factor de potência.

Os inconvenientes de não se proceder à compensação do factor de potência são:

- as fontes de energia eléctrica (os geradores das centrais eléctricas) e as linhas ao terem de produzir e transportar energia reactiva têm, forçosamente, de diminuir a energia activa produzida ou transportada, de forma a não ultrapassarem a sua potência aparente nominal, uma vez que $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$;
- as linhas de transmissão têm maiores perdas pois, como não são ideais (resistência nula), mas antes caracterizadas por uma impedância não nula, as perdas associadas serão tanto maiores quanto maior for a corrente que as percorre ($|\bar{I}| > |\bar{I}_a|$);
- as quedas de tensão nas linhas são maiores pela mesma razão indicada no ponto anterior.

3.4.2 Exercícios

1. Considere o circuito da figura, alimentado a partir de uma rede alternada 230V/400V, 50 Hz: Determine:

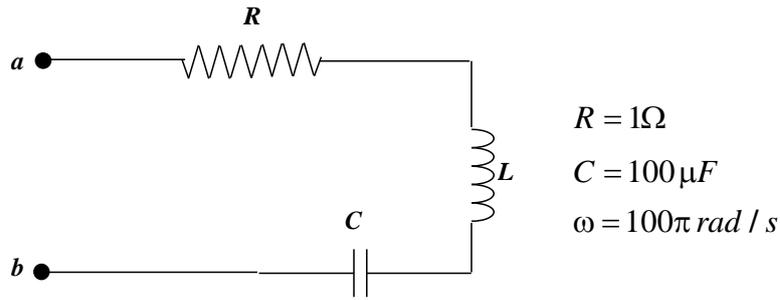


$$R_1 = R_2' = 0,5 \, \Omega \quad L_1 = 5\text{mH} \quad L_2' = 4\text{mH} \quad L_M = 50 \text{mH} \quad R_{Ext} = 10 \, \Omega$$

- a impedância equivalente do circuito, observada a partir dos terminais **ab**;
- a corrente e as potências activa e reactiva fornecidas pela fonte;

(Soluções: a) $\bar{Z} = 9,75 e^{j44} \, \Omega$ b) $\bar{I} = 23,6 e^{-j44} \, \text{A}$, $P = 3 \, 909 \, \text{W}$ $Q = 3 \, 773 \, \text{VAR}$)

2. Considere o seguinte circuito. Determine o valor da indutância L da bobina, para o qual é nula a energia reactiva consumida aos terminais **ab**. Justifique.



(Solução: $L = 101 \text{ mH}$)

3.4.3 Sistema monofásico – Compensação total

No caso de um sistema monofásico, a compensação do factor de potência efectua-se com a montagem de um condensador em paralelo com a carga (e, portanto, com a fonte), tal como esquematizado na Figura 3.41

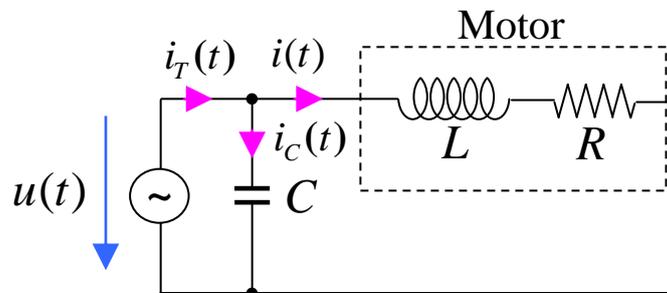


Figura 3.41 - Representação esquemática de um motor monofásico alimentado em corrente alternada, com condensador de compensação de factor de potência

O valor da capacidade C deverá ser dimensionado para que o respectivo diagrama vectorial seja:

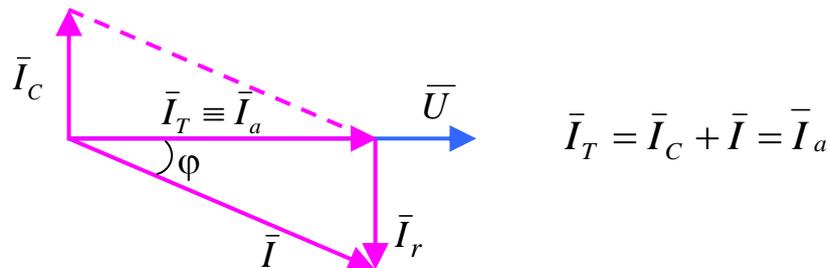


Figura 3.42 - Diagrama vectorial do esquema da Figura 3

A corrente do condensador deverá compensar totalmente a componente reactiva do motor. A corrente absorvida pelo motor, \bar{I} , não sofre qualquer alteração. As alterações residem na corrente fornecida pela fonte que, para além de ter diminuído a sua amplitude eficaz de I para $I \cos \varphi$ (reduzindo, assim, as perdas e as quedas de tensão nas linhas), também passou a estar em fase com a tensão na fonte (a fonte deixou de fornecer energia reactiva). A potência activa que a fonte fornece não sofreu qualquer alteração, porque a corrente da fonte é exactamente igual à componente activa da corrente antes da compensação.

Com a introdução do condensador, procedeu-se à **compensação total do factor de potência**; do ponto de vista da fonte de energia, é como se o conjunto Motor+Condensador se comportasse como uma carga resistiva; é como se o condensador fornecesse toda a energia reactiva que o motor necessita absorver

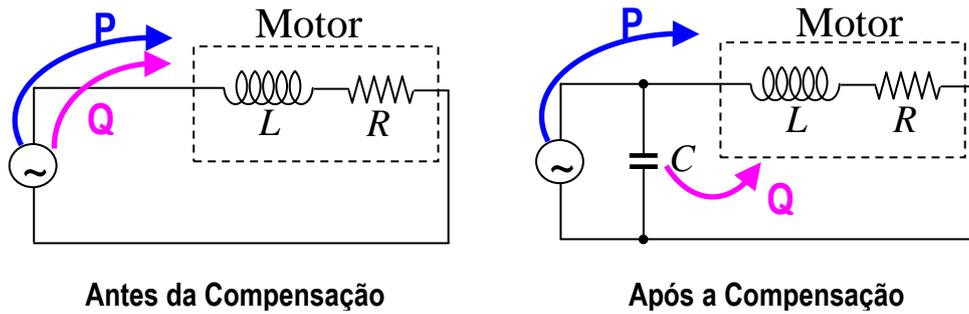


Figura 3.43 - Representação esquemática das potências activa e reactiva antes e após a compensação

A potência reactiva absorvida pelo motor é:

$$Q = U I \sin \varphi \quad (3.111)$$

Como a potência reactiva fornecida pelo condensador, Q_C , (ver § 3.3.3.3 - Potência em Elementos Ideais - Condensador) é:

$$Q_C = U I_C = \omega C U^2 \quad (3.112)$$

a igualdade entre estas duas potências conduz a:

$$C = \frac{I \sin \varphi}{\omega U} \quad (3.113)$$

que deverá ser a capacidade do condensador para compensar totalmente o factor de potência.

3.4.4 Sistema monofásico – Compensação parcial

Os regulamentos não impõem a necessidade de uma compensação total do factor de potência, limitando-se a impor um valor mínimo para o factor de potência ($\cos \varphi_f$).

Para uma compensação parcial do factor de potência, partindo de um sistema que consome um determinado conjunto de valores iniciais de S_i , P_i , Q_i e $\cos \varphi_i < \cos \varphi_f$, pretende manter-se a potência activa solicitada ao distribuidor de energia eléctrica, P_i , e, através da instalação de um condensador com um valor C na entrada da nossa instalação, conseguir solicitar à rede um valor menor de potência reactiva final, Q_f , que assegure um valor de $\cos \varphi_f$

Partindo do valor de potência activa pretendida, P_i , e impondo $\cos \varphi_f$, obtêm-se o valor final da potência aparente, a solicitar à rede:

$$S_f = \frac{P_i}{\cos \varphi_f} \quad (3.114)$$

assim, como o respectivo valor da potência reactiva:

$$Q_f = S_f \sin(\varphi_f) \quad (3.115)$$

A diferença entre Q_i e Q_f deverá ser fornecida pelo condensador:

$$Q_C = \Delta Q = Q_i - Q_f \quad (3.116)$$

Deste modo, será possível calcular o valor de C , tal que:

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega U^2} \quad (3.117)$$

3.4.5 Exercício

Exemplo 1.

Uma carga alimentada por uma tensão de 230 V, 50 Hz, consome uma potência activa de 44 kW e uma potência reactiva de 52,4 kvar. Determine a potência reactiva da bateria de condensadores, para que o factor de potência seja compensado para 0,85 indutivo.

Resolução

Considere-se que após a compensação, a carga vai consumir da rede as potências finais P_f e Q_f e o factor de potência final será $\cos \varphi_f = 0,85 \Rightarrow \varphi_f = 31,8^\circ$

Como a potência activa não se altera com a compensação, será então $P_i = P_f$ e

$$Q_f = S_f \sin \varphi_f = P_f \tan \varphi_f = P_i \tan \varphi_f$$

Pelo que: $Q_f = 44000 \times \tan 31,8 = 27281 \text{ var}$

A potência reactiva fornecida pelos condensadores deverá então ser:

$$\Delta Q_C = Q_i - Q_f = 52400 - 27281 = 25119 \text{ var}$$

Exemplo 2.

Determine a capacidade do condensador necessário para a resolução da alínea anterior.

Resolução

A tensão aos terminais do condensador é $U = 230 \text{ V}$, pelo que será:

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega U^2}$$

Substituindo valores, obtém-se:

$$C = \frac{25119}{2\pi 50 \times 230^2} = 1509 \times 10^{-6} = 1,5 \text{ mF}$$

Capítulo 4 Sistemas Trifásicos

Neste capítulo apresentam-se os conceitos básicos dos sistemas trifásicos. Define-se sistema equilibrado e demonstram-se algumas das características deste tipo de sistemas. Mostra-se que um sistema trifásico pode ser entendido como um conjunto de 6 sistemas monofásicos e define-se o conceito de tensão simples e tensão composta.

4.1 Conceitos Básicos

4.1.1 Definição

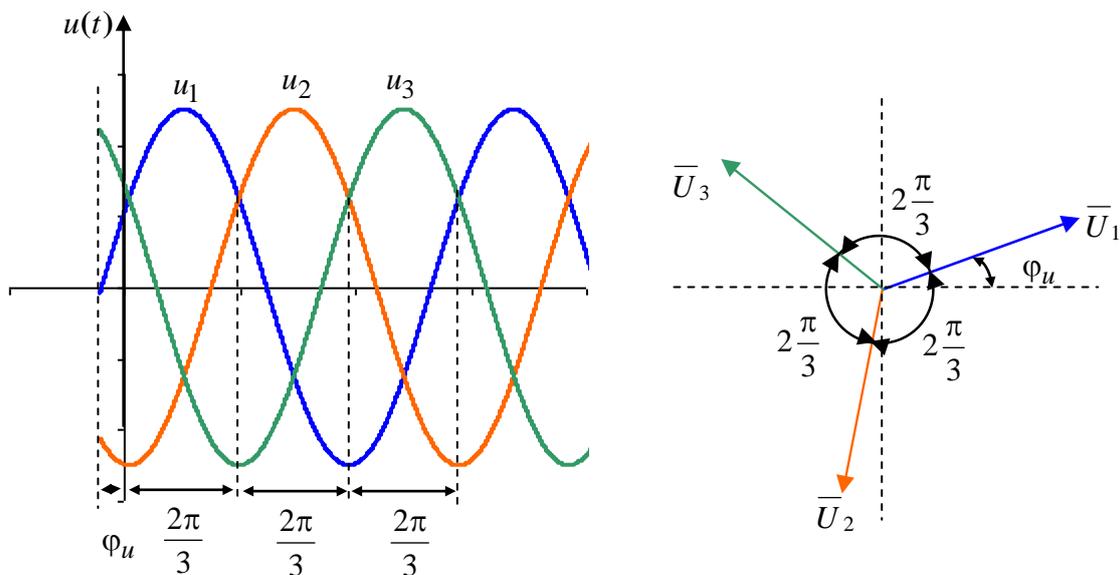
Os sistemas alternados sinusoidais são de particular importância na electrotecnia pois constituem a maior parte dos sistemas de produção e transporte de energia eléctrica.

Um sistema trifásico de tensões alternadas sinusoidais fica completamente especificado pela sua frequência angular, $\omega = 2\pi f$, ou pelo seu período, T , pela amplitude máxima, U_M , ou pelo valor eficaz dessa amplitude, U , e pela fase na origem, φ_u . É descrito pelo conjunto de equações:

$$\begin{cases} u_1(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_u) \\ u_2(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_u - 2\frac{\pi}{3}) \\ u_3(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_u - 4\frac{\pi}{3}) \end{cases} \quad (4.1)$$

Em notação complexa o sistema de equações toma a forma:

$$\begin{cases} \bar{U}_1(t) = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \varphi_u)} \\ \bar{U}_2(t) = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \varphi_u - 2\frac{\pi}{3})} \\ \bar{U}_3(t) = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \varphi_u - 4\frac{\pi}{3})} \end{cases} \quad (4.2)$$



(a) Evolução temporal (b) Diagrama vectorial das amplitudes complexas

Figura 4.1. Sistema trifásico de tensões alternadas sinusoidais.

Cada uma das grandezas deste sistema é designada por **fase** e a sua sequência temporal determina a sua numeração.

A sequência de fases 123 é designada por **sequência positiva** e a sequência 132, por **sequência negativa**.

4.1.2 Sistema Equilibrado

O sistema trifásico diz-se que é **equilibrado** porque são idênticas entre si as amplitude das 3 fases, assim como o desfasamento entre elas. Quando tal não acontece, designa-se por sistema trifásico **desequilibrado**.

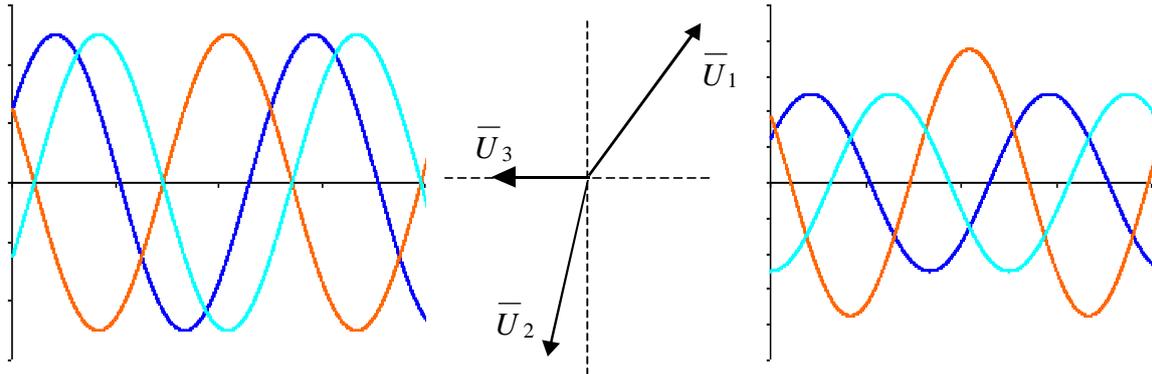


Figura 4.2. Diagramas de exemplos de sistemas trifásicos desequilibrados.

Uma das características dos sistemas trifásicos equilibrados é a soma das tensões das fases ser nula em qualquer instante.

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = \sqrt{2} U \left[\sin(\omega t + \varphi_u) + \sin(\omega t + \varphi_u - 2\frac{\pi}{3}) + \sin(\omega t + \varphi_u - 4\frac{\pi}{3}) \right] = 0 \quad (4.3)$$

No diagrama das amplitudes complexas também se pode verificar que num sistema equilibrado de tensões se tem:

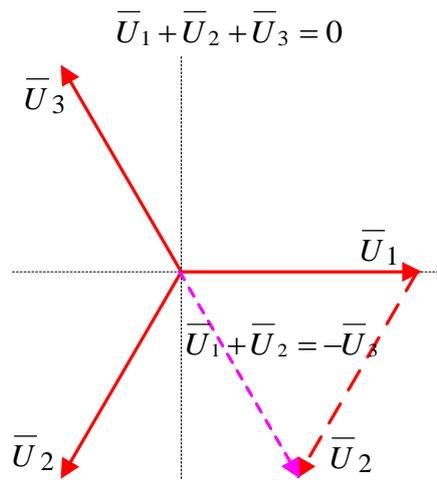


Figura 4.3. Diagramas da soma das amplitudes complexas.

4.1.3 Tensões Simples e Compostas

Um sistema de tensões trifásico alternado sinusoidal pode ser entendido como um conjunto de 3 fontes

monofásicas alternadas sinusoidais

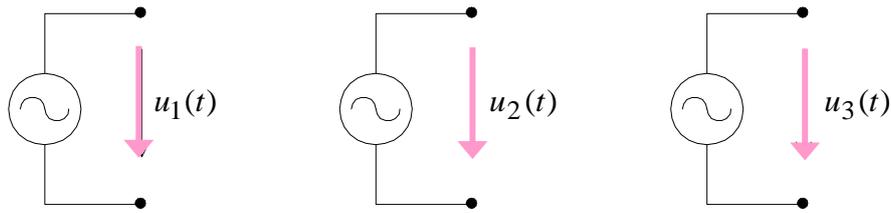


Figura 4.4. Três fontes monofásicas alternadas sinusoidais

O esquema da figura anterior pode ser redesenhado na forma esquematizada na figura seguinte:

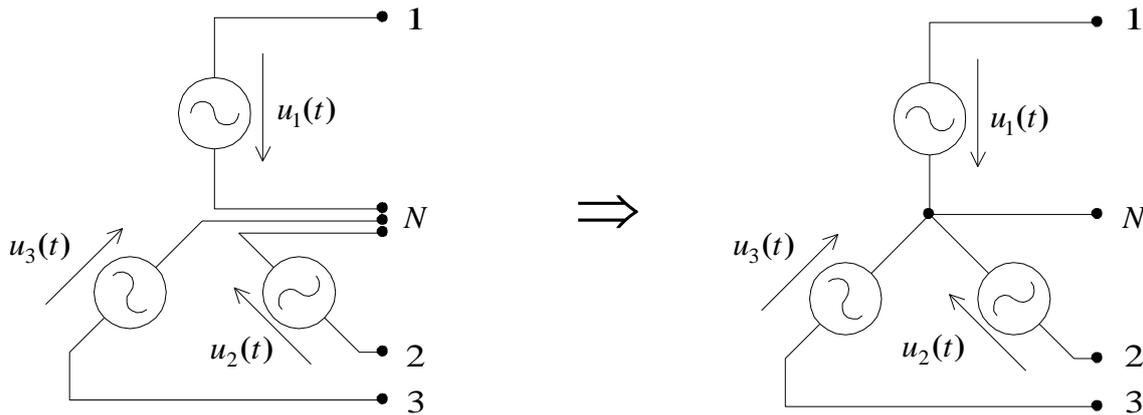


Figura 4.5. Fonte trifásica alternada sinusoidal.

Os condutores 1, 2 e 3 são designados por **condutores de fase** e o condutor N por **condutor de neutro**.

No entanto, aos terminais desta fonte não se têm, apenas, disponíveis 3 tensões alternadas sinusoidais de igual amplitude, como se verá seguidamente.

Admita-se a existência de 3 malhas fictícias tal como se representa na figura.

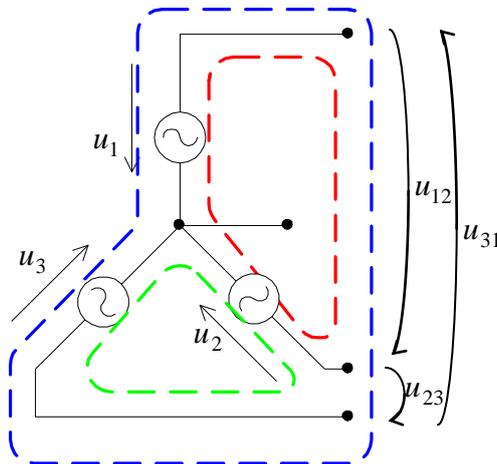


Figura 4.6. Fonte trifásica alternada sinusoidal e malhas fictícias.

A circulação na malha vermelha conduz a $u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ (4.4)

A circulação na malha verde conduz a $u_{23}(t) = u_2(t) - u_3(t)$ (4.5)

A circulação na malha azul conduz a $u_{31}(t) = u_3(t) - u_1(t)$ (4.6)

Substituindo as expressões de $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$, obtém-se:

$$\begin{cases} u_{12}(t) = \sqrt{2} \sqrt{3} U \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23}(t) = \sqrt{2} \sqrt{3} U \sin\left(\omega t + \varphi_u - 2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{31}(t) = \sqrt{2} \sqrt{3} U \sin\left(\omega t + \varphi_u - 4\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (4.7)$$

As tensões entre os condutores de fase constituem um sistema trifásico equilibrado de tensões; têm uma amplitude $\sqrt{3}$ superior à tensão entre os condutores de fase e o neutro e estão avançadas $\frac{\pi}{6}$ relativamente a estas.

As tensões entre os condutores de fase, $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ e $u_{31}(t)$, designam-se por **tensões compostas**, enquanto as tensões entre cada condutor de fase e o neutro, $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$, se designam por **tensões simples**.

Quando não existe o risco de se confundirem valores eficazes e valores máximos, designa-se o valor eficaz da tensão simples por U_S e o de uma tensão composta por U_C . Num sistema trifásico equilibrado a relação entre estes dois valores é:

$$U_C = \sqrt{3} U_S \quad (4.8)$$

O diagrama vectorial das amplitudes complexas das tensões simples e compostas, encontra-se representado na Figura 4.7 onde, por simplicidade gráfica, se admitiu que a fase na origem da tensão simples $u_1(t)$ era nula, isto é $\varphi_u = 0$.

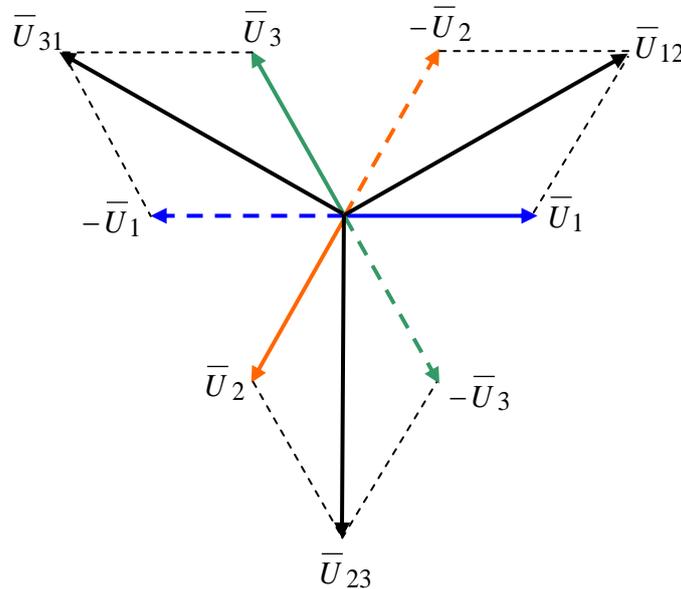


Figura 4.7. Diagrama vectorial das tensões simples e compostas do sistema trifásico.

Uma fonte de tensão trifásica equilibrada pode, então, ser entendida como um conjunto de 6 fontes monofásicas:

entre cada um dos condutores de fase e o neutro, existem 3 fontes monofásicas que apresentam um valor eficaz de U (tensões simples)

e entre os condutores de fase, existem outras 3 fontes monofásica que apresentam um valor eficaz de

$\sqrt{3} U$ (tensões compostas).

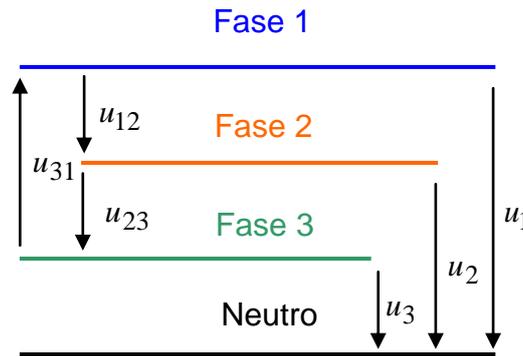


Figura 4.8 - Diagrama representativo das tensões simples e compostas do sistema trifásico.

As tensões u_1 , u_2 e u_3 são tensões simples e as tensões u_{12} , u_{23} e u_{13} são tensões compostas; se as primeiras tiverem um valor eficaz de U , então as segundas têm um valor eficaz de $\sqrt{3} U$.

Normalmente, um sistema trifásico designa-se pelo valor eficaz da sua tensão simples e composta ou, mais simplesmente, pelo valor eficaz da sua tensão composta. Assim, por exemplo, o sistema trifásico da rede portuguesa designa-se por $230V / 400V$ ou apenas por $400V$.

4.2 Ligação de Cargas

4.2.1 Ligação em ESTRELA

Uma carga trifásica é um conjunto de 3 cargas monofásicas, isto é, 3 impedâncias. Cada uma das impedâncias é designada por fase da carga. Se estas 3 impedâncias forem iguais, designa-se por **carga equilibrada**; será uma carga desequilibrada, caso contrário. As cargas desequilibradas serão analisadas na secção Cargas Desequilibradas.

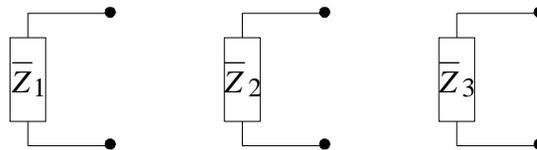


Figura 4.9 - Cargas Monofásicas.

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = Z e^{j\phi} \Rightarrow \text{Carga Equilibrada}$$

Uma das formas de ligar as 3 impedâncias é, à semelhança do que se fez para as fontes, ligar cada fase da carga a uma fase da fonte, tal como se esquematiza na Figura 4.10. Este tipo de ligação designa-se por **ligação estrela**.

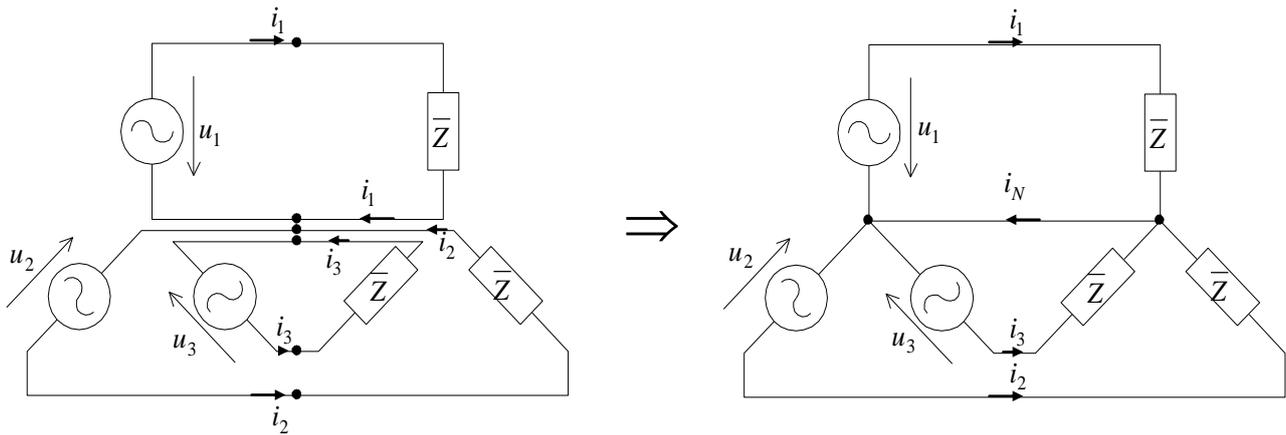


Figura 4.10 - Carga trifásica ligada em estrela

Circulando em cada uma das malhas que inclui uma fase do gerador, uma fase da carga e se fecha pelo condutor de neutro, verifica-se que, a cada fase da carga, U_F , (isto é, a cada uma das impedâncias da carga) fica aplicada a tensão da fase do gerador, isto é, uma tensão simples, U_S , (uma tensão entre o condutor de fase e o neutro).

Carga ligada em estrela $\Rightarrow U_F = U_S$

As amplitudes complexas das correntes (em valor eficaz) que circulam na carga são:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}} = \frac{U e^{j0}}{Z e^{j\phi}} = \frac{U}{Z} e^{-j\phi} \quad (4.9)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}} = \frac{U e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{Z e^{j\phi}} = \frac{U}{Z} e^{je^{-j\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right)}} \quad (4.10)$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}} = \frac{U e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{Z e^{j\phi}} = \frac{U}{Z} e^{je^{-j\left(\frac{4\pi}{3}+\phi\right)}} \quad (4.11)$$

Onde, por simplicidade, se admitiu que $u_1(t)$ tem uma fase inicial nula.

Este conjunto de 3 correntes, tem a mesma amplitude e estão desfasadas entre si de $\frac{2\pi}{3}$, pelo que constituem um sistema trifásico equilibrado de correntes. Assim sendo, a corrente no condutor de neutro será nula pois, aplicando a Lei dos Nós a qualquer um dos 2 nós do circuito, se obtém:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_N = 0 \quad (4.12)$$

O diagrama vectorial das correntes e tensões nas fases de uma carga equilibrada ligada em estrela encontra-se representado na Figura 4.11

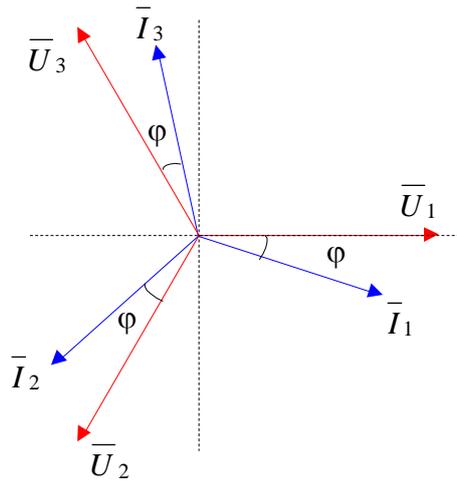


Figura 4.11 - Diagrama vectorial de tensões e correntes nas fases de uma carga equilibrada ligada em estrela

Nesta situação de equilíbrio, o condutor de neutro pode ser retirado, mantendo-se as tensões nas fases da carga iguais às tensões nas fases do gerador.

No caso de uma carga ligada em estrela, as correntes na linha de transmissão, \bar{I}_L , (correntes entre o gerador e a carga) são iguais às correntes nas fases da carga, \bar{I}_F , (isto é, as correntes que atravessam cada uma das impedâncias da carga).

$$\text{Carga em estrela} \Rightarrow \bar{I}_L = \bar{I}_F$$

4.2.2 Ligação em Triângulo ou Delta

As 3 cargas monofásicas referidas na secção anterior podem também ser ligadas sequencialmente, formando um triângulo, como se esquematiza na Figura 4.12.

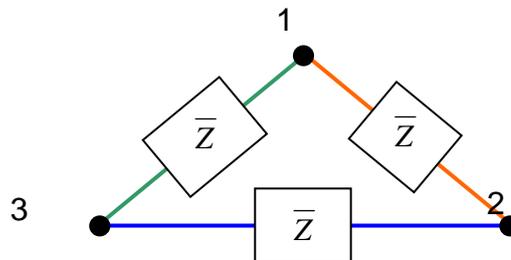


Figura 4.12 - Carga Trifásica Ligada em Triângulo ou Delta

Para alimentar esta carga com a fonte de tensão trifásica, liga-se cada um dos condutores de fase da fonte, aos vértices do triângulo formado pela carga, tal como se esquematiza na figura seguinte.

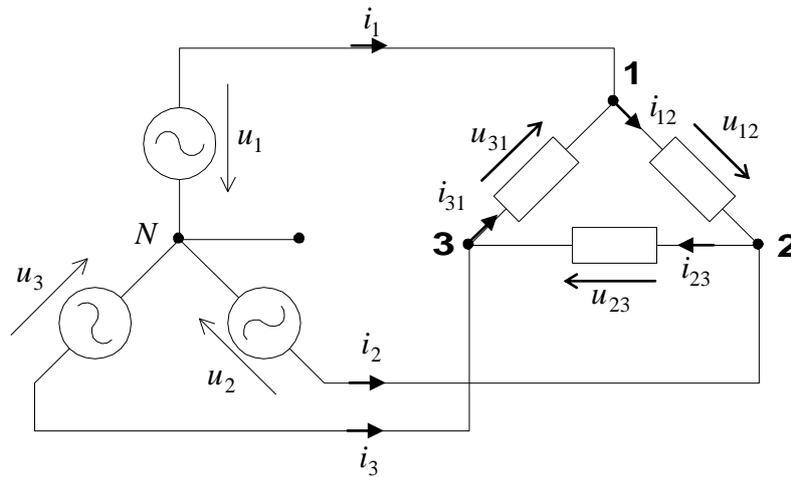


Figura 4.13 - Fonte de Tensão trifásica a alimentar uma Carga Trifásica Ligada em Triângulo ou Delta

Neste tipo de ligação, o condutor de neutro fica desligado.

A tensão de cada fase da carga, U_F (isto é, a tensão aplicada a cada uma das impedâncias da carga) é uma tensão composta, U_C , (tensão entre duas fases da fonte) cujo valor eficaz é $\sqrt{3} U_S$.

Carga ligada em triângulo $\Rightarrow U_F = U_C$

Nestas condições, e considerando, por simplicidade gráfica, que a tensão composta \bar{U}_{12} tem uma fase inicial nula, isto é $\bar{U}_{12} = \sqrt{3} U_S e^{j0}$, as amplitudes complexas (em valor eficaz) das correntes que vão percorrer cada uma das fases da carga, são:

$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_S e^{j0}}{Z e^{j\varphi}} = \sqrt{3} \frac{U_S}{Z} e^{-j\varphi} \quad (4.13)$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_S e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{Z e^{j\varphi}} = \sqrt{3} \frac{U_S}{Z} e^{-j\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)} \quad (4.14)$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{U}_{31}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_S e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{Z e^{j\varphi}} = \sqrt{3} \frac{U_S}{Z} e^{-j\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right)} \quad (4.15)$$

Este conjunto de correntes forma um sistema trifásico equilibrado, desfasado φ do sistema de tensões compostas que está aplicado às fases da carga.

Relativamente à carga ligada em estrela, cada fase da carga suporta agora uma tensão $\sqrt{3}$ vezes superior (tensão composta) pelo que, a amplitude a corrente que a percorre é, também, $\sqrt{3}$ vezes superior.

O diagrama vectorial das tensões e correntes nas fases da carga encontra-se representado na Figura 4.14.

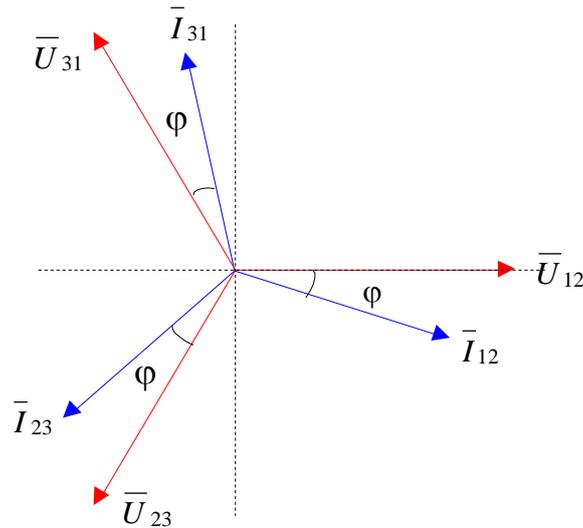


Figura 4.14 - Diagrama vectorial das tensões e correntes nas fases de uma carga ligada em triângulo

Relativamente às correntes que percorrem as linhas de transmissão, a sua determinação tem de ser efectuada com recurso à Lei dos Nós (ver Figura 4.13).

- Lei dos Nós no nó 1 $i_1 = i_{12} - i_{31}$
- Lei dos Nós no nó 2 $i_2 = i_{23} - i_{12}$
- Lei dos Nós no nó 3 $i_3 = i_{31} - i_{23}$

Em termos de amplitudes complexas em valor eficaz, obtém-se:

$$\bar{I}_1 = 3 \frac{U_S}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} \quad (4.16)$$

$$\bar{I}_2 = 3 \frac{U_S}{Z} e^{je^{-j\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi + \frac{\pi}{6}\right)}} \quad (4.17)$$

$$\bar{I}_3 = 3 \frac{U_S}{Z} e^{je^{-j\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi + \frac{\pi}{6}\right)}} \quad (4.18)$$

Este conjunto de correntes na linha, \bar{I}_L , forma um sistema equilibrado, atrasado $\frac{\pi}{6}$ do sistema de correntes das fases da carga, \bar{I}_F . Também a amplitude destas correntes na linha é $\sqrt{3}$ vezes superior à amplitude das correntes que percorrem as fases da carga.

$$\text{Carga em triângulo} \Rightarrow |\bar{I}_L| = \sqrt{3} |\bar{I}_F|$$

4.2.3 Comparação Estrela Triângulo

Considere-se uma carga trifásica equilibrada, representada pelas impedâncias:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = Z e^{j\varphi} \quad (4.19)$$

Se esta carga for ligada em estrela,

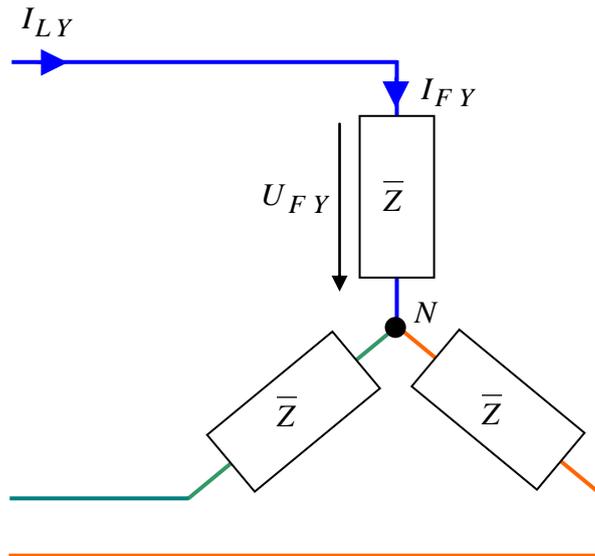


Figura 4.15 - Diagrama representativo de uma carga ligada em estrela

a amplitude da tensão aplicada a cada fase da carga é a amplitude de uma tensão simples,

$$U_{FY} = U_S \quad (4.20)$$

pele que a amplitude da corrente em cada fase da carga é:

$$I_{FY} = \frac{U_S}{Z} \quad (4.21)$$

Como numa ligação em estrela a corrente na fase da carga é exactamente a mesma corrente que percorre a linha, obtém-se:

$$I_{LY} = \frac{U_S}{Z} \quad (4.22)$$

designando por U_{FY} a amplitude da tensão na fase da carga de uma estrela, I_{FY} a amplitude da corrente na fase da carga de uma estrela e por I_{LY} a amplitude da corrente na linha de uma estrela.

Se esta mesma carga for ligada em triângulo,

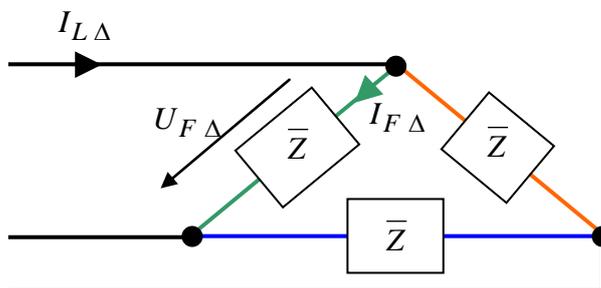


Figura 4.16 - Diagrama representativo de uma carga ligada em triângulo

a amplitude da tensão aplicada a cada fase da carga é uma tensão composta

$$U_{F\Delta} = U_C \quad (4.23)$$

pele que a amplitude da corrente em cada fase da carga é:

$$I_{F\Delta} = \frac{U_C}{Z} \quad (4.24)$$

Como numa ligação em triângulo a amplitude da corrente na linha é $\sqrt{3}$ vezes superior à corrente que percorre a fase da carga, obtém-se:

$$I_{L\Delta} = \sqrt{3} I_{F\Delta} = \sqrt{3} \frac{U_C}{Z} \quad (4.25)$$

designando por $U_{F\Delta}$ a amplitude da tensão na fase da carga de um triângulo, $I_{F\Delta}$ a amplitude da corrente na fase da carga de um triângulo e por $I_{L\Delta}$ a amplitude da corrente na linha de um triângulo.

Atendendo à relação entre as amplitudes de uma tensão simples e de uma tensão composta do sistema trifásico, $U_C = \sqrt{3} U_S$, a expressão anterior pode escrever-se na forma:

$$I_{L\Delta} = \sqrt{3} \frac{U_C}{Z} = 3 \frac{U_S}{Z} \quad (4.26)$$

Comparando a expressão de I_{LY} com a expressão de $I_{L\Delta}$ conclui-se que:

$$I_{L\Delta} = 3 I_{LY} \quad (4.27)$$

Isto é, a amplitude da corrente de linha quando uma carga está ligada em triângulo, é 3 vezes superior à amplitude da corrente de linha quando essa **mesma carga** está ligada em estrela.

4.2.4 Cargas Desequilibradas

Uma carga trifásica considera-se desequilibrada quando pelo menos uma das impedâncias é diferente das outras duas, ou no módulo, Z , ou na fase, φ .

Um exemplo de uma carga desequilibrada é:

$$\bar{Z}_1 = R = R e^{j0} \quad \bar{Z}_2 = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \bar{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (4.28)$$

ou seja, uma carga que na fase 1 é representada por uma resistência, na fase 2 por uma indutância e na fase 3 por uma capacidade.

Se esta carga for ligada, por exemplo, em estrela, e alimentada por um sistema trifásico equilibrado de tensões, cuja amplitude da tensão simples é U_S , a corrente em cada uma das fases da carga (e também a corrente nas linhas, uma vez que são iguais), será, em valor eficaz:

$$\bar{I}_{L1} = \bar{I}_{F1} = \frac{\bar{U}_{F1}}{\bar{Z}_1} = \frac{U_S e^{j0}}{R e^{j0}} = \frac{U_S}{R} e^{j0} \quad (4.29)$$

$$\bar{I}_{L2} = \bar{I}_{F2} = \frac{\bar{U}_{F2}}{\bar{Z}_2} = \frac{U_S e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{U_S}{\omega L} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} \quad (4.30)$$

$$\bar{I}_{L3} = \bar{I}_{F3} = \frac{\bar{U}_{F3}}{\bar{Z}_3} = \frac{U_S e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \omega C U_S e^{-j\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.31)$$

Cujo diagrama vectorial está representado na Figura 4.17 e onde se admitiu que os módulos das impedâncias são todos diferentes, isto é, $R \neq \omega L \neq \frac{1}{\omega C}$.

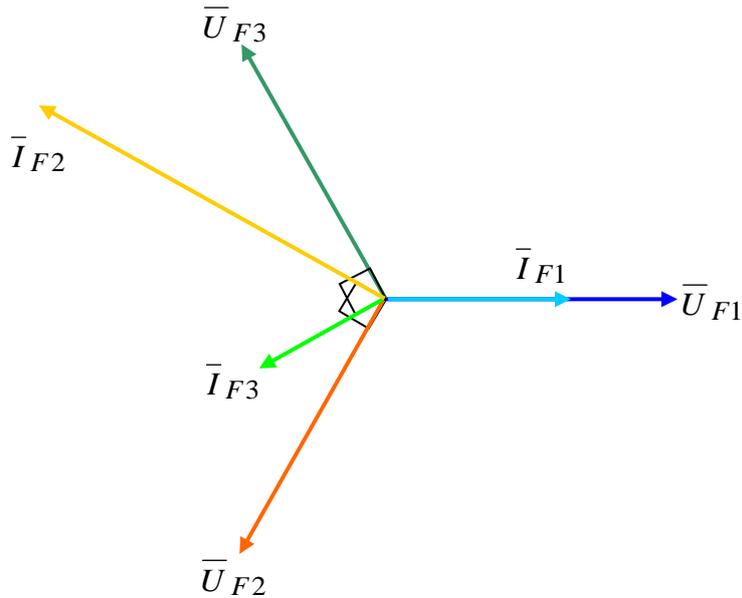


Figura 4.17 - Diagrama vectorial de uma carga desequilibrada

A corrente na fase 1 está em fase com a tensão na fase 1 porque a carga é representada por uma resistência; como na fase 2 a carga é representada por uma indutância, a respectiva corrente na fase está atrasada $\frac{\pi}{2}$ da respectiva tensão na fase da carga; finalmente, a capacidade que representa a carga da

fase 3 faz com que a corrente na fase esteja adiantada $\frac{\pi}{2}$ relativamente à respectiva tensão na fase.

Tanto através do diagrama vectorial, quanto através das expressões matemáticas das correntes nas fases da carga, se pode verificar que:

$$\bar{I}_{F1} + \bar{I}_{F2} + \bar{I}_{F3} = \bar{I}_N \neq 0 \quad (4.32)$$

concluindo-se, assim, que o sistema de correntes não é equilibrado.

4.2.5 Exemplos

Numa carga ligada em estrela, as amplitudes complexas das correntes em cada uma das linhas são:

$\bar{I}_{L1} = I e^{j0}$	$\bar{I}_{L2} = I e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\bar{I}_{L3} = I e^{j\frac{\pi}{2}}$
---------------------------	--	---------------------------------------

QUESTÃO 1: Explique se se trata ou não de uma carga equilibrada

Resposta>>

Se se admitir que o sistema de tensões que alimenta a carga é equilibrado, então, a carga não é equilibrada porque as correntes não constituem um

sistema equilibrado; apesar de terem a mesma amplitude, não se encontram desfasadas de 120°

QUESTÃO 2: Determine a amplitude complexa da corrente do neutro.

Resposta>>

Como na estrela se tem $\bar{I}_L = \bar{I}_F$, a corrente de neutro será

$$\bar{I}_N = \bar{I}_{L1} + \bar{I}_{L2} + \bar{I}_{L3} = I e^{j0} + I e^{-j\frac{\pi}{2}} + I e^{j\frac{\pi}{2}} = I e^{j0}$$

QUESTÃO 3: Determine a amplitude complexa das impedâncias de cada fase da carga.

Resposta>>

Como a carga está ligada em estrela, a tensão que alimenta cada uma das fases da carga (\bar{U}_F), é uma tensão simples (U_S) de valor eficaz U .

Admitindo que o sistema de tensões que alimenta a carga é equilibrado, as tensões em cada fase serão:

$\bar{U}_{F1} = U e^{j0}$	$\bar{U}_{F2} = U e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{U}_{F3} = U e^{-j\frac{4\pi}{3}}$
---------------------------	---	---

Uma vez que se conhecem as correntes em cada uma das fases, será:

$$\bar{Z}_{F1} = \frac{\bar{U}_{F1}}{\bar{I}_{F1}} = \frac{U e^{j0}}{I e^{j0}}$$

$$\bar{Z}_{F2} = \frac{\bar{U}_{F2}}{\bar{I}_{F2}} = \frac{U e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{I e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\bar{Z}_{F3} = \frac{\bar{U}_{F3}}{\bar{I}_{F3}} = \frac{U e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{I e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

Resultando:

$\bar{Z}_{F1} = \frac{U}{I} e^{j0}$	$\bar{Z}_{F2} = \frac{U}{I} e^{-j\frac{\pi}{6}}$	$\bar{Z}_{F3} = \frac{U}{I} e^{-j\frac{11\pi}{6}} = \frac{U}{I} e^{j\frac{\pi}{6}}$
-------------------------------------	--	---

A impedância da fase 1 é puramente resistiva, a da fase 2 tem um carácter capacitivo e resistivo e a da fase 3 tem um carácter indutivo e resistivo.

4.3 Potências em sistemas trifásicos

4.3.1 Cargas desequilibradas

Independentemente da forma de ligação da carga (estrela ou triângulo), se as amplitudes complexas (em valor eficaz) das tensões em cada uma das fases da carga forem designadas por:

$$\bar{U}_{F1}, \bar{U}_{F2} \text{ e } \bar{U}_{F3} \tag{4.33}$$

e a amplitude complexa (em valor eficaz) das correntes em cada uma das fases da carga forem designadas por:

$$\bar{I}_{F1}, \bar{I}_{F2} \text{ e } \bar{I}_{F3} \quad (4.34)$$

a potência complexa em cada uma das fases da carga será:

$\bar{S}_{F1} = \bar{U}_{F1} \bar{I}_{F1}^*$	$\bar{S}_{F2} = \bar{U}_{F2} \bar{I}_{F2}^*$	$\bar{S}_{F3} = \bar{U}_{F3} \bar{I}_{F3}^*$
--	--	--

uma vez que a carga trifásica pode ser vista como um conjunto de 3 cargas monofásicas. Recorda-se que a notação \bar{I}^* designa a amplitude complexa conjugada de \bar{I} .

A potência complexa associada à carga trifásica, \bar{S} , será a soma das potências de cada uma das fases, pelo que se obtém:

$$\bar{S} = \bar{S}_{F1} + \bar{S}_{F2} + \bar{S}_{F3} \quad (4.35)$$

Para o caso de uma carga desequilibrada, o cálculo da potência trifásica terá de ser efectuado recorrendo ao cálculo da potência em cada uma das fases; para o caso de uma carga equilibrada, a expressão anterior pode ser particularizada, tal como se verá nas secções seguintes.

4.3.2 Cargas equilibradas

Se a carga trifásica for equilibrada, isto é, se

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = Z e^{j\varphi} \quad (4.36)$$

e se o sistema de tensões que a alimenta for simétrico, isto é, amplitudes idênticas e iguais defasamentos entre si, o resultante sistema de correntes também será equilibrado pelo que as correntes em cada fase da carga serão:

$$|\bar{I}_{F1}| = |\bar{I}_{F2}| = |\bar{I}_{F3}| = I \text{ desfasadas entre si de } 120^\circ \quad (4.37)$$

A potência complexa associada a cada uma das impedâncias da carga, \bar{S}_F , é igual para todas as impedâncias, pelo que às 3 impedâncias ficará associada a potência complexa:

$$\bar{S} = 3 \bar{S}_F = 3 \bar{U}_F \bar{I}_F^* \quad (4.38)$$

Relativamente às potências activa, P , e potência reactiva, Q , obtém-se:

$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \cos \varphi$	$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \sin \varphi$
---	---

(4.39)

A utilização das relações anteriores para o cálculo das potências, pressupõe ou o conhecimento dos valores numéricos das tensão e corrente na fase da carga, U_F , I_F e φ , ou o conhecimento da carga e da forma como ela está ligada (estrela ou triângulo) para que se possam calcular estes valores.

4.3.3 Cargas equilibradas ligadas em estrela

Particularizando o cálculo das potências associadas a uma carga equilibrada que está ligada em estrela, deduziu-se já na secção 4.2.1 - Ligação em Estrela que, neste caso, a corrente na fase da carga é igual à corrente na linha $\bar{I}_F = \bar{I}_L$ e a tensão aplicada a cada fase da carga é uma tensão simples $U_F = U_S$

pelo que as expressões genéricas para cargas equilibradas

$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \cos \varphi$	$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \sin \varphi$
---	---

podem ser particularizadas para:

$P = 3 U_S I_L \cos \varphi$	$Q = 3 U_S I_L \sin \varphi$
------------------------------	------------------------------

(4.40)

ou ainda, atendendo à relação $U_C = \sqrt{3} U_S$ entre tensão simples e tensão composta (ver 4.1.3 - Tensões Simples e Compostas):

$P = \sqrt{3} U_C I_L \cos \varphi$	$Q = \sqrt{3} U_C I_L \sin \varphi$
-------------------------------------	-------------------------------------

(4.41)

O cálculo da potência através destas relações, não necessita do conhecimento prévio da forma de ligação da carga pois o valor eficaz da tensão composta, U_C , apresenta um valor definido pela fonte de alimentação e o valor eficaz da corrente na linha, I_L , pode ser medido “no exterior” da instalação.

4.3.4 Cargas equilibradas ligadas em triângulo ou delta

Particularizando o cálculo das potências associadas a uma carga equilibrada que está ligada em triângulo, deduziu-se já na secção 4.2.2 – Ligação em Triângulo ou Delta que, neste caso, a amplitude da corrente na linha é igual a $\sqrt{3}$ amplitude da corrente na fase $I_L = \sqrt{3} I_F$

a tensão aplicada a cada fase da carga é uma tensão composta $U_F = U_C$

pelo que as expressões genéricas para cargas equilibradas

$P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \cos \varphi$	$Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 3 U_F I_F \sin \varphi$
---	---

podem ser particularizadas para:

$P = 3 U_C \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi$	$Q = 3 U_C \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sin \varphi$
---	---

ou ainda:

$P = \sqrt{3} U_C I_L \cos \varphi$	$Q = \sqrt{3} U_C I_L \sin \varphi$
-------------------------------------	-------------------------------------

(4.42)

Tal como já se tinha concluído no ponto anterior, o cálculo da potência através destas relações, não necessita do conhecimento prévio da forma de ligação da carga pois o valor eficaz da tensão composta, U_C , apresenta um valor definido pela rede de alimentação e o valor eficaz da corrente na linha, I_L , pode ser medido “no exterior” da instalação.

4.3.5 Comparação entre cargas em Estrela e em Triângulo

O facto de nas duas secções anteriores, 4.3.3 - Cargas Equilibradas Ligadas em Estrela e 4.3.4 - Cargas Equilibradas Ligadas em Triângulo, se terem deduzido as mesmas expressões:

$P = \sqrt{3} U_C I_L \cos \varphi$	$Q = \sqrt{3} U_C I_L \sin \varphi$
-------------------------------------	-------------------------------------

nos dois casos, NÃO pode induzir o ERRO de dizer “Independentemente da forma de ligação, a carga consome sempre o mesmo!”

O que será CORRECTO concluir é que: “Quer a carga esteja ligada em estrela, quer esteja em triângulo, as EXPRESSÕES para o cálculo das potências são as mesmas”.

A diferença entre as duas expressões anteriores ficará mais clara, com o cálculo da corrente na linha quando a **mesma** carga equilibrada, $Z e^{j\varphi}$, é ligada em estrela ou em triângulo.

Designar-se-á, respectivamente, por I_{LY} e I_{FY} as correntes na linha e na fase da carga associada à ligação estrela e por $I_{L\Delta}$ e $I_{F\Delta}$ as correntes na linha e na fase associadas à ligação triângulo.

Em cada um dos tipos de ligação, as tensões aplicadas a cada fase da carga são:

ESTRELA	TRIÂNGULO
$U_{FY} = U_S$	$U_{F\Delta} = U_C$

(4.43)

a corrente na fase da carga será a respectiva tensão a dividir pela impedância (igual nos dois casos), pelo que se obtém:

ESTRELA	TRIÂNGULO
$I_{FY} = \frac{U_S}{Z}$	$I_{F\Delta} = \frac{U_C}{Z}$

(4.44)

ou ainda, atendendo à relação $U_C = \sqrt{3} U_S$ entre tensão simples e tensão composta (ver 4.1.3 - Tensões Simples e Compostas):

ESTRELA	TRIÂNGULO
$I_{FY} = \frac{U_S}{Z}$	$I_{F\Delta} = \frac{\sqrt{3} U_S}{Z}$

(4.45)

expressões das quais se pode já concluir que:

$$I_{F\Delta} = \sqrt{3} I_{FY} \quad (4.46)$$

Como as relações entre correntes na linha e na fase para os dois tipos de ligação são (ver 4.2.1 - Ligação em Estrela e 4.2.2 - Ligação em Triângulo ou Delta): $I_{LY} = I_{FY}$ para a ligação estrela e $I_{L\Delta} = \sqrt{3} I_{F\Delta}$, o conjunto de expressões anteriores pode escrever-se na forma:

ESTRELA	TRIÂNGULO
$I_{LY} = \frac{U_S}{Z}$	$\frac{I_{L\Delta}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} U_S}{Z}$

ou

ESTRELA	TRIÂNGULO
$I_{LY} = \frac{U_S}{Z}$	$I_{L\Delta} = 3 \frac{U_S}{Z}$

(4.47)

concluindo que, a corrente na linha quando uma carga é ligada em triângulo é 3 vezes superior à corrente na linha quando essa **mesma carga** é ligada em estrela.

$$I_{L\Delta} = 3 I_{LY} \quad (4.48)$$

Como o valor da tensão composta não depende da forma de ligação, das expressões genéricas,

$P = \sqrt{3} U_C I_L \cos \varphi$	$Q = \sqrt{3} U_C I_L \sin \varphi$
-------------------------------------	-------------------------------------

conclui-se que, para uma mesma carga se tem:

$$P_{\Delta} = 3 P_Y \quad \text{e} \quad Q_{\Delta} = 3 Q_Y \quad (4.49)$$

isto é, as potências associadas a uma carga ligada em triângulo são 3 vezes superiores às potências associadas a essa **mesma carga** quando ligada em estrela.

4.3.6 Exemplos

Exemplo 1 - Duas cargas de igual factor de potência, uma ligada em estrela e outra ligada em triângulo, absorvem da rede uma potência reactiva Q . Mostre, analiticamente, a relação entre as suas impedâncias.

Resposta>>

Para qualquer uma das ligações, a impedância de cada fase da carga é:

$$Z = \frac{U_F}{I_F}$$

Relativamente à ligação em estrela tem-se:

$$U_{FY} = U_S \quad \text{e} \quad I_{FY} = I_{LY}$$

o que permite escrever:

$$Z_Y = \frac{U_{FY}}{I_{FY}} = \frac{U_S}{I_{LY}} \quad (1)$$

Relativamente à ligação em triângulo tem-se:

$$U_{F\Delta} = U_C = \sqrt{3} U_S \quad \text{e} \quad I_{F\Delta} = \frac{I_{L\Delta}}{\sqrt{3}}$$

o que permite escrever:

$$Z_{\Delta} = \frac{U_{F\Delta}}{I_{F\Delta}} = \frac{\sqrt{3} U_S}{\frac{I_{L\Delta}}{\sqrt{3}}} = 3 \frac{U_S}{I_{L\Delta}} \quad (2)$$

Como as duas cargas consomem a mesma potência reactiva:

$$\begin{aligned} Q_Y &= Q_{\Delta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} U_C I_{LY} \sin \varphi &= \sqrt{3} U_C I_{L\Delta} \sin \varphi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_{LY} &= I_{L\Delta} \end{aligned}$$

Esta relação entre as correntes na linha, substituída em (2) e comparando o

resultado com (1), permite concluir que:

$$Z_{\Delta} = 3Z_Y$$

Exemplo 2 - Considere um sistema trifásico simétrico com tensões simples designadas por U_S . Admita que o ângulo da tensão da fase 1 é nulo.

Numa carga ligada em estrela, as amplitudes complexas das correntes em cada uma das linhas são:

$$\bar{I}_{L1} = I e^{j0} \quad \bar{I}_{L2} = I e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \bar{I}_{L3} = I e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Determine as potências activa e reactiva absorvidas pela carga

Resposta>>

Numa carga ligada em estrela, tem-se sempre:

$$\bar{I}_{LY} = \bar{I}_{FY} \quad e \quad U_F = U_S$$

Pelo que as correntes nas fases da carga são:

$$\bar{I}_{F1} = I e^{j0} \quad \bar{I}_{F2} = I e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \bar{I}_{F3} = I e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

e as tensões nas fases da carga, admitindo que o sistema de tensões que a alimenta é equilibrado, são:

$$\bar{U}_{F1} = U_S e^{j0} \quad \bar{U}_{F2} = U_S e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad \bar{U}_{F3} = U_S e^{-j\frac{4\pi}{3}} \quad (2)$$

Como a potência complexa associada a cada fase é sempre:

$$\bar{S} = \bar{U}_F (\bar{I}_F)^*$$

através de (1) e (2), obtém-se

$$\bar{S}_{F1} = U_S I e^{j0} \quad \bar{S}_{F2} = U_S I e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad \bar{S}_{F3} = U_S I e^{-j\frac{11\pi}{6}} = U_S I e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (3)$$

Como a potência complexa se relaciona com as potências activa e reactiva através de:

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\} \quad Q = \text{Im}\{\bar{S}\} \quad (4)$$

De (3) e (4) obtém-se:

$$P_{F1} = U_S I e^{j0} \quad P_{F2} = U_S I \cos \frac{\pi}{6} \quad P_{F3} = U_S I \cos \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

e

$$Q_{F1} = 0 \quad Q_{F2} = -U_S I \sin \frac{\pi}{6} \quad Q_{F3} = U_S I \sin \frac{\pi}{6} \quad (6)$$

Os resultados obtidos são concordantes com os do exercício da secção ligação de cargas;

tendo a impedância da fase 1 um carácter resistivo puro, consome apenas potência activa;

tendo a impedância da fase 2 um carácter resistivo e capacitivo, consome potência activa e fornece reactiva;

tendo a impedância da fase 3 um carácter resistivo e indutivo, consome potência activa e reactiva.

As potências absorvidas pela carga trifásica serão;

$$P = P_{F1} + P_{F2} + P_{F3} = U_S I \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

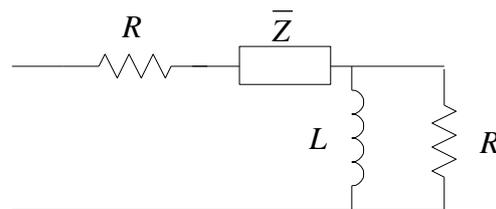
e

$$Q = Q_{F1} + Q_{F2} + Q_{F3} = 0$$

A potência absorvida pela carga indutiva da fase 3 é fornecida pela carga capacitiva da fase 2.

4.3.7 Exercícios

Exercício 1 - Considere um circuito trifásico simétrico ligado em triângulo, alimentado a partir da rede eléctrica nacional 230/400V, 50Hz. Cada fase da carga pode ser representada pelo seguinte circuito eléctrico:

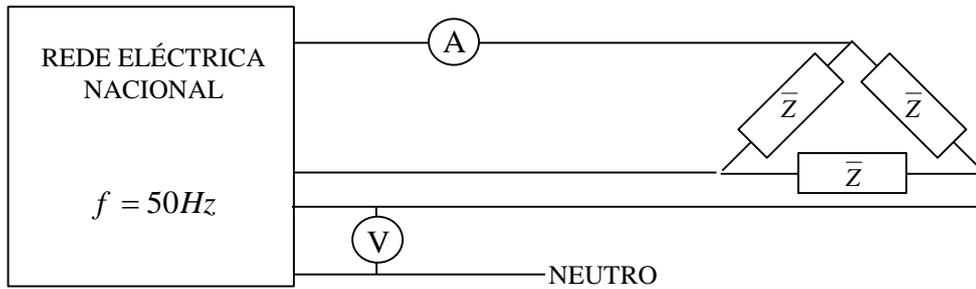


$$R = 2 \, \Omega \quad L = 20 \, \text{mH}$$

- Determine o valor da impedância \bar{Z} , de modo a que o valor da impedância total em cada fase seja $7e^{j50^\circ} \, \Omega$;
- Calcule o valor das correntes na linha e as potências activa e reactiva fornecidas pela fonte;
- Determine o valor dos condensadores, a colocar em paralelo com cada fase, de modo a assegurar um factor de potência de 0,85.
- Represente num diagrama vectorial as tensões e as correntes nas fases, antes e depois de compensar o factor de potência.

(Soluções: a) $\bar{Z} = 0,7 + j4,8 = 4,85 e^{j82} \, \Omega$ b) $I_L = 98,97 \, \text{A}$ $P = 44077 \, \text{W}$, $Q = 52529 \, \text{var}$
c) $C = 167 \, \mu\text{F}$)

Exercício 2 - Considere a instalação eléctrica representada na figura. O amperímetro A lê um valor eficaz de 17 A e o voltímetro V um valor eficaz de 230 V. O factor de potência é de 0,766 indutivo.



Determine:

- o valor das potências aparente, activa e reactiva fornecidas pela rede;
- valor eficaz da corrente em cada fase da carga e o valor complexo da impedância \bar{Z} .
- Compense o factor de potência para um valor de 0,866. Indique a capacidade e tensão dos condensadores necessários.

(Soluções: a) $S=11730VA$, $P=8985W$, $Q=7540VAR$ b) $I_F=9,8A$, $\bar{Z}_F=40,6e^{j40}\Omega$,
 c) $C=15,6\mu F$ de 400 V)

Exercício 3 - Uma unidade industrial está alimentada pela rede eléctrica nacional (230/400 V - 50 Hz) e tem uma potência contratada (máxima disponível) de 10 kVA. No interior da unidade industrial, pretende alimentar-se um motor trifásico que absorve 4 kW e que tem um factor de potência indutivo de 0,423. Determine:

- o valor eficaz da corrente na linha, quando o motor está a ser alimentado
- o valor das potências aparente e reactiva absorvidas pelo motor e diga se a potência contratada é suficiente para alimentar este motor. Caso a sua resposta seja negativa, qual a potência mínima que deveria ser contratada?
- o valor eficaz da corrente em cada fase do motor e o valor complexo da impedância de cada fase; considere que o motor está ligado em triângulo.
- Compense o factor de potência para um valor de 0,899. Indique a capacidade e tensão dos condensadores necessários.

(Soluções: a) $I_L=13,6A$; b) $S=9456VA$, $Q=8569VAR$; c) $I_F=7,88A$, $\bar{Z}_F=51e^{j65}\Omega$;
 c) $C_\Delta=44\mu F$, 400V)

Capítulo 5 Circuitos Magnéticos

5.1 Introdução

A maioria das máquinas eléctricas utiliza materiais ferromagnéticos para conduzir e direccionar campos magnéticos que actuam como um meio para converter e transferir energia. A utilização de campos magnéticos é justificada pelo facto de, nas condições usuais de desenvolvimento tecnológico, permitirem a obtenção de maiores forças e binários.

De forma a comparar as potencialidades energéticas de cada sistema, vão considerar-se 3 sistemas: um pneumático, um electrostático e um electromagnético.

A comparação será feita com recurso à energia específica (energia por unidade de volume) em jogo em cada um dos sistemas.

Pneumático	Electrostático	Electromagnético
$w_p = p \quad [Jm^{-3}]$	$w_{es} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [Jm^{-3}]$	$w_{mag} = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad [Jm^{-3}]$

Para cada um destes casos, os valores limite serão impostos pelas características dos materiais disponíveis actualmente. Assim, poder-se-á admitir uma pressão máxima de 400 bar, resultando, para o caso de um accionamento pneumático:

$$\hat{w}_p = 4 \times 10^7 \quad [Jm^{-3}] \quad (5.1)$$

No caso de um sistema electrostático, a energia máxima obter-se-á com o valor do campo eléctrico de disrupção do ar ($\approx 3 \times 10^6 \text{ Vm}^{-1}$), resultando:

$$\hat{w}_{es} = 4 \times 10 \quad [Jm^{-3}] \quad (5.2)$$

Para um sistema electromagnético, o limite atinge-se com a saturação do material do circuito magnético, o que, para o caso do ferro, corresponde a um campo de indução de, aproximadamente, 1 T .

$$\hat{w}_{mag} = 4 \times 10^5 \quad [Jm^{-3}] \quad (5.3)$$

Dos valores anteriores, resulta uma clara vantagem para os sistemas pneumáticos e electromagnéticos, em detrimento dos electrostáticos, explicando assim o reduzido interesse prático destes últimos:

$$\hat{w}_p = 10^2 \hat{w}_{mag} = 10^6 \hat{w}_{es} \quad (5.4)$$

Apesar de apresentarem uma menor energia específica, os sistemas electromagnéticos apresentam muitas outras vantagens face aos sistemas pneumáticos, das quais podemos enumerar as mais significativas:

- Podem atingir frequências de trabalho superiores; há que comparar potências específicas e não energias; em termos de potência específica, os sistemas pneumáticos e os electromagnéticos apresentam valores semelhantes
- Podem produzir facilmente movimentos contínuos de rotação ou de translação, enquanto os pneumáticos estão limitados a um fim de curso
- Não necessitam da produção de uma elevada pressão; os sistemas pneumáticos necessitam de um

conversor electromecânico ou de combustão interna para accionar o compressor.

- Enquanto o valor limite de $1 T$ pode, na maior parte dos casos, ser facilmente atingido, o mesmo não acontece com a pressão de 400 bar

Os sistemas pneumáticos são, notoriamente, vantajosos face aos electromagnéticos, nos casos em que existe necessidade de obter uma força elevada, com um accionamento de reduzido volume.

A solução completa e detalhada de problemas envolvendo o campo magnético, implica a resolução das equações de Maxwell complementadas com as equações constitutivas dos materiais envolventes.

Podem obter-se soluções aproximadas, fazendo uso de simplificações, a primeira das quais considera que, para os sistemas em estudo, as frequências de trabalho e as dimensões dos sistemas:

- as taxas de variação por unidade de tempo das grandezas electromagnéticas são relativamente baixas (defina-se ω como proporcional à frequência dessa variação);
- as dimensões características dos sistemas são pequenas (defina-se l como a dimensão linear característica do sistema),

de tal modo que se verifica:

$$\omega l / c \ll 1 \quad (5.5)$$

onde c corresponde à velocidade da luz.

Este facto permite não considerar os efeitos da propagação das ondas electromagnéticas no sistema (o termo relativo às correntes de deslocamento, $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, nas equações de Maxwell pode ser desprezado) e, deste modo, considerar-se uma situação de regime quase-estacionário.

5.2 Conceitos Básicos – Noção de Circuito Magnético

Nas condições de regime quase-estacionário, a equação de Maxwell

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (5.6)$$

pode ser aproximada a

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} \quad (5.7)$$

cuja forma integral é

$$\oint \bar{H} \, d\ell = \iint \bar{J} \, dA \quad (5.8)$$

traduzindo que o integral do campo magnético \bar{H} ao longo de um percurso fechado ℓ , iguala a totalidade de corrente eléctrica que atravessa a superfície delimitada pelo contorno ℓ . O integral de circulação do campo \bar{H} é designado por **Força magnetomotriz** e é expresso em Ampere-espira [Ae]

Esta relação é conhecida como **Lei de Ampere**.

A utilização de materiais ferromagnéticos no contexto da conversão electromecânica de energia justifica-se com o facto de estes materiais permitirem a obtenção de elevados valores de **densidade de fluxo magnético** (ou **indução magnética**), B , (e, portanto, de força e energia) com relativamente baixos valores

de campo magnético, H .

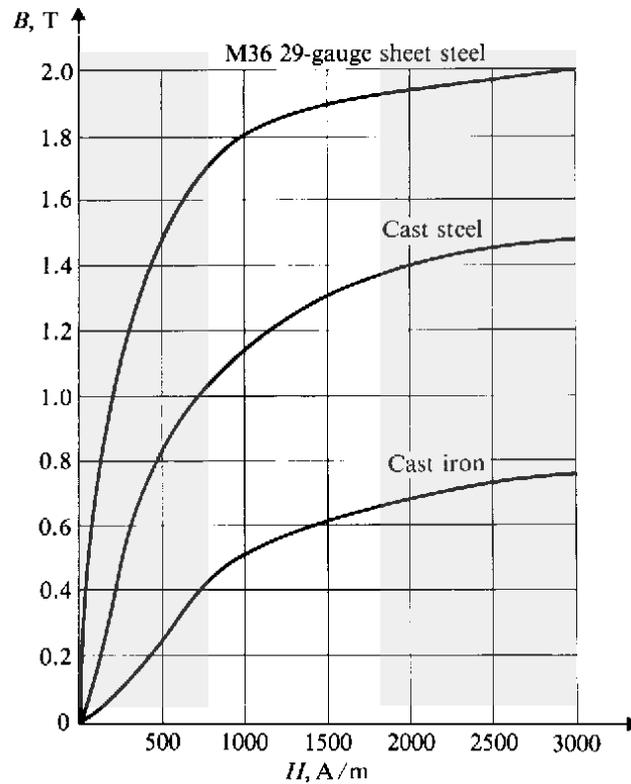


Figura 5.1 - Característica de magnetização

A figura anterior ilustra a relação $B-H$ de três materiais diferentes, sendo clara a diferença entre os valores de B obtidos com cada um deles, para um mesmo valor de H ; a relação $B-H$ é denominada característica de magnetização e é uma propriedade de cada material. Matematicamente traduz-se por,

$$B = \mu(H) H \quad (5.9)$$

onde $\mu(H)$ representa a **permeabilidade magnética**, cujas unidades são Henry por metro [H/m]. Dificilmente a permeabilidade magnética pode ser traduzida por uma expressão matemática e, por essa razão, as características magnéticas são, geralmente, apresentadas na forma gráfica obtida através de ensaios experimentais.

Para valores de H relativamente baixos os materiais apresentam um comportamento próximo do linear. À medida que se intensifica o campo magnético, o conseqüente aumento de fluxo é cada vez menor, atingindo-se um ponto onde, por mais que se intensifique o campo não é possível obter valores superiores de B ; esta zona da característica de magnetização denomina-se de "saturação". Se se puder assumir estar a trabalhar na zona linear da característica de magnetização, a expressão (5.9) resulta,

$$B = \mu H \quad (5.10)$$

A permeabilidade magnética dos materiais pode ser expressa em valores relativos da permeabilidade magnética do vazio, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$,

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (5.11)$$

e, sem grande erro, pode assumir-se que a permeabilidade magnética do ar é semelhante à do vazio.

$$\mu_{ar} = \mu_0 \quad (5.12)$$

Para introduzir o conceito de **circuito magnético**, considere-se uma bobine de N espiras enroladas à volta de um núcleo toroidal (Figura 5.2).

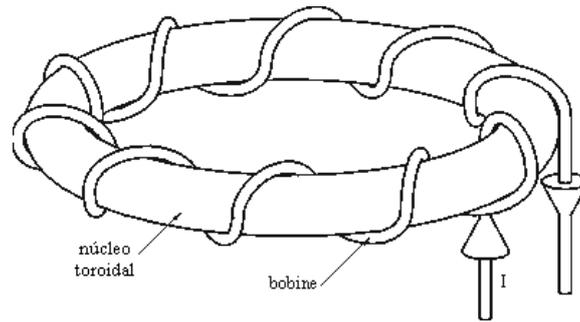


Figura 5.2 - Bobine num núcleo toroidal

Pode-se calcular o campo magnético criado pela corrente I que circula na bobine, aplicando a Lei de Ampère aos contornos circulares situados nos planos "cortados" pelas correntes, isto é, contornos cujos centros se situam no eixo de simetria da bobine (Figura 5.3).

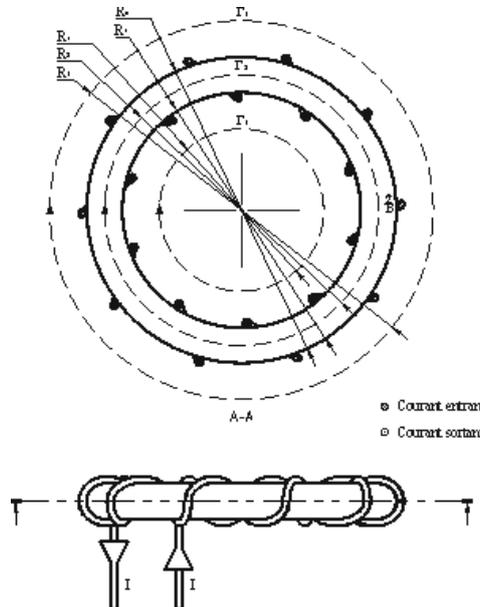


Figura 5.3 - Esquema representativo dos contornos de integração

Por razões de simetria geométrica, nos contornos de integração escolhidos, o campo de indução B induzido pela corrente I que circula na bobine é de amplitude constante e é tangente aos contornos de integração escolhidos. Atendendo a (5.8) e (5.9) pode deduzir-se:

- se o contorno tem um raio R_1 inferior a R_i , raio interior do núcleo toroidal (contorno ℓ_1 da Figura 5.3)³

$$\oint_{\ell_1} \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{\ell} = 2\pi \frac{R B}{\mu_0} = 0 \tag{5.13}$$

- se o contorno tem um raio R_2 superior a R_i e inferior a R_e , raio exterior do núcleo toroidal (contorno ℓ_2 da Figura 5.3)

³ na realidade, para todo o contorno que se situe num plano que não corte a bobine.

$$\oint_{\ell_2} \frac{\bar{B}}{\mu} d\bar{\ell} = 2\pi \frac{R B}{\mu} = N I \quad (5.14)$$

- finalmente, se o contorno tem um raio R_3 superior a R_2 (contorno ℓ_3 da Figura 5.3)

$$\oint_{\ell_3} \frac{\bar{B}}{\mu_0} d\bar{\ell} = 2\pi \frac{R B}{\mu_0} = N I - N I = 0 \quad (5.15)$$

onde μ representa a permeabilidade magnética do material constitutivo do núcleo toroidal.

Constata-se que o campo de indução magnética é nulo em qualquer ponto fora do núcleo toroidal. Todo o fluxo induzido pela corrente I circula no interior deste volume, tal como a corrente eléctrica também só circula nos materiais condutores. Por analogia com os circuitos eléctricos, pode definir-se o núcleo toroidal como um **circuito magnético**.

Se o raio interior R_i e o raio exterior R_e do núcleo toroidal têm valores muito próximos (o que equivale a dizer que a dimensão das espiras é muito reduzida face ao raio médio ($R_{méd} = \frac{R_i + R_e}{2}$), pode admitir-se, sem grande erro, que os contornos de integração situados no interior do núcleo toroidal têm todos, aproximadamente, o mesmo comprimento $2\pi R_{méd}$.

Esta hipótese permite admitir que o campo de indução magnética é praticamente constante em todos os pontos de uma secção circular do núcleo (secção perpendicular ao núcleo). Como, por outro lado, o campo de indução \bar{B} é perpendicular em todos os pontos desta secção (porque é tangente ao contorno de integração), o **fluxo magnético** Φ através de uma secção circular do núcleo (também designado por **fluxo por espira**), vale, aproximadamente:

$$\Phi = \iint_S \bar{B} d\bar{S} = B S \quad (5.16)$$

onde S representa a secção perpendicular ao núcleo (secção de forma circular, neste caso). Combinando as expressões (5.14) e (5.16), obtém-se:

$$\Phi = \frac{\mu S}{\ell} N I \quad (5.17)$$

sendo $\ell = 2\pi R_{méd}$

Designa-se :

- $Fmm = N I$ a **força magnetomotriz** que se exprime em Ampère-espira [Ae] ;
- $R_m = \frac{\ell}{\mu S}$ a **relutância magnética** do circuito magnético que se exprime em Ampère-espira por Weber [Ae/Wb]

o que permite reescrever (5.17) sob a forma :

$$Fmm = R_m \Phi \quad (5.18)$$

Esta expressão é conhecida como **Lei de Hopkinson**.

Com os conceitos anteriores, podem estabelecer-se analogias entre os circuitos magnéticos e os circuitos eléctricos:

- ao fluxo magnético Φ que circula num circuito magnético, corresponde a corrente eléctrica I que circula num circuito eléctrico,
- à força magnetomotriz F_{mm} , corresponde a força electromotriz U ;
- à relutância magnética R_m de um circuito magnético de comprimento ℓ , secção S e de permeabilidade μ , corresponde a resistência R de um condutor eléctrico de comprimento ℓ , secção S e de condutividade σ ; tem-se $R_m = \frac{\ell}{\mu S}$ e $R = \frac{\ell}{\sigma S}$;
- finalmente, à lei de Hopkison, $F_{mm} = R_m \Phi$, corresponde a lei de Ohm, $U = R I$.

Pode igualmente definir-se a permeância $P_m = 1/R_m$ de um circuito magnético que corresponde à condutância $G = 1/R$ de um circuito eléctrico.

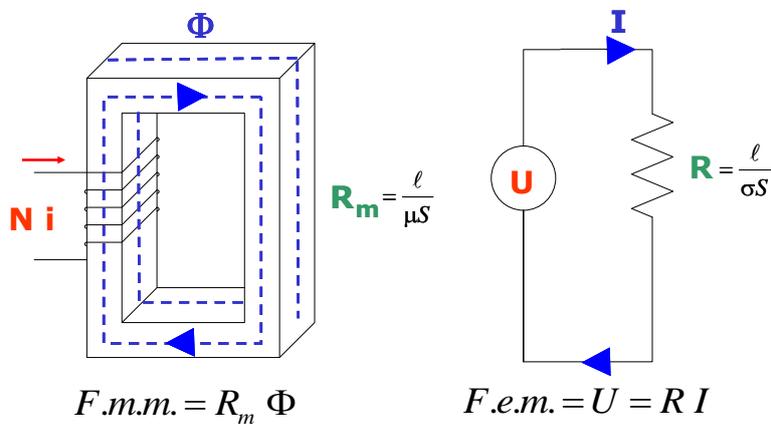


Figura 5.4 - Analogia circuitos magnéticos / circuitos eléctricos.

Tabela 5.1 - Analogia entre circuitos magnéticos e circuitos eléctricos.

Circuito magnético		Circuito eléctrico	
Densidade de Fluxo (ou indução)	$B[T]$ ou $[Wb / m^2]$	Densidade de corrente	$J [A / m^2]$
Fluxo magnético	$\Phi [Wb]$	Corrente eléctrica	$I [A]$
Força magnetomotriz	$F_{mm} [Ae]$	Força electromotriz	$F_{em} [V]$
Relutância magnética	$R_m [Ae / Wb]$	Resistência	$R [\Omega]$
Lei de Hopkison	$F_{mm} = R_m \Phi$	Lei de Ohm	$F_{em} = R I$
Campo Magnético	$H [A / m]$	Campo Eléctrico	$E [V / m]$
Permeabilidade	$\mu [H / m]$	Condutividade	$\sigma [S / m]$
	$\sum \Phi_k = 0$	Lei dos nós	$\sum i_k = 0$

Como exemplo, vai aplicar-se a noção de circuito magnético à modelização do electroíman representado na

Figura 5.5, no qual se admite que o fluxo magnético está confinado no interior das peças de material ferromagnético e no entreferro que as separa (ausência de dispersão).

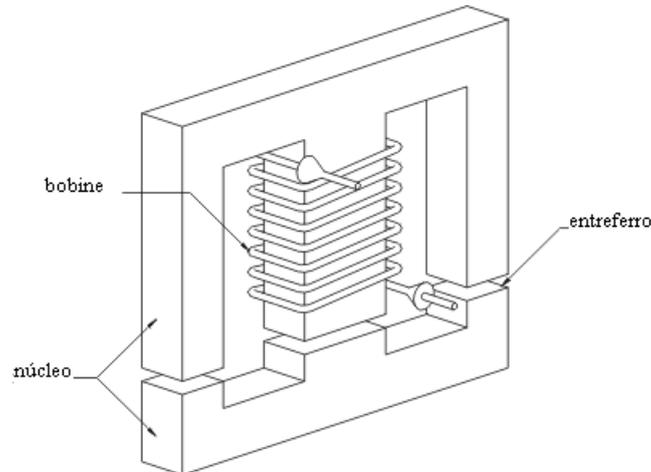


Figura 5.5 - Representação esquemática de um electroímã

Um cálculo através do método dos elementos finitos (Figura 5.6) permite verificar a pertinência da hipótese admitida, de o fluxo se encontrar confinado às peças de material ferromagnético e aos três entreferros

A hipótese admitida corresponde a negligenciar o fluxo de fugas, também designado por dispersão (fluxo que não atravessa os entreferros). Este fluxo de fugas é tanto menor quanto menor for o entreferro a atravessar ou quanto maior for a permeabilidade magnética relativa do material ferromagnético ⁴

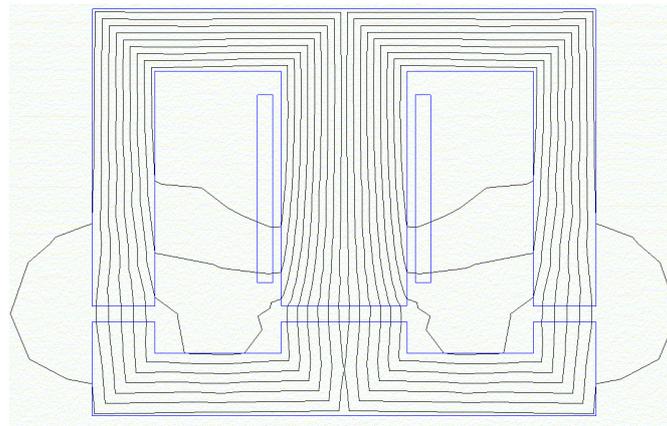


Figura 5.6 - Esquemática do fluxo magnético através de elementos finitos

⁴ Admitindo que os materiais magnéticos estão pouco saturados.

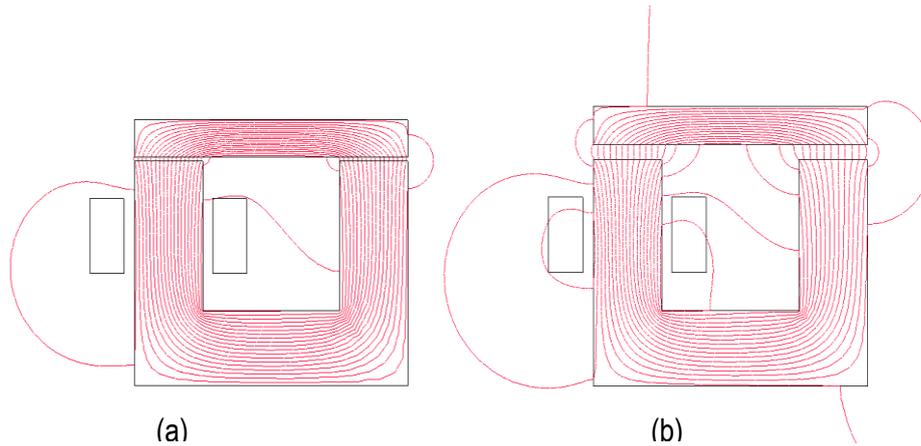


Figura 5.7 - Esquematização do fluxo magnético para um entreferro de 1 mm (a) e um entreferro de 3 mm (b)

Atendendo à simetria geométrica do circuito, é possível o seu estudo utilizando apenas metade do circuito (Figura 5.8). Os fluxos que circulam em cada um dos segmentos laterais são iguais e correspondem a metade do fluxo que passa pelo segmento central ou, o que é o mesmo, correspondem ao fluxo que passa em metade do segmento central.

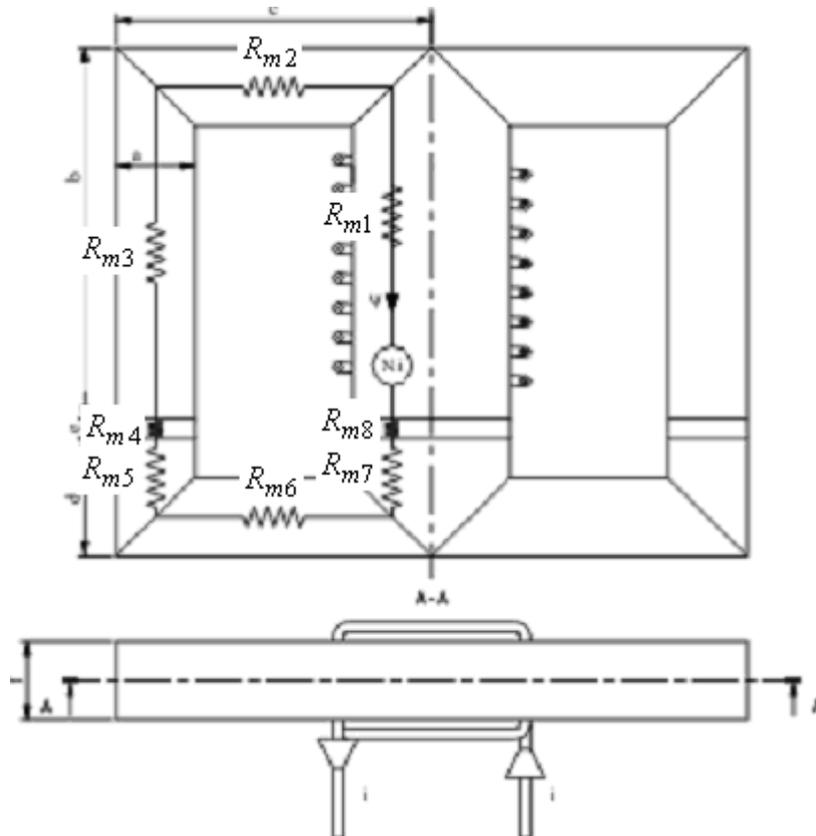


Figura 5.8 - Simetria geométrica do circuito magnético

Conhecido o comprimento médio ℓ e a secção S dos diferentes segmentos do circuito magnético assim como a permeabilidade magnética μ do material que os constitui, podem-se calcular as nove relutâncias parciais do circuito, a partir da fórmula genérica:

$$R_m = \frac{\ell}{\mu S}$$

(5.19)

Se μ_r for a permeabilidade relativa do material ferromagnético que constitui o núcleo ($\mu = \mu_r \mu_0$), permeabilidade esta que se supõe constante para qualquer valor de corrente I (o que equivale a desprezar a saturação), obtêm-se:

$$R_{m1} = R_{m3} = \frac{b - \frac{a}{2}}{\mu_r \mu_0 a f}$$

$$R_{m2} = R_{m6} = \frac{e - a}{\mu_r \mu_0 a f}$$

$$R_{m4} = R_{m8} = \frac{e}{\mu_r \mu_0 a f}$$

$$R_{m5} = R_{m7} = \frac{b - \frac{e}{2}}{\mu_r \mu_0 a f}$$

Os fluxos que circulam em cada um dos segmentos laterais (iguais a metade do fluxo do segmento central do circuito) obtêm-se através de :

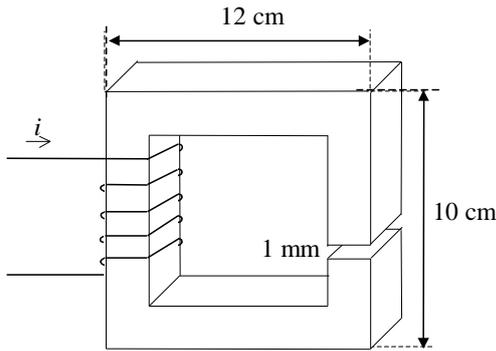
$$\frac{\Phi}{2} = \frac{N I}{\sum_{i=1}^8 R_{mi}} = \frac{N I \mu_r \mu_0 a f}{2e + \frac{2b + 2c + 2d - 4a}{\mu_r}}$$

Note-se que, se o comprimento total do circuito é negligenciável face a μ_r vezes o comprimento total dos entreferros, não se comete um grande erro na relação fluxo-corrente, se se considerar que a relutância total do circuito é apenas a relutância devida aos entreferros ⁵. Para um μ_r superior a 1000 e entreferros inferiores a 1mm, esta aproximação é válida desde que o comprimento total do circuito seja inferior a 2 m.

5.2.1 Exemplo

Considere o circuito magnético representado na figura constituído por um núcleo de ferro de secção quadrangular de 1 cm² de área com as dimensões indicadas e um entreferro de 1 mm. A bobine de 180 espiras é percorrida por uma corrente de 5A. Admita que o ferro tem permeabilidade relativa igual a 800 e que a permeabilidade do ar pode ser aproximada à do vazio ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$).

⁵ É este tipo de simplificação que se efectua nos conversores electromagnéticos, quando se admite que a permeabilidade dos materiais magnéticos que os constituem é infinita.



a) Determine o valor da relutância total do circuito

Pela Lei de Ampere $\rightarrow \oint_{\ell} \vec{H} d\ell = N I$

desprezando a dispersão e os efeitos terminais $\rightarrow H_{Fe} \ell_{Fe} + H_{ar} \ell_{ar} = N I$

admitindo linearidade magnética ($B = \mu H$) $\rightarrow \frac{B_{Fe}}{\mu_{Fe}} \ell_{Fe} + \frac{B_{ar}}{\mu_{ar}} \ell_{ar} = N I$

por definição, o fluxo por espira na bobine é: $\Phi \equiv \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad [Wb]$

admitindo que não há dispersão e que em todo o circuito se tem \vec{B} paralelo a $\vec{n} \rightarrow \Phi = B S$

obtém-se, $\frac{\Phi_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} \ell_{Fe} + \frac{\Phi_{ar}}{\mu_{ar} S_{ar}} \ell_{ar} = N I$

por definição, a relutância magnética do circuito é: $R_m \equiv \frac{\ell}{\mu S}$

a expressão anterior toma a forma, $\rightarrow R_{Fe} \Phi_{Fe} + R_{ar} \Phi_{ar} = N I$

como se admitiu não haver dispersão $\Rightarrow \Phi_{Fe} = \Phi_{ar} = \Phi$

resulta, $\rightarrow (R_{Fe} + R_{ar}) \Phi = N I$

Cálculo da relutância magnética:

$$R_{Fe} = \frac{\ell_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} = \frac{[11+11+9+(9-0,1)] \times 10^{-2}}{800 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^{-4}} \approx 4 \times 10^6 \quad Ae \quad Wb^{-1}$$

$$R_{ar} = \frac{\ell_{ar}}{\mu_{ar} S_{ar}} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^{-4}} \approx 8 \times 10^6 \quad Ae \quad Wb^{-1}$$

A relutância magnética total será: $R_{TOTAL} = R_{Fe} + R_{ar} = 12 \times 10^6 \quad Ae \quad Wb^{-1}$

b) Determine o valor do fluxo por espira

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{N I}{(R_{Fe} + R_{ar})} = \\ &= \frac{180 \times 5}{12 \times 10^6} \approx 75 \times 10^{-6} \text{ Wb} = 75 \text{ } \mu\text{Wb}\end{aligned}$$

c) Determine o valor do campo densidade de fluxo (ou indução magnética)

$$\Phi = B S \Leftrightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$

como a secção é uniforme em todo o circuito \Rightarrow

$$B_{Fe} = B_{ar} = B = \frac{\Phi}{S} = \frac{75 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-4}} = 0,75 \text{ T}$$

d) Determine o valor do campo magnético

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_{Fe}} = \frac{0,75}{800 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 746 \text{ A m}^{-1}$$

$$H_{ar} = \frac{B}{\mu_{ar}} = \frac{0,75}{4\pi \times 10^{-7}} = 596\,831 \text{ A m}^{-1}$$

5.3 Variação no tempo – Noção de força electromotriz

Quando um campo magnético varia no tempo induz-se no espaço um campo eléctrico de acordo com a Lei de Faraday

$$\begin{aligned}\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{d}{dt} (N\Phi)\end{aligned}\tag{5.20}$$

que determina que o integral de linha do campo eléctrico \vec{E} ao longo de um percurso fechado c iguala a variação do fluxo magnético que atravessa a superfície S delimitada por esse mesmo contorno (Figura 5.9). O integral de circulação do campo eléctrico \vec{E} é designado por força electromotriz e é expresso em Volt [V]. Apresentando a bobine uma resistência interna representada por r , a expressão anterior reduz-se a

$$-u + ri = -\frac{d\Psi}{dt}\tag{5.21}$$

onde

$$\Psi = N \Phi\tag{5.22}$$

se define como **fluxo ligado** com a bobine de N espiras e

$$e = \frac{d\Psi}{dt}\tag{5.23}$$

representa a força electromotriz ou tensão induzida aos terminais da bobine por acção da variação do fluxo, Ψ , com ela ligado.

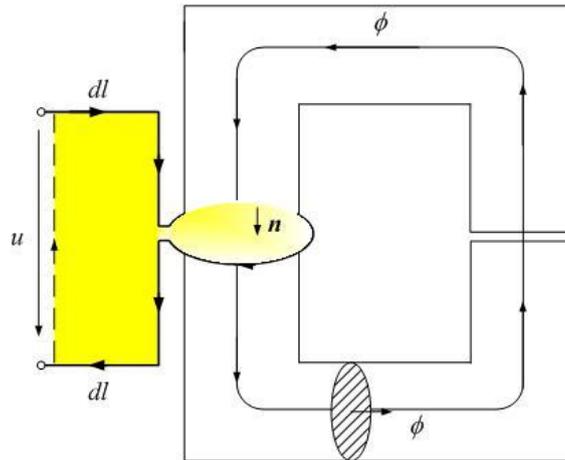


Figura 5.9 - Circuito ilustrativo da Lei de Faraday

Tal como o fluxo magnético, Φ , o fluxo ligado com a bobine também tem por unidades o Weber [Wb].

Se se puder considerar linearidade do circuito magnético, a expressão (5.17) é equivalente a

$$\Phi = \frac{Ni}{R_m} \tag{5.24}$$

peço que, atendendo a (5.22), se obtém para o fluxo ligado

$$\Psi = \frac{N^2 i}{R_m} \tag{5.25}$$

Define-se **indutância**, L , de uma bobine à relação entre fluxo ligado, Ψ , e corrente, i ,

$$L = \frac{\Psi}{i} \tag{5.26}$$

peço que, de acordo com o exposto anteriormente, se obtém,

$$L = \frac{N^2}{R_m} \tag{5.27}$$

As indutâncias são medidas em Henry [H].

Resultado similar poderia ser obtido substituindo (5.26) em (5.21), resultando

$$u = ri + \frac{N^2}{R_m} \frac{di}{dt} \tag{5.28}$$

onde se admitiu que não havia variação temporal da relutância magnética nem do número de espiras.

Atendendo a (5.27), a expressão anterior é a apresentada no capítulo "Circuitos Eléctricos" para a tensão aos terminais de uma bobine que se considerou não estar animada de movimento, de resistência interna r e percorrida por uma corrente i .

Genericamente, a tensão aos terminais de uma bobine apresenta uma parcela devida à queda de tensão na resistência (se a bobine tiver resistência interna) e uma queda de tensão devida à variação do fluxo com ela

ligado

$$u = ri + \frac{d\Psi}{dt} \tag{5.29}$$

Atendendo à definição de indutância (5.26) obtém-se

$$u = ri + \frac{d(Li)}{dt} \tag{5.30}$$

pelo que será

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \tag{5.31}$$

onde o último termo contabiliza a parcela de força electromotriz devida a variação de indutância.

No caso de circuitos magnéticos com múltiplos enrolamentos, como o representado na Figura 5.10, a força magnetomotriz total resulta da acção dos dois enrolamentos.

No caso representado, os sentidos das duas correntes foram escolhidos para que ambas as bobines produzam fluxos concordantes, isto é, com o mesmo sentido.

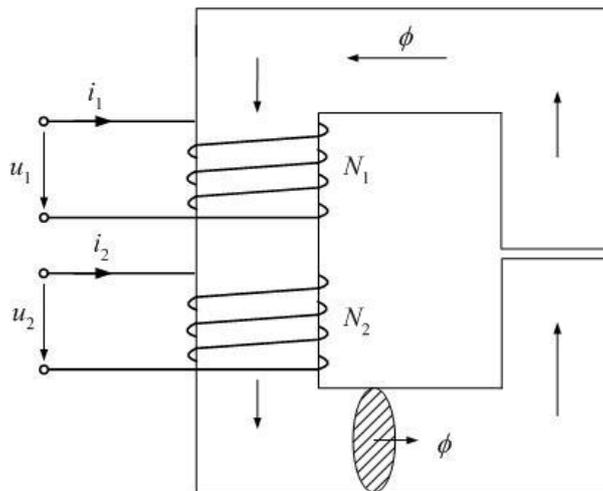


Figura 5.10 - Circuito magnético com dois enrolamentos

A força magnetomotriz total é

$$Fmm = N_1 i_1 + N_2 i_2 \tag{5.32}$$

Atendendo a (5.17), o fluxo no circuito magnético (resultado da acção das correntes nos dois enrolamentos) é representado por

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m} \tag{5.33}$$

De acordo com a definição, o fluxo ligado com o enrolamento 1 é dado por

$$\Psi_1 = \frac{N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2}{R_m} \tag{5.34}$$

expressão que pode ser reescrita na forma

$$\Psi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (5.35)$$

onde

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad (5.36)$$

representa o **coeficiente de indução própria** (ou **auto-indução**) do enrolamento 1, sendo

$$L_{11}i_1 \quad (5.37)$$

a parcela de fluxo ligado do enrolamento 1 devido à sua própria corrente, e

$$L_{12} = \frac{N_1N_2}{R_m} \quad (5.38)$$

representa o **coeficiente de indução mútua** entre os enrolamentos 1 e 2, sendo

$$L_{12}i_2 \quad (5.39)$$

a parcela de fluxo ligado do enrolamento 1 devido à corrente que circula no enrolamento 2.

De forma análoga

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{R_m} \quad (5.40)$$

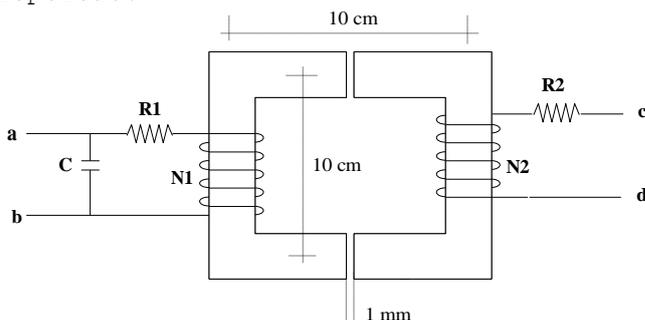
é o coeficiente de indução própria do enrolamento 2, e

$$L_{21} = \frac{N_1N_2}{R_m} = L_{12} \quad (5.41)$$

o **coeficiente de indução mútua** entre os enrolamentos 1 e 2.

5.3.1 Exemplo

Exemplo 1 - Considere o seguinte sistema electromagnético. Admita que não há dispersão.



$$N_1 = 200 \text{ esp.} \quad \mu_{r_{Fe}} = 800 \quad S = 4 \text{ cm}^2$$

$$N_2 = 100 \text{ esp.} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

Determine o valor da relutância magnética do circuito magnético;

$$R_m = \frac{l_{Fe} - l_{ar}}{\mu_{r_{Fe}} \mu_{ar} \times S} + \frac{l_{ar}}{\mu_{ar} \times S} \quad \text{Ae Wb}^{-1}$$

$$R_m = \frac{4 \times 10 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-3}}{800 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} + \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} \approx 5 \times 10^6 \text{ Ae Wb}^{-1}$$

$$R_m \approx \frac{l_{ar}}{\mu_{ar} \times S} \approx 3,9 \times 10^6 \text{ Ae Wb}^{-1}$$

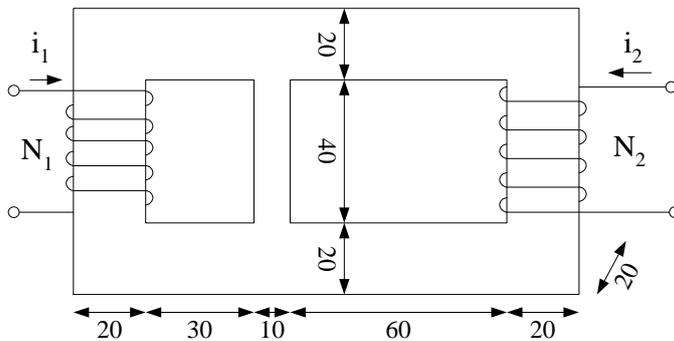
Determine os valores dos coeficientes de auto-indução das bobinas e o coeficiente indução mútua;

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m} = \frac{200^2}{5 \times 10^6} = 0,008 \text{ H} = 8 \text{ mH}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_m} = \frac{100^2}{5 \times 10^6} = 0,002 \text{ H} = 2 \text{ mH}$$

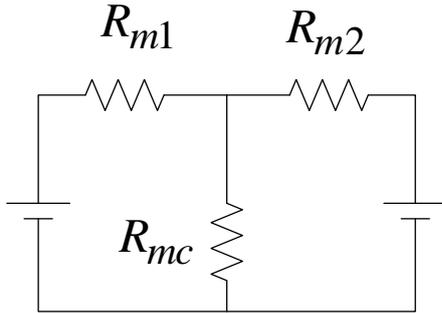
$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \frac{200 \times 100}{5 \times 10^6} = 0,004 \text{ H} = 4 \text{ mH}$$

Exemplo 2 - Considere o sistema representado na figura. As dimensões estão expressas em milímetros.



Admita que a permeabilidade magnética relativa é constante e igual a 1500. Os números de espiras são iguais a $N_1=100$ e $N_2=200$ respectivamente. O fluxo de dispersão pode ser ignorado.

Desenhe um circuito eléctrico equivalente e calcule o valor das relutâncias magnéticas.



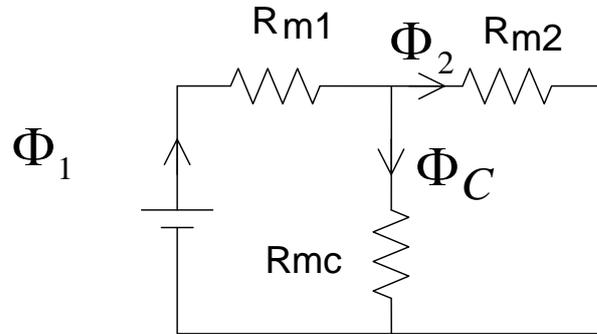
$$R_{m1} = \frac{2 \times (45 \times 10^{-3}) + 60 \times 10^{-3}}{1500\mu_0(20 \times 10^{-3})^2} = 2 \times 10^5 \text{ Ae } \text{Wb}^{-1}$$

$$R_{m2} = \frac{2 \times (75 \times 10^{-3}) + 60 \times 10^{-3}}{1500\mu_0(20 \times 10^{-3})^2} = 3 \times 10^5 \text{ Ae } \text{Wb}^{-1}$$

$$R_{mc} = \frac{60 \times 10^{-3}}{1500\mu_0(10 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})} = 1,6 \times 10^5 \text{ Ae } \text{Wb}^{-1}$$

b) Considerando que a corrente na bobina de N_1 espiras é percorrida por 30 mA e que a bobina 2 está em circuito aberto, determine o fluxo ligado com as duas bobinas.

Se a bobina 2 está em vazio não existe força magnetomotriz 2 pelo que o circuito equivalente é:



O fluxo por espira Φ_1 será:
$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{mc}}{R_{m2} + R_{mc}}} = 10 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

Pelo que o fluxo ligado com a bobine 1 é: $\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = 10 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

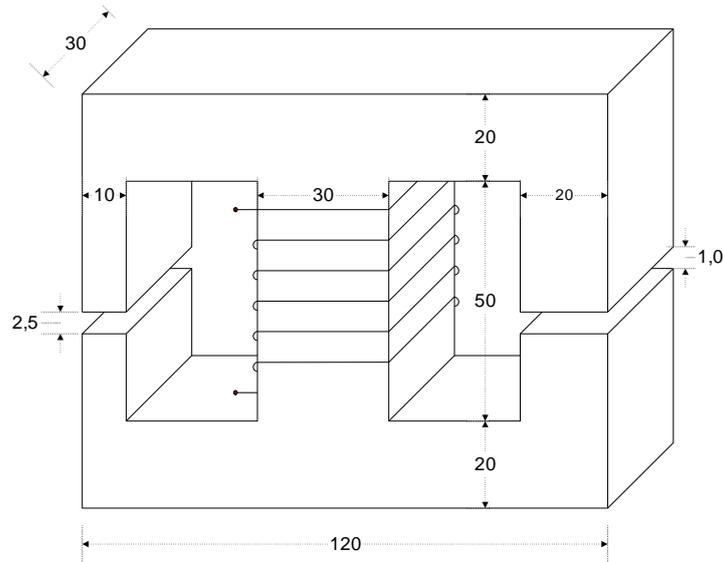
Das equações do circuito obtém-se
$$\begin{cases} \Phi_c R_{mc} = \Phi_2 R_{m2} \\ \Phi_1 = \Phi_c + \Phi_2 \end{cases}$$

que permite calcular
$$\Phi_2 = \frac{R_{mc}}{R_{m2} + R_{mc}} \Phi_1 \approx 3,6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

Pelo que o fluxo ligado com a bobine 1 é: $\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = 7 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

5.3.2 Exercícios

Exercício 1 - Um electroímã tem as dimensões indicadas na figura e é excitado por uma bobina concêntrica na perna central. O ferro tem uma permeabilidade magnética relativa igual a 800 e a bobina tem 1200 espiras. Determine o valor da indução magnética em cada entreferro quando na bobina circula uma corrente igual a 1 A. Explícite as hipóteses que entenda fazer e compare o resultado que se obtém supondo a permeabilidade do ferro infinita ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ A/m}$). As dimensões encontram-se em milímetros.



(Soluções: $B_1 \approx 0,5T$, $B_2 \approx 1,2T$; $B_1 \approx 0,6T$, $B_2 \approx 1,5T$)

Exercício 2 - Pretende-se projectar um circuito, por forma a obter um campo de indução magnética no entreferro, de $1T$. A secção do circuito magnético é quadrangular e pode considerar-se uniforme. Explicitando as hipóteses que considerar necessárias, e atendendo ao sistema representado na figura:

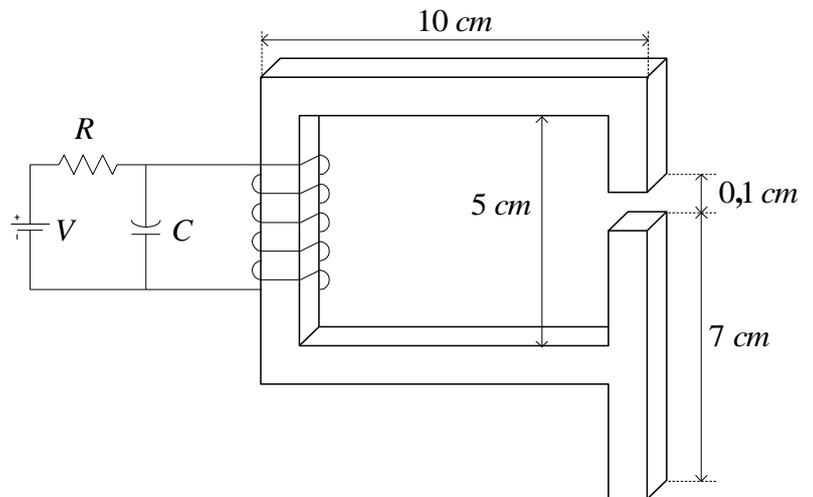
$$\text{Secção} = 1 \text{ cm}^2$$

$$C = 10 \text{ mF} \quad R = 5 \Omega$$

$$V = 20 \text{ V}$$

$$\mu_{ar} \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

$$\mu_{rFe} = 800$$



- dimensione o valor da relutância magnética do circuito;
- dimensione o valor do campo magnético no entreferro e no ferro;
- dimensione o valor do fluxo magnético e da força magnetomotriz do circuito;
- dimensione o número de espiras da bobine e o seu coeficiente de auto-indução ;
- Admita que a bateria foi substituída por uma fonte de tensão alternada de valor eficaz $V_{ef} = 20 \text{ V}$ e $f = 50 \text{ Hz}$. Qual seria a amplitude complexa da corrente pedida à fonte.

(Soluções: a) $R_m \approx 11 \times 10^6 \text{ Ae Wb}^{-1}$ b) $H_{ar} \approx 796 \text{ kAe m}^{-1}$ e $H_{Fe} \approx 1 \text{ kAe m}^{-1}$, c) $\Phi = 0,1 \text{ mWb}$ e $F.m.m = 1100 \text{ Ae}$, d) $N \approx 275 \text{ esp}$ e $L \approx 7 \text{ mH}$ e) $\bar{I} \approx 2,4 e^{-j53} \text{ A}$)

Exercício 3 - Pretende-se projectar uma bobine com um coeficiente de auto-indução de 10 mH . A secção do circuito magnético é circular.

$$r_{\text{interior}} = 18 \text{ cm} \quad r_{\text{exterior}} = 22 \text{ cm}$$

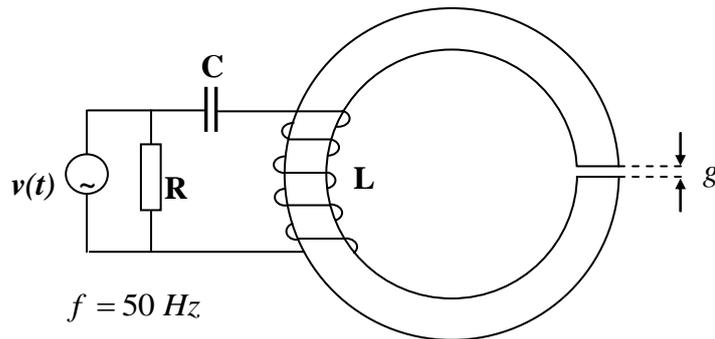
$$N_{\text{espiras}} = 200$$

$$\mu_{rFe} = 800$$

$$\mu_{ar} \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

$$R = 1 \ \Omega \quad C = 2 \text{ mF}$$

$$v(t) = \sqrt{2} V_{ef} \text{ sen}(2\pi f t)$$



Explicitando as hipóteses que considerar necessárias, e atendendo ao sistema representado na figura:

- dimensione o valor necessário para o entreferro, g;
- dimensione o valor eficaz da corrente na bobine, para criar um campo de indução magnética no entreferro de valor eficaz 1 T;
- dimensione o valor eficaz da tensão da fonte, por forma a que na bobine circule a corrente calculada na alínea anterior;
- Admita que a fonte de tensão alternada foi substituída por uma bateria de 15 V; determine o fluxo no entreferro e no ferro.

(Soluções: a) $g \approx 6,2 \times 10^{-3} \text{ m}$, b) $I \approx 25,1 \text{ A}$, c) $V_{ef} \approx 39 \text{ V}$ d) $\Phi = 0$)

Capítulo 6 - Princípios de Conversão Electromecânica de Energia

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se os princípios de conversão electromecânica de energia segundo a visão da teoria dos circuitos. Nesta teoria, para o caso de sistemas magnéticos, as máquinas são vistas como circuitos eléctricos ligados magneticamente. Os coeficientes de auto-indução e de indução mútua são funções de uma ou de mais variáveis. Para o caso de sistemas magnéticos lineares, a relação entre os fluxos e as correntes é determinada por uma matriz, a matriz dos coeficientes de indução, cujo conhecimento contém os aspectos fundamentais da conversão electromecânica de energia.

Embora os vários dispositivos de conversão funcionem baseados em princípios similares, as estruturas destes dependem da sua função.

Os *transdutores* são dispositivos que se empregam na medição e controlo. Normalmente funcionam em condições lineares, saída proporcional à entrada. Entre os muitos exemplos referem-se os microfones, os taquímetros, os acelerómetros, os sensores de temperatura, de pressão etc.

Os *actuadores* são dispositivos que produzem força. Como exemplos têm-se os relés, os electroímãs, os motores passo-a-passo etc.

A terceira categoria de dispositivos inclui equipamentos de *conversão contínua de energia*, tais como os motores e os geradores.

Por princípio os dispositivos são reversíveis, isto é, os actuadores podem funcionar alternativamente como actuadores ou transdutores e os motores como motores ou geradores.

O conceito fundamental para a análise dos conversores electromecânicos é o *campo de acoplamento*. Este campo corresponde ao campo magnético nos sistemas magnéticos que são a maioria dos dispositivos. Existem também alguns sistemas baseados no campo eléctrico que são normalmente designados por sistemas electrostáticos.

Os objectivos que se pretendem atingir com este capítulo são:

- Ajudar na compreensão de como ocorre a conversão electromecânica de energia.
- Mostrar como desenvolver modelos dinâmicos para os conversores electromecânicos com os quais possa ser determinado o seu desempenho.

6.2 Princípio da conservação de energia

O princípio da conservação de energia estabelece que, numa transformação, a energia total se mantém constante, isto é, que esta não é criada nem destruída, apenas muda de forma. Este princípio vai servir de ferramenta para determinar as características do acoplamento electromecânico. Além das equações resultantes da aplicação deste princípio, é necessário ter em atenção as leis do campo eléctrico e magnético, as leis dos circuitos eléctricos e magnéticos e a mecânica newtoniana.

Como as frequências e velocidades são relativamente baixas comparadas com a velocidade da luz, pode admitir-se a presença de regimes em que o *campo é quase estacionário*, sendo a radiação electromagnética desprezável. Assim, a conversão electromecânica de energia envolve energia em quatro formas e o princípio de conservação de energia leva à seguinte relação entre essas formas:

$$\begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Eléctrica} \\ \text{de Entrada} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Mecânica} \\ \text{de saída} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Convertida} \\ \text{em Calor} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

A equação 6.1, escrita na convenção motor, é aplicável a todos os dispositivos de conversão electromecânica. Nesta convenção, em funcionamento motor, todas as parcelas têm valores positivos. Em funcionamento gerador, a equação 6.1 continua a ter validade, mas as parcelas referentes à energia eléctrica e mecânica tomam valores negativos. Para o estudo dos sistemas em funcionamento gerador, é mais conveniente utilizar a mesma expressão, mas escrita na convenção gerador, 6.2.

$$\begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Mecânica} \\ \text{de Entrada} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Eléctrica} \\ \text{de saída} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Convertida} \\ \text{em Calor} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Neste capítulo adopta-se a convenção motor.

A conversão irreversível de energia em calor tem três causas:

- Perdas por efeito de Joule nas resistências dos enrolamentos que fazem parte dos dispositivos. Estas perdas são frequentemente designadas por **perdas no cobre**.
- Parte da potência mecânica desenvolvida pelo dispositivo é absorvida no atrito e ventilação e então convertida em calor. Estas perdas são designadas por **perdas mecânicas**.
- Perdas magnéticas (em dispositivos magnéticos) ou dieléctricas (em dispositivos eléctricos). Estas **perdas** estão associadas ao **campo de acoplamento**.

Além destes tipos de perdas deve-se, em estudos mais aprofundados, considerar também perdas *suplementares* que têm várias causas.

Nos dispositivos magnéticos, que são de longe os mais frequentes, as perdas magnéticas são devidas a correntes de Foucault e à histerese magnética.

Na teoria que se segue são desprezadas as perdas magnéticas e as perdas dieléctricas.

As equações 6.1 e 6.2 podem ser escritas na forma da equação 6.3 onde se admite a convenção motor. Nesta expressão, as parcelas relativas às perdas que são contabilizadas, perdas mecânicas e perdas de Joule, estão associadas a outras parcelas por conveniência.

$$\begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Eléctrica} \\ \text{de Entrada} \\ \text{menos perdas} \\ \text{Eléctricas} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Mecânica} \\ \text{de saída} \\ \text{mais perdas} \\ \text{Mecânicas} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Aumento} \\ \text{de Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

O primeiro membro da equação 6.3 pode ser expresso em termos das correntes e tensões nos circuitos eléctricos do dispositivo de acoplamento.

A equação 6.3 está ilustrada com a figura 6.1. Como se consideram as perdas exteriores ao bloco central desta figura, pode afirmar-se que este bloco é um sistema conservativo e, por consequência, este poderá ser representado por uma função de estado que depende apenas das grandezas do estado final, sendo independente do modo como o sistema atingiu esse estado.

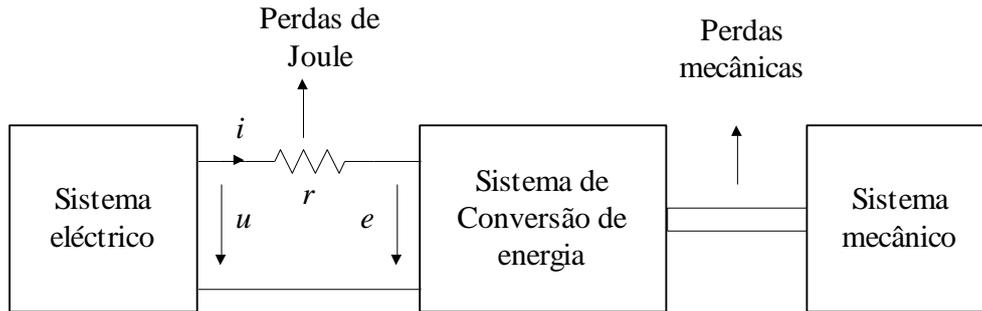


Figura 6.1. Representação geral da conversão electromecânica de energia.

Para que o dispositivo de acoplamento possa absorver energia do circuito eléctrico, o campo de acoplamento deve produzir uma reacção sobre o circuito. Esta reacção é a tensão e na figura 6.1. A reacção sobre a entrada é uma parte essencial do processo de transferência de energia entre um circuito eléctrico e outro meio qualquer.

Da discussão precedente, deverá ser evidente que as resistências dos circuitos eléctricos e o atrito e ventilação do sistema mecânico, embora sempre presentes, não representam partes importantes no processo de conversão de energia. Este processo envolve o campo de acoplamento e sua acção e reacção nos sistemas eléctrico e mecânico.

A equação 6.3 pode pôr-se na forma diferencial:

$$dW_{ele} = dW_{campo} + dW_{mec} \quad (6.4)$$

onde

dW_{ele} - Diferencial de energia recebida pelo campo de acoplamento;

dW_{campo} - Diferencial de energia do campo de acoplamento;

dW_{mec} - Diferencial de energia convertida em mecânica.

Para a análise completa dum dispositivo electromecânico, além da equação (6.4) que traduz o princípio de conversão de energia (bloco central da figura 6.1), deverá ter-se em conta as equações que traduzem a interligação ao sistema eléctrico e as equações que o interligam ao sistema mecânico. A interligação ao sistema eléctrico pode ser feita por uma ou mais vias, correspondendo a cada uma delas uma equação diferencial. A interligação ao sistema mecânico é na maioria dos casos feita através de uma única via (apenas um grau de liberdade) correspondendo a esta interligação apenas uma variável. Esta interligação é traduzida pela 2ª lei de Newton.

Quando o dispositivo for de natureza magnética, as equações que traduzem a interligação eléctrica são deduzidas da lei de Faraday.

Considerando a figura 6.1, tem-se:

$u i dt \rightarrow$ Diferencial de energia eléctrica de entrada;

$r i^2 dt \rightarrow$ Diferencial de energia de perdas de Joule;

$dW_{ele} = u i dt - r i^2 dt = (u - r i) i dt = e i dt \rightarrow$ Diferencial de energia eléctrica líquida de entrada no dispositivo de acoplamento.

Por aplicação da lei de Faraday, tem-se:

$$e = \frac{d\psi}{dt} \quad (6.5)$$

O diferencial de energia eléctrica fornecida pela fonte ao sistema, vale:

$$dW_{ele} = e i dt = \frac{d\psi}{dt} i dt = i d\psi \quad (6.6)$$

Por sua vez, a potência mecânica pode ser dada por:

$$p_{mec} = \frac{dW_{mec}}{dt} = F_{em} \frac{dx}{dt} \rightarrow dW_{mec} = F_{em} dx \quad (6.7)$$

A expressão 6.4, que traduz o princípio da conservação de energia, toma a forma:

$$i d\psi = F_{em} dx + dW_m \quad (6.8)$$

A equação 6.8 servirá para o estabelecimento das equações gerais da conversão electromecânica de energia dos sistemas electromecânicos de natureza magnética.

Resumindo, tem-se que, para a análise de um dispositivo electromecânico de natureza magnética deverá ter-se como base:

- Equação 6.4 ou 6.8
- 2ª lei de Newton
- Lei de Faraday

Por sua vez, a análise de um dispositivo electromecânico de natureza electrostática deverá ter como base:

- Equação 6.4
- 2ª lei de Newton
- Lei da conservação da carga

6.3 Expressões da força mecânica e energia

6.3.1 Máquinas em "translação" e em "rotação"

As figuras 6.2 e 6.3 representam dispositivos electromecânicos, sendo o primeiro de translação e o segundo de rotação.

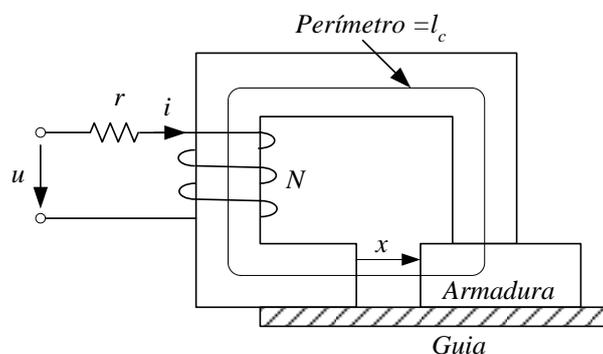


Figura 6.2. Conversor electromecânico de translação.

Na figura 6.3 tem-se um sistema que obedece ao mesmo princípio da figura 6.2. As únicas diferenças estão no parâmetro geométrico que define a posição do rotor, que é agora o ângulo θ , e que as variações de energia magnética armazenada no circuito produzem agora um binário electromecânico M_{em} em vez da força F_{em} .

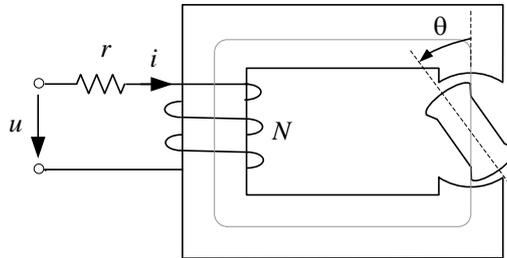


Figura 6.3. Conversor electromecânico de rotação.

Para este caso tem-se:

$$dW_{mec} = M_{em}d\theta \quad (6.9)$$

6.3.2 Expressões da força electromagnética em função da energia

Considere-se o sistema elementar da figura 6.2. Neste sistema a energia magnética depende das grandezas eléctricas e da posição da peça móvel x . Esta posição pode ser mantida fixa recorrendo a meios exteriores. Neste caso $dx=0$ e por conseguinte, da equação 6.8, tira-se:

$$i d\psi = dW_m \quad (6.10)$$

Esta expressão permite calcular a energia magnética como:

$$W_m = \int_0^\psi i(\psi', x) d\psi' \quad (6.11)$$

A figura 6.4 ilustra a equação 6.11. Nesta figura, para um determinado valor da posição $x=x_0$, a função energia é dada pela área assinalada a azul.

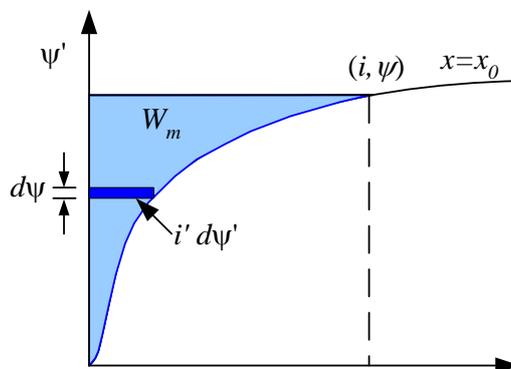


Figura 6.4. Definição da função energia magnética.

A energia magnética definida na expressão 6.11 e na figura 6.4 é uma função de estado pois representa a energia armazenada no sistema central da figura 6.1. Este sistema é conservativo uma vez que as perdas

estão consideradas no seu exterior.

A energia magnética W_m armazenada é uma função do fluxo ψ , criado pela corrente i , e da relutância R do circuito que por sua vez também é função da posição x da armadura. Assim a energia magnética é função de 2 variáveis independentes.

$$W_m = f(\psi, x) \quad (6.12)$$

Sendo a energia magnética função das variáveis de estado ψ e x , o diferencial desta função escreve-se na forma geral:

$$dW_m(\psi, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} dx \quad (6.13)$$

Introduzindo a equação (6.13) na equação (6.8) tem-se:

$$i d\psi = F_{em} dx + \frac{\partial W_m}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} dx \quad (6.14)$$

ou

$$\left(\frac{\partial W_m}{\partial \psi} - i \right) d\psi + \left(F_{em} + \frac{\partial W_m}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (6.15)$$

Como se referiu, as variáveis ψ e x são variáveis independentes. Assim, pode manter-se $dx=0$ e variar o fluxo ψ , ou alternativamente, manter-se o fluxo constante e variar a posição x . Como consequência, para que a igualdade 6.15 seja sempre verdadeira, é necessário que as funções que multiplicam $d\psi$ e dx sejam sempre nulas. Tem-se:

$$i = \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi} \quad (6.16)$$

$$F_{em} = - \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x} \quad (6.17)$$

A expressão (6.17) estabelece que a força de origem electromagnética é igual à derivada parcial da função energia magnética em função da coordenada de posição (com sinal negativo). Esta “função energia magnética” é uma função de estado e deverá estar escrita em termos do fluxo ligado ψ e da coordenada de posição x .

A figura 6.5 ilustra a equação 6.17 num sistema magnético linear onde a relação entre o fluxo e a corrente é representada por uma linha recta cujo declive depende da coordenada de posição x . Quando se mantém o fluxo constante e se varia a posição x há uma variação de energia magnética dW_m representada pela área a sombreado. No caso representado na figura 6.5, a variação de energia magnética é negativa pois, ao passar-se de $x=x_0$ para $x=x_0+\Delta x$ a energia magnética diminui. Note-se que a área do triângulo acima da recta $\psi=f(i)$ que representa a energia fica menor.

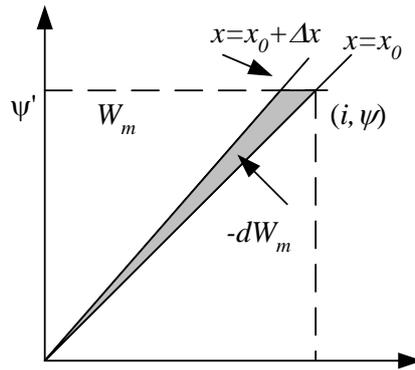


Figura 6.5. Variação de energia magnética com a posição.

Exemplo 6.1

O dispositivo representado na figura 6.2 tem um comprimento da linha média do circuito magnético l_c , uma secção A e N espiras. Considere a permeabilidade magnética relativa do ferro elevada e designa-a por μ_{rfe} .

Determine:

1. A expressão da energia magnética armazenada no dispositivo.
2. Uma expressão para a força e o seu sentido em função da coordenada de posição x .

Resolução:

1. Expressão da energia magnética

a) Cálculo da relutância magnética

a.1 Componente relativa ao ar

$$R_{mar} = \frac{x}{\mu_0 A}$$

a.2 Componente da relutância magnética relativa ao ferro

$$R_{mfe} = \frac{l_c - x}{\mu_r \mu_0 A}$$

a.3 Relutância magnética total

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 A} \left(x + \frac{l_c}{\mu_r} - \frac{x}{\mu_r} \right) \approx \frac{1}{\mu_0 A} \left(x + \frac{l_c}{\mu_r} \right)$$

b) Expressão da energia magnética armazenada.

Considerando o circuito magnético linear, a energia magnética será dada pela área do triângulo indicado na figura 6.5. Assim:

$$W_m = \frac{1}{2} i \Psi$$

Introduzindo identidades básicas da teoria do circuito magnético, podem obter-se sucessivamente as relações:

$$W_m = \frac{1}{2} F_{mm} \phi = \frac{1}{2} R_m \phi^2 = \frac{1}{2} R_m \frac{\Psi^2}{N^2} = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L} = \frac{1}{2} Li^2$$

Para a aplicação da equação 6.17, a expressão da energia magnética deverá ser função de x e ψ , ou seja, a expressão $(1/2) Li^2$ não é a expressão utilizável. Em vez disso podem utilizar-se as expressões que se seguem.

$$W_m = \frac{1}{2} R_m \phi^2 = \frac{1}{2} R_m \frac{\psi^2}{N^2} = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L}$$

2. Cálculo da força

Aplicando directamente a expressão 6.17:

$$F_{em} = - \frac{\partial W_m}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2} \frac{\partial R_m}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2} \frac{1}{\mu_0 A}$$

Pela expressão obtida pode concluir-se que a força será sempre de atracção pois é sempre negativa e, no referencial adoptado, as forças negativas têm o significado de forças de atracção. É também proporcional ao quadrado do fluxo ligado. Esta força será de amplitude constante se o fluxo ψ se mantiver constante não dependendo da coordenada de posição x .

Se o dispositivo for alimentado por uma fonte de corrente de intensidade i , ter-se-á:

$$\phi = \frac{Ni}{R_m} \quad ; \quad \psi = \frac{N^2 i}{R_m}$$

donde

$$F_{em} = - \frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{R_m^2} \frac{1}{\mu_0 A}$$

Introduzindo a expressão da relutância magnética, tem-se:

$$F_{em} = - \frac{1}{2} \mu_0 A \frac{N^2 i^2}{\left(x + \frac{l_c}{\mu_r} \right)^2}$$

Que é a expressão procurada. Conclui-se que a expressão da força, quando escrita em termos do fluxo ligado, é proporcional ao quadrado deste e não depende da posição da peça móvel; quando escrita em termos da corrente, é directamente dependente do quadrado da corrente e inversamente dependente do quadrado de $(x-x_0)$.

6.3.3 Expressões da força em função da co-energia magnética

Define-se a função co-energia magnética como:

$$W'_m(i, x) = \int_0^i \psi'(i', x) di' \quad (6.18)$$

O valor do integral corresponde à área abaixo da curva $\psi(i)$ indicada na figura 6.6.

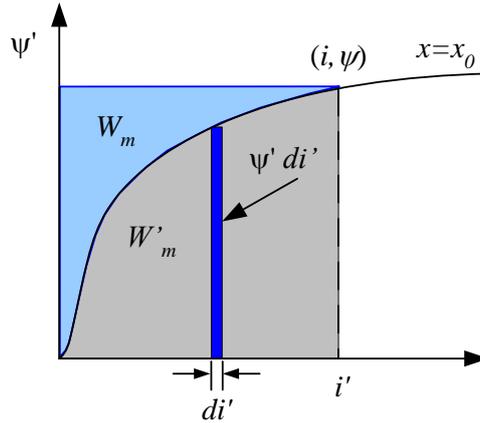


Figura 6.6. Definição de energia e co-energia magnética.

Tem-se:

$$W_m + W'_m = \psi i \quad (6.19)$$

A partir de 6.19 tira-se:

$$dW_m = -dW'_m + i d\psi + \psi di \quad (6.20)$$

Introduzindo na expressão (6.8) obtém-se:

$$i d\psi = F_{em} dx - dW'_m + i d\psi + \psi di \quad (6.21)$$

O diferencial da co-energia escreve-se:

$$dW'_m(i, x) = \frac{\partial W'_m}{\partial i} di + \frac{\partial W'_m}{\partial x} dx \quad (6.22)$$

Introduzindo a equação 6.22 na equação 6.21, tem-se:

$$0 = F_{em} dx - \frac{\partial W'_m}{\partial i} di - \frac{\partial W'_m}{\partial x} dx + \psi di \quad (6.23)$$

ou

$$\left(F_{em} - \frac{\partial W'_m}{\partial x} \right) dx + \left(\psi - \frac{\partial W'_m}{\partial i} \right) di = 0 \quad (6.24)$$

Atendendo à independência das variáveis x e i e fazendo um raciocínio semelhante ao realizado para a obtenção da expressão equivalente em função da energia, tem-se:

$$F_{em} = \frac{\partial W'_m}{\partial x} \quad (6.25)$$

$$\psi = \frac{\partial W'_m}{\partial i} \quad (6.26)$$

Obtém-se uma nova expressão para a força que se exerce sobre a armadura, igual à derivada parcial em relação a x da função co-energia magnética. Esta equação encontra-se ilustrada na figura 6.7, onde a variação da co-energia magnética se encontra representada a sombreado.

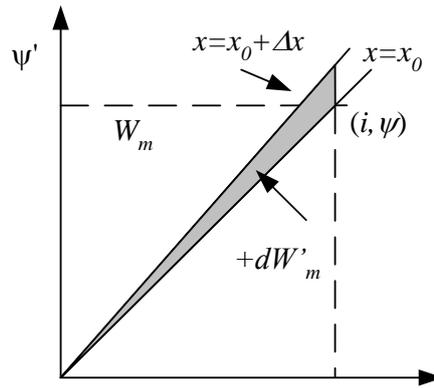


Figura 6.7. Variação de co-energia magnética com a posição.

As expressões (6.17) e (6.25) são equivalentes e válidas mesmo em caso de saturação magnética. Pode utilizar-se indistintamente uma ou outra conforme o caso em que se escolha como variáveis independentes ψ e x ou i e x . A função co-energia magnética é também uma função de estado. A força de origem electromagnética pode ser assim calculada através da expressão 6.17 ou alternativamente pela expressão 6.25.

Normalmente prefere utilizar-se a expressão que estabelece a força em função da co-energia magnética pois esta é função da corrente eléctrica que é uma grandeza utilizada na teoria dos circuitos.

Quando o circuito magnético possa ser considerado linear, as funções energia magnética e co-energia magnética tomam o mesmo valor numérico, pois os valores destas duas funções podem ser representados por áreas de triângulos semelhantes. Deve ter-se em atenção que a função energia deve ser escrita em função do fluxo ψ e da posição x ao passo que a função co-energia deve ser explicitada em função da corrente i e da posição x .

Exemplo 6.2

Utilizando a expressão 6.25, calcule a força que se exerce sobre a armadura do dispositivo no exemplo 6.1.

Resolução:

Considerando o circuito magnético linear, tem-se para a expressão da co-energia:

$$W'_m = \frac{1}{2} L(x)i^2$$

Com

$$L(x) = \frac{N^2}{R_m(x)}$$

Assim:

$$F_{em} = \frac{\partial W'_m}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{1}{R_m^2(x)} \frac{dR_m}{dx}$$

como

$$\frac{dR_m}{dx} \approx \frac{1}{\mu_0 A}$$

Tem-se:

$$F_{em} = -\frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{R_m} \frac{1}{\mu_0 A}$$

que é equivalente à expressão obtida no exemplo 6.1.

6.3.4 Expressões do binário electromagnético

Para um circuito magnético, móvel em rotação, como o desenhado na figura 6.3, os resultados precedentes são aplicados directamente ao binário electromagnético M_{em} , a partir de raciocínios semelhantes (O diferencial de energia mecânica dW_{mec} escreve-se $dW_{mec}=M_{em} d\theta$).

A função energia magnética é dependente da posição θ e do fluxo ψ . Tem-se:

$$M_{em} = -\frac{\partial W_m(\psi, \theta)}{\partial \theta} \quad (6.27)$$

A função co-energia magnética função de i e θ . Tem-se:

$$M_{em} = \frac{\partial W'_m(i, \theta)}{\partial \theta} \quad (6.28)$$

Exemplo 6.3

Um transdutor rotativo semelhante ao da figura 6.3, com apenas um circuito de excitação, tem uma relação não linear entre o fluxo ligado ψ , a corrente i , e a posição θ , que pode ser expressa por:

$$i = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \psi^{1.6}$$

Determine a expressão do binário em função de θ .

Resolução:

$$W_m = \int_0^\psi i' d\psi' = \int_0^\psi \psi'^{1.6} (A_0 - A_1 \cos 2\theta) d\psi'$$

$$W_m = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \int_0^\psi \psi'^{1.6} d\psi'$$

$$W_m = (A_0 - A_1 \cos 2\theta) \frac{\psi^{2.6}}{2.6}$$

$$M_{em} = -\frac{\partial W_m}{\partial \theta} = -2A_1 \sin 2\theta \frac{\psi^{2.6}}{2.6}$$

6.4 Expressões simplificadas - circuitos magnéticos lineares

Em muitas situações pode considerar-se que os circuitos magnéticos dos transdutores ou das máquinas girantes não estão saturados magneticamente. Nestas condições, para uma determinada posição x , a curva de magnetização $\psi(i)$ reduz-se a uma recta: o fluxo ψ é directamente proporcional à corrente i . O factor de proporcionalidade (coeficiente de auto-indução) é função de x .

$$\psi = N\phi = L(x)i \quad (6.29)$$

Com $N i = R(x) \phi$.

A energia e a co-energia magnéticas, apesar de serem funções de variáveis diferentes, tomam neste caso valores iguais, e as expressões simplificam-se pelo facto da variável x aparecer independente de i ou ϕ .

A energia escreve-se:

$$W_m = \frac{1}{2} R(x) \phi^2 = \frac{1}{2} R(x) \frac{\psi^2}{N^2} \quad (6.30)$$

A força electromagnética, segundo (6.17), vale:

$$F_{em}(\phi, x) = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{dx} \quad (6.31)$$

A co-energia escreve-se

$$W'_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (6.32)$$

Desta expressão, aplicando (6.25), conclui-se:

$$F_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad (6.33)$$

As duas expressões (6.31) e (6.33) são naturalmente idênticas tendo em conta as expressões (6.29) e a derivada de $L(x) = N^2/R(x)$.

Em particular, a expressão 6.33 mostra claramente que a força electromagnética resulta da corrente na bobina e da variação da indutância do circuito.

No caso de uma máquina girante obtêm-se expressões semelhantes: à coordenada x corresponde θ e à força corresponde o binário:

$$M_{em}(\phi, \theta) = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{d\theta} \quad (6.34)$$

$$M_{em}(i, \theta) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (6.35)$$

Das expressões 6.34 e 6.35 conclui-se que para o cálculo da força ou do binário não é necessário conhecer todos os parâmetros geométricos do conversor electromecânico. É necessário conhecer apenas uma das funções $R(x)$ ou $L(x)$. O mesmo se pode dizer para o cálculo das grandezas eléctricas. Com efeito, para o caso do conversor electromecânico da figura 6.2, tem-se:

$$u = ri + \frac{d\psi}{dt} = ri + \frac{d}{dt}(L(x)i) \quad (6.36)$$

$$u = ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dt} \quad (6.37)$$

$$u = ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.38)$$

Da expressão 6.38 pode concluir-se que o facto de a peça móvel se deslocar com a velocidade (dx/dt) provoca uma força electromotriz de movimento que vale:

$$i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.39)$$

Para o estudo completo do sistema da figura 6.2 é necessário introduzir a equação de acoplamento mecânico juntamente com a 2ª lei de Newton.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{em} - F_c \quad (6.40)$$

Onde F_c é a força exterior aplicada e m a massa da peça móvel. Assim, o estudo do sistema pode ser feito resolvendo as equações diferenciais:

$$\begin{aligned} u &= ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_{em} - F_c \\ F_{em} &= \frac{1}{2} \frac{dL(x)}{dx} i^2 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para a resolução destas equações é necessário conhecer a função $L(x)$, própria do dispositivo, e a função F_c que depende da aplicação onde este seja utilizado.

6.4.1.1 Balanço Energético

Multiplicando ambos os membros da equação 6.38 por i obtém-se:

$$ui = ri^2 + L(x)i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.42)$$

que é o mesmo que

$$ui = ri^2 + L(x)i \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.43)$$

ou

$$ui = ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(x) i^2 \right) + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.44)$$

onde

$ui \rightarrow$ potência eléctrica de entrada;

$ri^2 \rightarrow$ potência de perdas de Joule;

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(x) i^2 \right) \rightarrow$ Variação da energia magnética armazenada no campo;

$\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = F_{em} \frac{dx}{dt} \rightarrow$ Potência mecânica;

A expressão 6.44 traduz o princípio da conservação de energia.

Exemplo 6.4

O coeficiente de auto-indução da bobina representada na figura 6.3 pode ser dado pela expressão aproximada:

$$L(\theta) = L_1 + L_2 \cos(2\theta)$$

Determinar a expressão do binário em função da corrente e da posição.

Resolução:

Segundo a expressão 6.35, o binário é dado por

$$M_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} = -i^2 L_2 \sin 2\theta$$

6.5 Sistemas magnéticos de excitação múltipla

Os dispositivos que se acabam de analisar tem apenas um circuito eléctrico a que corresponde uma via de excitação. A força que desenvolvem, sendo proporcional ao quadrado da grandeza que lhe dá origem (fluxo ou corrente), não se inverte com a inversão desta. Tem assim sempre o mesmo sentido. Geralmente estes dispositivos são usados para desenvolver forças de impulso não controláveis. Como exemplos, têm-se: *relés, contactores e actuadores*.

Para obter forças proporcionais a sinais eléctricos, e sinais proporcionais a forças e velocidades, é necessário que os dispositivos tenham duas ou mais vias para excitação ou troca de energia com as fontes. Os ímanes permanentes são usados frequentemente como uma destas vias de excitação.

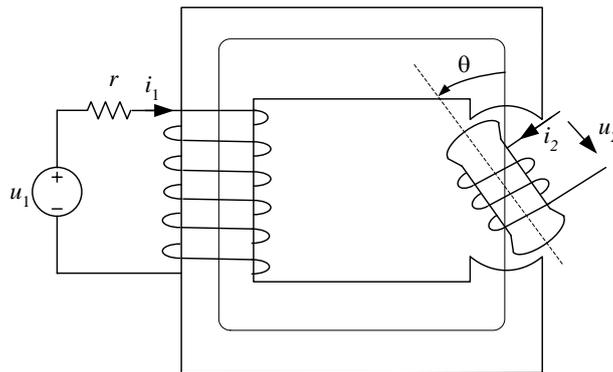


Figura 6.8. Sistema electromecânico de excitação dupla.

Na figura 6.8 mostra-se o modelo de um sistema elementar deste tipo. O sistema deve ser descrito em termos de três variáveis independentes que podem ser os fluxos ligados ψ_1 e ψ_2 e o ângulo mecânico θ , ou as correntes i_1 e i_2 e o ângulo θ , ou um conjunto híbrido de variáveis.

Quando se utiliza a função energia magnética, um raciocínio semelhante ao apresentado no número anterior permite estender a validade das equações 6.16 e 6.17. Obtém-se:

$$i_1 = \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \psi_1} \quad (6.45)$$

$$i_2 = \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \psi_2} \quad (6.46)$$

$$M_{em} = - \frac{\partial W_m(\psi_1, \psi_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (6.47)$$

onde a “função energia magnética” é dada por:

$$W_m(\psi_1, \psi_2, \theta) = \int_0^{\psi_1} i_1' d\psi_1' + \int_0^{\psi_2} i_2' d\psi_2' \quad (6.48)$$

Quando se usam as correntes para descrever o estado do sistema, as equações ficam:

$$\psi_1 = \frac{\partial W_m'(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1} \quad (6.49)$$

$$\psi_2 = \frac{\partial W_m'(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2} \quad (6.50)$$

$$M_{em} = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (6.51)$$

e a “função co-energia magnética” é dada por:

$$W'_m(i_1, i_2, \theta) = \int_0^{i_1} \psi_1 di_1 + \int_0^{i_2} \psi_2 di_2 \quad (6.52)$$

No cálculo dos integrais das expressões 6.48 e 6.52 é necessário ter em atenção que as duas variáveis de integração variam uma em relação à outra nos dois integrais. Em ambos os casos os resultados não dependem da variação relativa das duas grandezas uma vez que tanto a função energia como a função co-energia são funções de estado. Este assunto será de novo abordado numa secção próxima.

6.6 Sistemas com vários graus de liberdade mecânica

Até agora tem-se considerado apenas um grau de liberdade para o deslocamento x (para translação) ou θ (para rotação).

Dos raciocínios que se apresentaram não é difícil concluir que, para os casos em que o deslocamento se possa fazer em duas ou 3 direcções independentes, se tem:

$$F_{em_x}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial x} \quad (6.53)$$

$$F_{em_y}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial y} \quad (6.54)$$

$$F_{em_z}(i_1, i_2, x, y, z) = \frac{\partial W'_m(i_1, i_2, x, y, z)}{\partial z} \quad (6.55)$$

Para os sistemas de rotação, as forças F_{em_x} , F_{em_y} , F_{em_z} seriam substituídas por binários M_θ , M_γ , M_ε se as direcções de movimento fossem θ , γ , ε .

Exemplo 6.5

Elemento de relutância variável com dois graus de liberdade mecânica

O sistema, que se admite simétrico, está definido na figura 6.9. Permite exercer simultaneamente uma força de atracção horizontal e uma força de centragem lateral.

Determine as expressões para o cálculo das componentes da força que se exerce sobre a peça móvel.

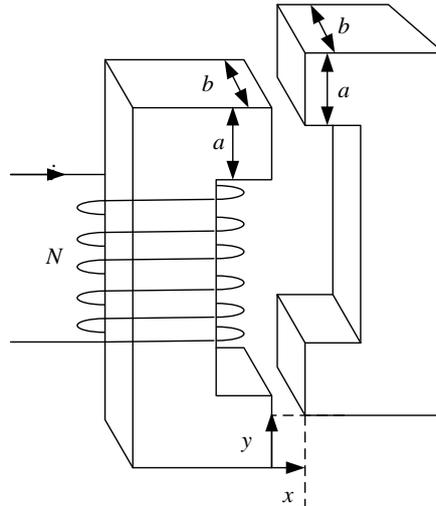


Figura 6.9. Elemento de relutância variável com dois graus de liberdade.

Resolução

A. Hipóteses:

1. As linhas de campo só existem na zona de entreferro mínimo e têm a direcção de x .
2. A permeabilidade do ferro é infinita.
3. O referencial encontra-se na peça fixa na qual está o enrolamento.

B. Determinação das forças.

Tendo em conta as hipóteses consideradas, tem-se para o valor da permeância.

$$P = \frac{\mu_0 b(a - y)}{2x}$$

$$W'_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} N^2 i^2 P$$

As forças que se exercem sobre a peça segundo x e y serão:

$$F_{mx} = \frac{\partial W'_m(i, x, y)}{\partial x}$$

$$F_{my} = \frac{\partial W'_m(i, x, y)}{\partial y}$$

$$F_{mx} = \frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{dP}{dx}$$

$$F_{my} = \frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{dP}{dy}$$

$$F_{mx} = -\frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{\mu_0 b(a - y)}{2x^2}$$

$$F_{my} = -\frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{\mu_0 b}{2x}$$

Conclusões:

- Tanto F_{mx} como F_{my} tem expressões independentes do sentido de i . F_{mx} é força de atracção (sempre) e F_{my} tende a alinhar a peça com a peça fixa.
- A intensidade de F_{mx} é tanto maior quanto mais alinhadas estiverem as peças.
- F_{mx} e F_{my} variam inversamente com a dimensão do entreferro. F_{mx} depende do quadrado de x e F_{my} varia inversamente com x .

Nota: As expressões da permeância e das forças acima indicadas foram

determinadas desprezando a relutância do ferro ($\mu_r = \infty$). Esta aproximação é válida quando o entreferro for grande. Quando $x \rightarrow 0$ é necessário considerar também a relutância do ferro.

6.7 Excitação múltipla — caso do circuito magnético linear.

Considere-se agora que o circuito magnético da figura 6.8 é linear. Os fluxos ligados com cada um dos dois circuitos eléctricos, qualquer que seja a posição θ , são iguais à soma do fluxo criado pela própria corrente e do fluxo criado pela corrente que circula no outro circuito. Ou seja

$$\psi_1 = L_1(\theta)i_1 + M(\theta)i_2 \quad (6.56a)$$

$$\psi_2 = M(\theta)i_1 + L_2(\theta)i_2 \quad (6.56b)$$

As funções energia e co-energia magnéticas, embora funções expressas em termos de variáveis diferentes, tomam o mesmo valor numérico.

Para o cálculo da função co-energia magnética deve ter-se em atenção que para se passar do estado ($i_1=0, i_2=0$) para outro estado caracterizado por duas correntes diferentes de zero ($i_1= i_1, i_2= i_2$), é necessário variar ambas as correntes. Esta variação pode ser feita de muitas formas. Por exemplo, pode variar-se i_1 de zero até i_1 e manter i_2 igual a zero e depois variar i_2 de zero até i_2 mantendo $i_1= i_1$. Pode fazer-se o mesmo processo de forma alternativa variando primeiro a corrente i_2 , ou variar das duas correntes simultaneamente. Ambas as correntes são variáveis independentes. Estando estas variáveis representadas num plano como se mostra na figura 6.10, a variação destas duas correntes faz-se realizando um determinado caminho como se mostra na figura 6.10. O facto da função co-energia ser uma função de estado garante que o seu valor não depende do caminho (S_1, S_2 ou S_3 como se mostra na figura), mas apenas do estado final (i_1, i_2).

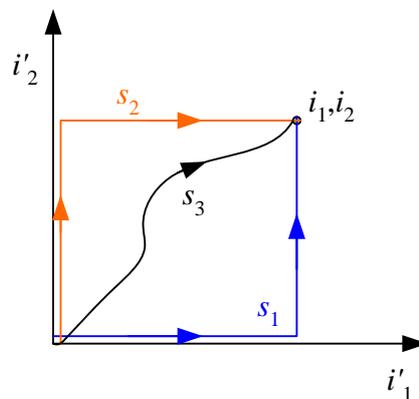


Figura 6.10. Caminhos possíveis para o cálculo da co-energia magnética.

Para o cálculo da co-energia magnética adoptou-se o caminho S_1 , figura 6.10. Obtém-se:

$$W'_m(i_1, i_2, \theta) = \int_{0,0}^{i_1,0} (L_1(\theta)i'_1 + M(\theta)i'_2) di'_1 + \int_{i_1,0}^{i_1,i_2} (M(\theta)i'_1 + L_2(\theta)i'_2) di'_2 \quad (6.57)$$

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1(\theta)i_1^2 + M(\theta)i_1i_2 + \frac{1}{2} L_2(\theta)i_2^2 \quad (6.58)$$

donde se conclui que o binário vale

$$M_{em} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + i_1i_2 \frac{dM(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} \quad (6.59)$$

Esta expressão é uma generalização da expressão 6.33. As equações eléctricas são:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (6.60a)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \quad (6.60b)$$

introduzindo as equações 6.56, obtém-se:

$$u_1 = r_1 i_1 + \left[L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right] + \left[i_1 \frac{dL_1}{d\theta} + i_2 \frac{dM}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (6.61a)$$

$$u_2 = r_2 i_2 + \left[M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right] + \left[i_1 \frac{dM}{d\theta} + i_2 \frac{dL_2}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (6.61b)$$

Nas equações 6.61, as primeiras expressões entre parêntesis representam as “f.e.m. de transformação” (que aparecem sempre como no caso dos transformadores), e as segundas representam as “f.e.m. de velocidade”.

As expressões 6.61 tomam uma forma mais condensada utilizando a notação matricial. Com efeito, definindo:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_1(\theta) & M(\theta) \\ M(\theta) & L_2(\theta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

e notando que:

$$W'_m = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \mathbf{L}(\theta) \mathbf{I} \quad (6.63)$$

Obtém-se

$$M_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{L}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \quad (6.64)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I} + \mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \mathbf{I} \quad (6.65)$$

onde

$\mathbf{R} \mathbf{I}$ queda de tensão resistiva;

$\mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{I}}{dt}$ f.e.m. de transformação;

$\frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{L}}{d\theta} \mathbf{I}$ f.e.m. de velocidade.

As expressões 6.63 a 6.65 são válidas também para o caso em que existem mais do que dois circuitos eléctricos ligados magneticamente. A definição das matrizes será a correspondente.

O estudo completo de um sistema com vários circuitos ligados magneticamente faz-se com as equações diferenciais (6.65) e a 2ª lei de Newton associada à expressão do binário.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{L}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} - M_c \quad (6.66)$$

Onde J representa o momento de inércia e M_c o binário de carga. Note-se que o binário depende

apenas das correntes e da posição, e não das derivadas das correntes.

Exemplo 6.6

Sistema rotativo com um circuito no estator e outro no rotor

Considere um sistema magnético com dois circuitos eléctricos, um colocado no estator e o outro colocado no rotor. Admita que os coeficientes de indução podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}L_S(\theta) &= L_S \\M(\theta) &= M_{SR} \cos(\theta) \\L_R(\theta) &= L_R\end{aligned}$$

Determine as equações diferenciais que constituem o modelo dinâmico deste sistema.

Resolução:

Introduzindo as expressões dos coeficientes de indução nas relações entre as tensões e as correntes, dadas pelas equações 6.61a e 6.61b Obtém-se:

$$\begin{aligned}u_S &= r_S i_S + L_S \frac{di_S}{dt} + M_{SR} \cos(\theta) \frac{di_R}{dt} - i_R M_{SR} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \\u_R &= r_R i_R + L_R \frac{di_R}{dt} + M_{SR} \cos(\theta) \frac{di_S}{dt} - i_S M_{SR} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

O binário é dado pela equação 6.59 que dá origem a:

$$M_{em} = -i_S i_R M_{SR} \sin(\theta)$$

O equilíbrio mecânico é descrito por:

$$\begin{aligned}J \frac{d\omega_m}{dt} &= -i_S i_R M_{SR} \sin(\theta) - M_{carga} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_m\end{aligned}$$

6.8 Aplicação ao caso de sistemas magnéticos com ímanes permanentes.

A expressão 6.59 pode tomar uma forma diferente utilizando o conceito de permeância magnética, definida como o inverso da relutância magnética. Os coeficientes de indução podem ser dados por:

$$L_1(\theta) = N_1^2 P_1(\theta) \quad L_2(\theta) = N_2^2 P_2(\theta) \quad M(\theta) = N_1 N_2 P_M(\theta) \quad (6.67)$$

Obtém-se após substituição na expressão 6.59:

$$M_{em} = \frac{1}{2} N_1^2 i_1^2 \frac{dP_1(\theta)}{d\theta} + N_1 i_1 N_2 i_2 \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} N_2^2 i_2^2 \frac{dP_2(\theta)}{d\theta} \quad (6.68)$$

ou seja

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{m1}^2 \frac{dP_1(\theta)}{d\theta} + F_{m1} F_{m2} \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} F_{m2}^2 \frac{dP_2(\theta)}{d\theta} \quad (6.69)$$

A expressão 6.69 é apropriada para o estudo de dispositivos constituídos por um circuito magnético, um íman permanente e um bobina. Designado o íman com o índice $1=i$ e a bobina com o índice $2=b$, tem-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_i(\theta)}{d\theta} + N_b i_b F_{mi} \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} (N_b i_b)^2 \frac{dP_2(\theta)}{d\theta} \quad (6.70)$$

O termo F_{mi} é constante e depende do íman utilizado.

6.8.1 Classificação dos dispositivos electromecânicos consoante o uso de íman permanente

É frequente a utilização de ímanes permanentes nos sistemas de natureza electromecânica. Não considerando as máquinas rotativas tradicionais, distinguem-se os seguintes 4 casos:

- *Sistemas relutantes ou de relutância.* Não possuem íman permanente. Baseiam-se na variação de relutância com a coordenada de posição. São caracterizados por não apresentar nenhum termo de binário devido à interacção mútua entre a parte fixa e a parte móvel.
- *Sistemas electrodinâmicos.* São caracterizados por um íman e um circuito ferromagnético fixos com uma (ou várias) bobinas moveis. Neste caso a força deve-se essencialmente à interacção mútua entre a parte fixa e a parte móvel.

$$M_{em} \approx N_b i_b F_{mi} \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} \quad (6.71)$$

- *Sistemas electromagnéticos.* São caracterizados por um circuito ferromagnético e uma bobina fixa com um íman permanente móvel. O íman é atravessado pela parte principal do fluxo criado pela bobina e é constituído por um material de fraca permeabilidade magnética diferencial. A componente da força devida à bobina é independente da posição. A força total depende da posição do íman bem como da posição relativa entre a bobina e o íman.

$$M_{em} = \frac{1}{2} F_{mi}^2 \frac{dP_i(\theta)}{d\theta} + N_b i_b F_{mi} \frac{dP_M(\theta)}{d\theta} \quad (6.72)$$

- *Sistemas relutantes polarizados.* Neste caso a componente de força devida à interacção mútua e o termo de força devida à bobina tem ordens de grandeza comparáveis. A expressão do binário nestes sistemas é semelhante à expressão 6.70.

6.9 Exercícios

6.1. Considere a máquina eléctrica representada na figura 6.11.

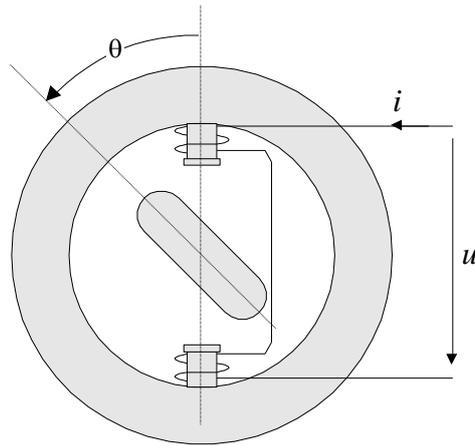


Figura 6.11.

Determinou-se experimentalmente a indutância da bobina obtendo-se a expressão:

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta) + L_6 \cos(6\theta)$$

em que L_0 , L_2 e L_6 são constantes e θ é a posição do rotor.

- Obtenha uma expressão para a co-energia magnética armazenada
- Determine uma expressão para o binário electromagnético em função da corrente eléctrica i e da posição angular θ .

Solução: a) $W'_m = \frac{1}{2} (L_0 + L_2 \cos(2\theta) + L_6 \cos(6\theta)) i^2$

b) $M_{em} = i^2 [-L_2 \sin(2\theta) - 3L_6 \sin(6\theta)]$

6.2. Para o transdutor magnético de um circuito eléctrico mostrado na figura 6.12, foi determinado experimentalmente que:

$$\Psi = \frac{\sqrt{i}}{2(1 - 10000x^3)}$$

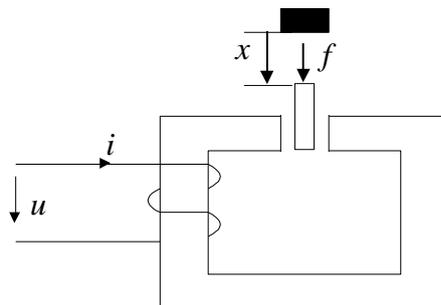


Figura 6.12.

Esta representação é válida no intervalo $0 \leq i \leq 4$ A e $0 \leq x \leq 0,04$ m. Desprezar os efeitos da gravidade.

- Escreva uma expressão para a co-energia magnética.
- Determine a expressão da força f .
- Considerando que a bobina se encontra alimentada com uma fonte de corrente de amplitude constante e igual a 4 A, determine a expressão da força em função da posição x .

Solução: a) $W'_m = \frac{i^{\frac{3}{2}}}{3(1-10000x^3)}$ b) $f = \frac{10000x^2 i^{\frac{3}{2}}}{(1-10000x^3)^2}$ c) $f = \frac{80000x^2}{(1-10000x^3)^2}$

6.3 Um amperímetro ferromagnético tem uma peça de ferro que se pode mover quando está sujeita ao campo criado por uma bobina. A força de origem electromagnética é contrabalançada por uma mola. A indutância da bobina pode ser expressa por:

$$L(\theta) = 5 + 40\theta \quad [\mu H]$$

onde θ é o ângulo que mede a posição da peça móvel expresso em radianos. A resistência da bobina é $0,002 \Omega$. A constante de elasticidade da mola é $14 \times 10^{-4} \text{ N.m/rad}$.

- Calcule uma expressão do binário que se exerce sobre a peça móvel em função da corrente e da posição.
- Calcule o ângulo de posição de equilíbrio da peça móvel quando a bobina for percorrida por uma corrente sinusoidal de valor eficaz igual a 10 A e frequência de 50 Hz.
- Qual será a tensão aos terminais da bobina nas condições da alínea b)

(Solução: a) $M_{em} = 20i^2 \mu Nm$ b) $\theta = 1,428 \text{ rad}$ c) $U = 0,196 \text{ V}$)

6.4 Um sistema electromecânico tem uma peça móvel cuja coordenada de posição é representada por x . Este sistema é caracterizado por um coeficiente de auto-indução com a forma:

$$L(x) = \frac{k}{x+a}$$

onde k e a são constantes positivas. Determine uma expressão para a força aplicada à peça móvel em função da corrente e de x .

(Solução: $f_{em} = -\frac{1}{2} \frac{ki^2}{(x+a)^2}$)

6.5 Um sistema electromecânico apresenta uma relutância variável expressa por:

$$R_m(\theta) = 5 \times 10^4 (2,5 + 1,5 \cos 2\theta) \quad Ae/Wb \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

A bobina tem 15 espiras com resistência que se pode considerar desprezável. A tensão aplicada é sinusoidal de valor eficaz igual a 230 V, 50 Hz.

- Calcule uma expressão para o fluxo magnético ligado com a bobina.
- Determine uma expressão para o binário em função da posição e do fluxo ligado.
- Determine qual o valor máximo do binário e a correspondente coordenada de posição θ considerando que a peça móvel não se encontra em movimento.

(Solução: a) $u = \sqrt{2}2230\sin(314t) \rightarrow \psi = -\sqrt{2}\frac{230}{314}\cos(314t)$

b) $M_{em} = \frac{1000}{3}\psi^2 \sin(2\theta)$ c) $M_{emmax} = 179 \text{ Nm}$ para $\theta = \pi/4$

6.6. Um sistema electromecânico é constituído por uma peça fixa, o estator, na qual se encontra a bobina 1 e por uma peça móvel, o rotor, na qual se encontra a bobina 2. As indutâncias valem:

$$L_1 = 0,4 \text{ mH} \quad L_2 = 0,1 \text{ mH} \quad M = 0,1\cos\theta \text{ mH}$$

Estas duas bobinas são colocadas em série e percorridas por uma corrente sinusoidal de valor eficaz igual a 5 A.

Calcule o valor médio do binário electromagnético exercido sobre a bobina móvel em função da posição θ .

(Solução: $M_{emav} = -0,0025 \sin\theta \text{ Nm}$)

6.7. Um conversor electromecânico rotativo de pólos lisos tem no seu estator dois enrolamentos dispostos perpendicularmente um ao outro e é alimentado pelas correntes i_{s1} e i_{s2} . Sobre o rotor encontra-se uma bobina alimentada por uma corrente contínua de 10 A. Conhecem-se as 6 indutâncias próprias e mútuas:

$$L_r = 0,2 \text{ H} \quad M_{rs1} = 0,1\cos\theta \text{ H} \quad M_{rs2} = 0,1\sin\theta \text{ H}$$

$$L_{s1} = 0,4 \text{ H} \quad L_{s2} = 0,4 \text{ H} \quad M_{s1s2} = 0 \text{ H}$$

Calcule uma expressão para o binário electromecânico em função de i_{s1} , i_{s2} e θ .

Qual será a posição de equilíbrio do rotor quando se alimentarem as bobinas do estator com correntes contínuas iguais a $i_{s1}=5 \text{ A}$ e $i_{s2}=0 \text{ A}$.

Solução: a) $M_{em} = -i_{s1}\sin\theta + i_{s2}\cos\theta$

b) $\theta = 0$ (ponto estável) ou $\theta = 180^\circ$ (ponto instável)

Capítulo 7 Transformadores

7.1 Introdução

Os transformadores são as máquinas eléctricas mais simples e talvez as de uso mais generalizado sendo numerosas e diversificadas as suas aplicações. Estes são classificados segundo as suas funções. Assim, tem-se, entre outros:

- Transformadores de potência
- Transformadores de isolamento
- Autotransformadores
- Autotransformadores variadores
- Transformadores de tensão
- Transformadores de corrente
- Transformadores de alta frequência

Os transformadores são constituídos por um circuito magnético em material ferromagnético e por dois ou mais circuitos eléctricos, figura 7.1. Nesta figura o núcleo magnético é constituído por duas colunas e abraça os dois circuitos enrolados sobre cada uma das suas colunas. Não há ligação galvânica entre estes dois circuitos.

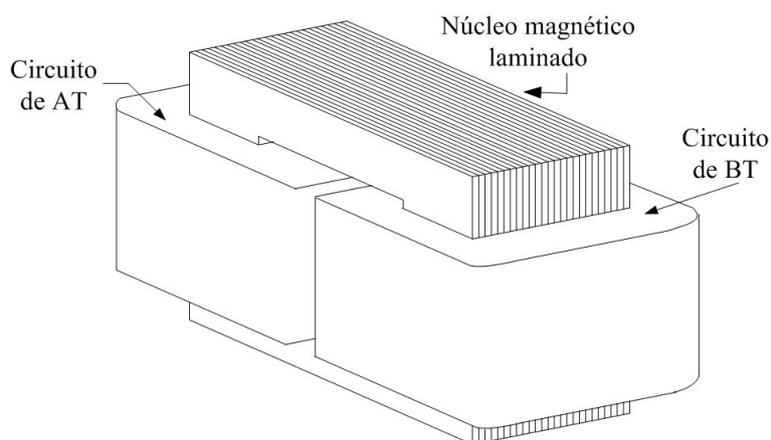


Figura 7.1 Constituição básica do transformador.

A figura 7.2 apresenta o núcleo de um transformador monofásico construído de forma diferente. Na coluna central serão instalados os dois enrolamentos que são concêntricos. Designa-se por enrolamento do primário aquele que recebe energia a uma determinada tensão e por enrolamento de secundário o que fornece energia ao exterior, normalmente, com uma tensão diferente.

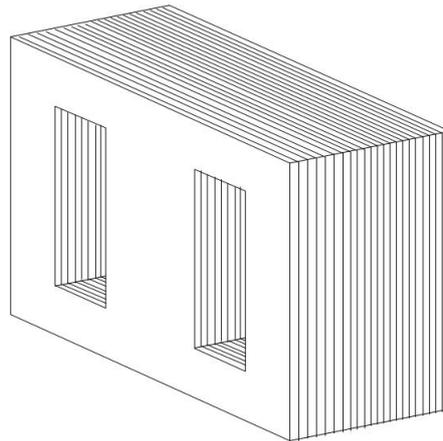
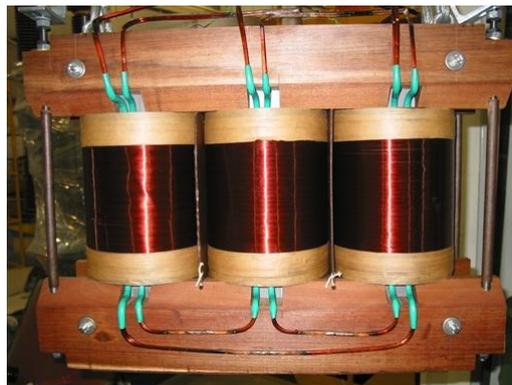


Figura 7.2. Núcleo de um transformador monofásico.

A figura 7.3 apresenta um transformador de distribuição trifásico aberto. A função deste transformador é reduzir a tensão de 30kV para 400V. Este é constituído por um núcleo com 3 colunas sobre cada uma das quais se encontram enrolados o primário e o secundário de cada fase. As ligações ao exterior são feitas através de travessias normalmente de porcelana, sendo 3 para os terminais de média tensão (30kV) e 4 para a baixa tensão (3 fases e o neutro).



(a) Vista do exterior com cuba ligeiramente aberta (b) Vista do interior

Figura 7.3. Aspectos de um transformador trifásico arrefecido com circulação de óleo.

Tal como todas as outras máquinas eléctricas o transformador realiza a conversão de energia com perdas. Estas vão provocar o aumento de temperatura no seu interior. É necessário um sistema de arrefecimento para efectuar o transito de calor entre o interior do transformador e o exterior. A maioria dos transformadores de potência são arrefecidos a óleo. O núcleo e enrolamentos são mergulhados no interior de um tanque (cuba) cheio de óleo. Este tanque dispõe de alhetas para facilitar a transmissão de calor para o exterior. Existem também transformadores secos arrefecidos por convecção natural ou por convecção forçada com ventiladores para ajudar o seu arrefecimento.

7.1.1 Valores nominais

Os valores nominais representam o estado permanente limite suportável pelo transformador. Acima destes valores o transformador pode funcionar em intervalos de tempo curtos.

Por definição, a potência nominal de um transformador é o produto da tensão nominal pela corrente. É portanto uma potência aparente. Os valores das tensões e correntes nominais indicam as tensões e correntes máximas para os quais o transformador foi construído. Estes valores são indicativos para a exploração e ensaio dos transformadores. Na placa de características devem figurar:

S_N – potência nominal

U_{1N} – tensão nominal do primário

U_{2N} – tensão nominal do secundário

Os valores das correntes nominais do primário e do secundário são calculados a partir de $S=UI$, ou no caso dos transformadores trifásicos $S = \sqrt{3}UI$.

7.2 Princípio de funcionamento – transformador ideal

Considere-se um transformador monofásico como o indicado na figura 7.4 em que, para simplificar o desenho, o enrolamento do primário e o enrolamento do secundário se encontram instalados em colunas diferentes. Admita-se que o valor da resistência dos condutores é desprezável e que o fluxo magnético circula na totalidade pelo interior do núcleo não existindo dispersão. Considerem-se também as convenções para as tensões e correntes indicadas na figura 7.4.

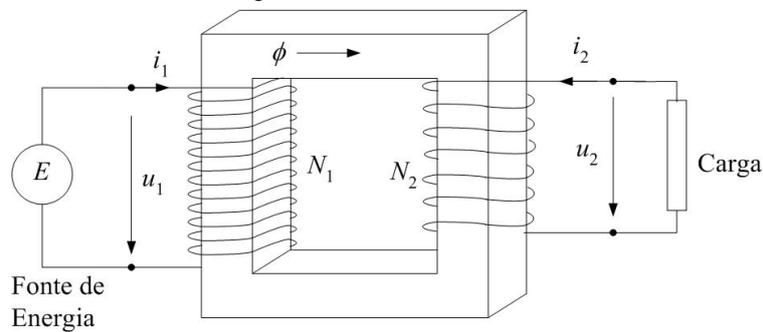


Figura 7.4. Representação de um transformador monofásico.

Nestas condições, tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Havendo variação no tempo, isto é, sendo $\frac{d\phi}{dt} \neq 0$, tem-se:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = k \quad (7.2)$$

O parâmetro k designa-se por razão de transformação. A equação 7.2 determina que a tensão no secundário é proporcional à tensão do primário sendo a constante de proporcionalidade dada pela razão entre o número de espiras dos dois enrolamentos.

Considere-se agora que a permeabilidade magnética do ferro é infinita. Nestas condições a circulação do campo magnético H ao longo de uma linha de força é nula.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad (7.3)$$

Daqui se tira:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (7.4)$$

As equações 7.2 e 7.4 traduzem relações simples entre as grandezas do primário e do secundário. Pode concluir-se:

$$p_1 = u_1 i_1 = u_2 i_2 = p_2 \quad (7.5)$$

Que representa um transformador com um rendimento unitário.

As equações 7.2 e 7.4 traduzem o conceito de transformador ideal, representado na figura 7.5 onde se trocou o sentido da corrente do secundário.

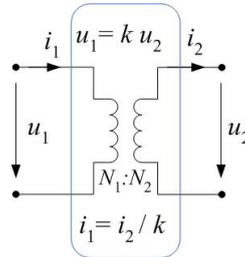


Figura 7.5. Transformador ideal.

Este conceito de transformador ideal é suficiente para uma primeira análise de muitos problemas. Contudo representa uma aproximação da realidade que em certas situações não é suficiente.

Exemplo 7.1

Considere um transformador monofásico de 100kVA, 10000/400V. Calcule os valores das correntes nominais do primário e do secundário

Resolução:

Os valores das correntes nominais podem ser obtidos através de $S_N = U_N I_N$.

Assim:

$$I_{1N} = 100000 / 10000 = 10A$$

$$I_{2N} = 100000 / 400 = 250A$$

Ao enrolamento de tensão mais elevada corresponde a corrente mais baixa e vice-versa.

7.3 Circuito equivalente do transformador

Considere-se o transformador monofásico da Figura 7.6. Nesta figura apresenta-se o desenho estilizado das linhas de força que na sua grande maioria circula pelo núcleo magnético fechando-se pelos dois enrolamentos. Este fluxo designa-se por fluxo principal. Parte das linhas de força fecham-se apenas pelo enrolamento do primário e circulam pelo ar. É o fluxo de dispersão do primário. O mesmo se passa em relação ao secundário originando o fluxo de dispersão do secundário.

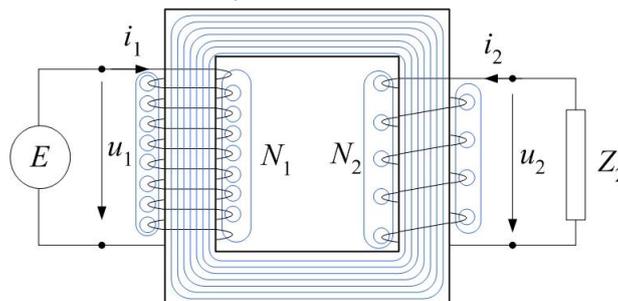


Figura 7.6. Esquema do transformador com fluxo principal e fluxos de dispersão.

Representando a dispersão com coeficientes de indução equivalentes, l_{d1} e l_{d2} , tem-se para os fluxos ligados:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= N_1\phi + l_{d1}i_1 \\ \psi_2 &= N_2\phi + l_{d2}i_2\end{aligned}\quad (7.6)$$

As equações do transformador serão:

$$\begin{aligned}u_1 &= r_1i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = r_1i_1 + l_{d1}\frac{di_1}{dt} + N_1\frac{d\phi}{dt} \\ u_2 &= r_2i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = r_2i_2 + l_{d2}\frac{di_2}{dt} + N_2\frac{d\phi}{dt}\end{aligned}\quad (7.7)$$

multiplicando a segunda equação por N_1/N_2 , tem-se:

$$\frac{N_1}{N_2}u_2 = \frac{N_1}{N_2}r_2i_2 + \frac{N_1}{N_2}l_{d2}\frac{di_2}{dt} + N_1\frac{d\phi}{dt}\quad (7.8)$$

ou

$$\frac{N_1}{N_2}u_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 i_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 l_{d2} \frac{di_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)}{dt} + N_1 \frac{d\phi}{dt}\quad (7.9)$$

que se pode escrever como:

$$u'_2 = r'_2 i'_2 + l'_{d2} \frac{di'_2}{dt} + N_1 \frac{d\phi}{dt}\quad (7.10)$$

com

$$u'_2 = \frac{N_1}{N_2}u_2 \quad i'_2 = \frac{N_2}{N_1}i_2 \quad r'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 \quad l'_{d2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 l_{d2}\quad (7.11)$$

A operação que se acabou de descrever designa-se por redução do secundário ao primário. É equivalente a substituir o enrolamento 2 por um enrolamento 2' com o número de espiras igual ao do primário.

Atendendo a que pela lei de Hopkinson se tem:

$$N_1i_1 + N_2i_2 = R_m\phi\quad (7.12)$$

O termo comum às duas equações pode ser dado por:

$$N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{(N_1i_1 + N_2i_2)}{R_m} \right] = \frac{N_1^2}{R_m} \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) = L_{1m} \frac{di_m}{dt}\quad (7.13)$$

com

$$L_{1m} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad \text{e} \quad i_m = i_1 + i'_2\quad (7.14)$$

As equações do transformador serão:

$$\begin{aligned}u_1 &= r_1i_1 + l_{d1}\frac{di_1}{dt} + L_{1m}\frac{di_m}{dt} \\ u'_2 &= r'_2i'_2 + l'_{d2}\frac{di'_2}{dt} + L_{1m}\frac{di_m}{dt}\end{aligned}\quad (7.15)$$

Que podem ser representadas pelo circuito representado na figura 7.7.

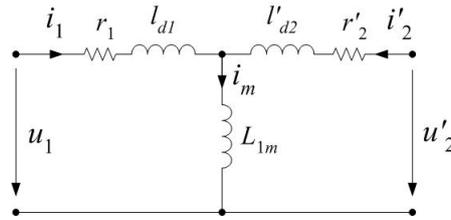


Figura 7.7. Circuito equivalente em T do transformador.

O ramo comum, representado pela bobina de coeficiente de indução L_{1m} é designado por ramo de magnetização sendo i_m designada por corrente de magnetização.

Em regime alternado sinusoidal, às tensões e correntes correspondem as respectivas amplitudes complexas e às indutâncias correspondem as respectivas reactâncias. O circuito da figura 7.7 dá origem ao circuito da figura 7.8 onde se introduziu a resistência R_{1fe} para representar as perdas no ferro.

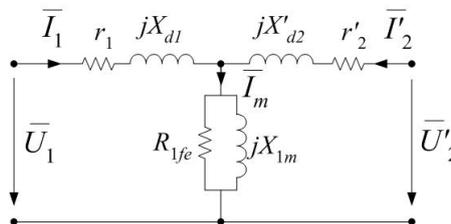


Figura 7.8. Circuito equivalente em T para o regime sinusoidal.

O circuito equivalente reduzido ao primário será assim o que se encontra representado na figura 7.8. A sua interpretação é mais fácil considerando um transformador ideal no secundário como se mostra na figura 7.9. Este transformador ideal está implícito na definição das grandezas $U'_2 = kU_2$ e $I'_2 = I_2/k$. Normalmente não é representado.

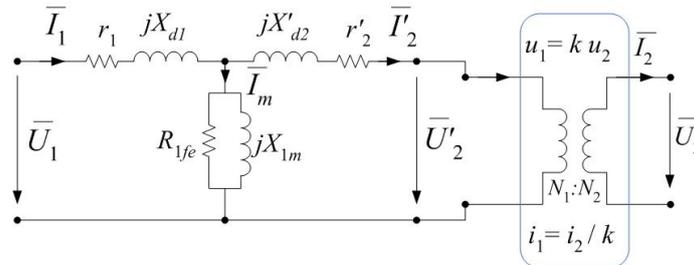


Figura 7.9. Circuito equivalente reduzido ao primário.

Em vez de se reduzir as grandezas do secundário ao primário, poder-se-ia fazer a operação inversa, isto é reduzir o primário ao secundário. Obter-se-ia o circuito da figura 7.10.

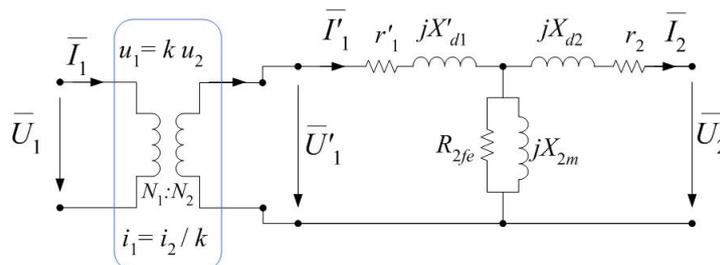


Figura 7.10. Circuito equivalente reduzido ao secundário.

No circuito equivalente, figura 7.9 estão representados os seguintes efeitos:

As resistências r_1 e r_2 representam as perdas de Joule ou perdas no cobre. Introduzem uma componente de queda de tensão em fase com a corrente.

O ramo de magnetização R_{1fe} e X_{1m} representa a magnetização e as perdas no núcleo como foi visto atrás.

As reactâncias de dispersão X_{d1} e X'_{d2} representam os fluxos de dispersão ou de fugas. Introduzem uma outra queda de tensão agora em quadratura com a corrente.

A tabela 7.1 apresenta, em percentagem dos valores nominais, alguns valores indicativos das quedas de tensão nas resistências e nas reactâncias de dispersão bem como da corrente de magnetização. Os valores das tensões são relativos à tensão nominal e o valor da corrente de magnetização é relativo à corrente nominal.

Tabela 7.1. Valores indicativos das quedas de tensão e corrente nos transformadores

	Transformadores grandes S>1MVA	Transformadores médios 1kVA<S<1MVA
U_R (%)	0,5 %	2%
U_X (%)	8%	4%
I_m (%)	1%	2,5%

Desta tabela pode inferir-se que as impedâncias correspondentes ao ramo de magnetização têm valores ôhmicos muito mais elevados que os das restantes.

7.3.1.1 Considerações sobre as perdas no ferro

A variação do fluxo ϕ no núcleo de ferro provoca perdas de energia que são devidas à histerese e às correntes de Foucault. É comum representar as perdas no ferro com uma resistência em paralelo com a reactância $X_{1m}=\omega L_{1m}$ como se mostra na figura 7.11a.

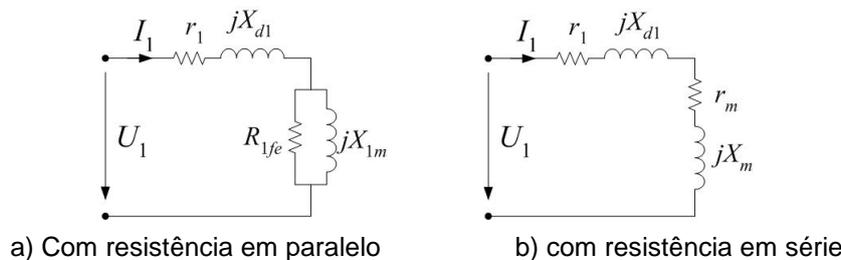


Figura 7.11. Representação das perdas no ferro de um transformador em vazio.

Em vez do paralelo pode utilizar-se um circuito equivalente em série onde os novos parâmetros podem ser calculados por:

$$r_m + jX_m = R_{1fe} // jX_{1m} \tag{7.16}$$

Exemplo 7.2

Considere o transformador monofásico do exemplo 7.1. O ramo de magnetização deste transformador pode ser representado por uma resistência em paralelo com uma reactância de valores iguais a $X_{1m}=50 \text{ k}\Omega$ e $R_{1fe}=500 \text{ k}\Omega$. Calcule os valores da resistência e da reactância em série equivalentes.

Resolução:

Os valores das resistências e da reactância equivalente série podem ser calculados através das equações 7.15. Obtém-se:

$$r_m = 4,95 \text{ k}\Omega$$

$$X_m = 49,5 \text{ k}\Omega$$

Verifica-se que o valor da reactância do circuito em série é pouco diferente da reactância do circuito em paralelo. Contudo o valor da resistência é substancialmente inferior.

7.3.2 Aspectos práticos da análise com circuitos equivalentes

Raramente se utiliza o circuito equivalente em T da figura 7.8 ou os seus derivados das figuras 7.9 e 7.10. Em vez dele utiliza-se o circuito simplificado da figura 7.12 conhecido como circuito equivalente em *gamma* ou circuito equivalente em ângulo. Neste tem-se:

$$\begin{aligned} L_{cc} &= L_{d1} + L'_{d2} \\ R_{cc} &= r_1 + r'_2 \end{aligned} \tag{7.17}$$

A passagem do ramo de magnetização do centro para a esquerda (ou para a direita) conduz a erros pequenos e a uma simplicidade considerável. Esta simplificação pode ser feita pois os valores óhmicos de r_1 e X_{d1} são muito inferiores a R_{1fe} ou X_{1m} .

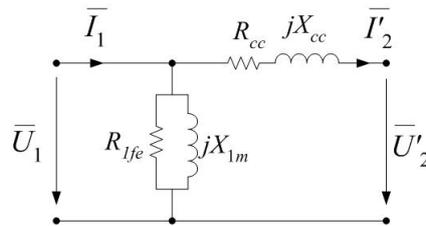


Figura 7.12. Circuito equivalente simplificado.

Deste circuito pode concluir-se imediatamente que as perdas no ferro, representadas no ramo vertical, são dependentes apenas da tensão aplicada ao primário, sendo independentes da corrente I'_2 ou seja da corrente de carga do transformador. Na situação normal, em que a tensão é constante, as perdas no ferro são constantes.

$$p_{fe} = \frac{U_1^2}{R_{1fe}} \tag{7.18}$$

Por sua vez as perdas no cobre são proporcionais ao quadrado da corrente de carga. Assim:

$$p_{cu} = R_{cc} I_2'^2 \tag{7.19}$$

Em transformadores de potência relativamente elevada, superior a alguns kW, a corrente de magnetização é da ordem de alguns por cento da corrente nominal, pouco superior à ordem de grandeza dos erros aceitáveis para a maioria dos estudos. Nestas condições, para efeitos de cálculo de correntes, quedas de tensão e desfasagens, é válido desprezar o ramo de magnetização. O circuito equivalente toma a forma da figura 7.13a.

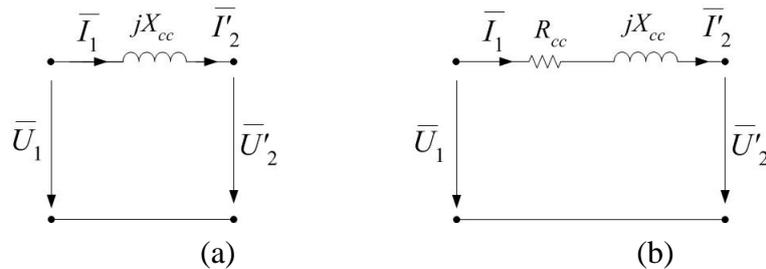


Figura 7.13. Circuito equivalente do transformador sem ramo de magnetização.

Nos transformadores de potência mais elevada, o valor da resistência R_{cc} é consideravelmente inferior ao valor da reactância X_{cc} . Para o cálculo de quedas de tensão, correntes de curto-circuito e outros, é utilizado o circuito da figura 7.13b.

Por fim, a última simplificação consiste em desprezar também a reactância de curto-circuito obtendo-se um modelo de transformador de rendimento unitário e sem quedas de tensão, isto é o modelo de transformador ideal.

7.4 Ensaio em vazio e em curto-circuito

Para a determinação dos parâmetros do circuito equivalente, são realizados o ensaio em vazio e o ensaio em curto-circuito. Nesta secção descrevem-se sumariamente estes dois ensaios e os procedimentos necessários para a determinação dos parâmetros do circuito equivalente.

7.4.1 Ensaio em vazio

O ensaio em vazio é realizado aplicando uma fonte de tensão alternada sinusoidal ao primário com o secundário aberto. A tensão a utilizar deverá ser próxima do valor nominal do enrolamento. Deverá medir-se a tensão aplicada, a corrente que circula no enrolamento e a potência absorvida. Nesta situação o circuito equivalente do transformador é o que se representa na figura 7.14.

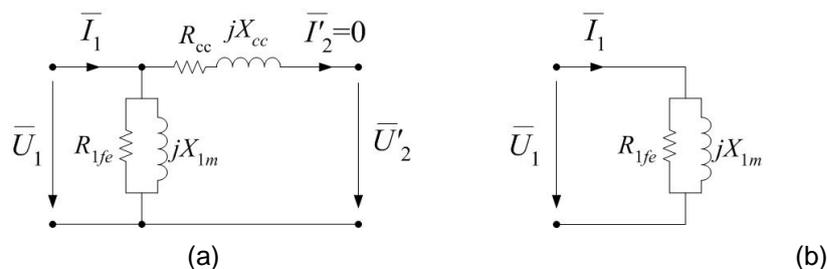


Figura 7.14. Circuito equivalente do transformador em vazio.

Daqui resulta:

$$R_{1fe} = \frac{U_1^2}{P_0} \quad (7.20)$$

$$Q_0 = \sqrt{S_0^2 - P_0^2} \quad S_0 = U_1 I_{10} \quad (7.21)$$

$$X_{1fe} = \frac{U_1^2}{Q_0} \quad (7.22)$$

7.4.2 Ensaio em Curto-circuito

O ensaio em curto-circuito é feito a **tensão reduzida**. O secundário é colocado em curto-circuito e é

aplicada uma tensão ao primário de modo a atingir-se a corrente nominal. Esta tensão designa-se por tensão de curto-circuito e é normalmente indicada na placa de características do transformador.

Quando circular a corrente nominal no primário também circula um valor próximo da corrente nominal no secundário. Nos transformadores de distribuição o valor de tensão de curto-circuito é da ordem dos 4 ou 6% da tensão nominal. Nos transformadores de potência usados nas subestações, este valor anda na ordem dos 10 a 15%.

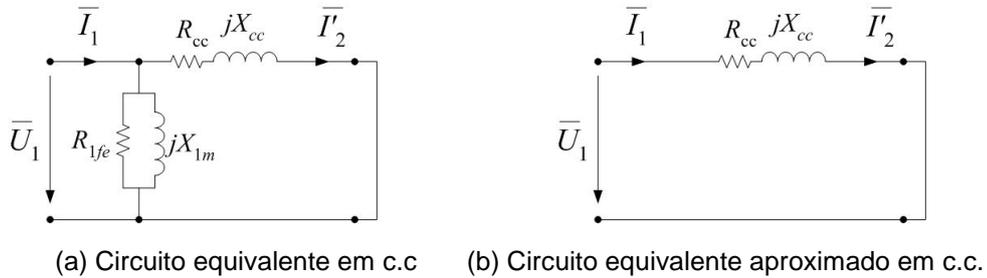


Figura 7.15. Circuito equivalente do transformador em curto-circuito.

Como a impedância de magnetização é muito superior à impedância do ramo horizontal, e como neste ensaio estas duas impedâncias estão em paralelo, apenas interessa considerar a impedância do ramo horizontal como se representa na figura 7.15b.

Assim:

$$R_{cc} = r_1 + r_2' = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} \quad (7.23)$$

$$Z_{cc} = \frac{U_{cc}}{I_{cc}} \quad (7.24)$$

$$X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = X_{d1} + X_{d2}' \quad (7.25)$$

onde:

R_{cc} é a resistência de curto-circuito

X_{cc} é a reactância de curto-circuito

7.5 Transformador em carga

Nesta secção abordam-se dois aspectos particulares do funcionamento do transformador em carga. O primeiro é o rendimento e o segundo as quedas de tensão.

7.5.1 Rendimento

Define-se rendimento como a relação entre a potência entregue à carga pelo secundário e a potência recebida pelo primário.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (7.26)$$

Atendendo ao circuito equivalente da figura 7.12, tem-se:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{fe} + R_{cc}I_2^2} \quad (7.27)$$

ou, atendendo a que $P_{fe} = P_0$,

$$\eta = \frac{U_2' I_2' \cos \varphi}{U_2' I_2' \cos \varphi + P_o + R_{cc} I_2'^2} \quad (7.28)$$

O andamento do rendimento do transformador com a carga encontra-se representado na figura 7.16 para vários valores de factor de potência.

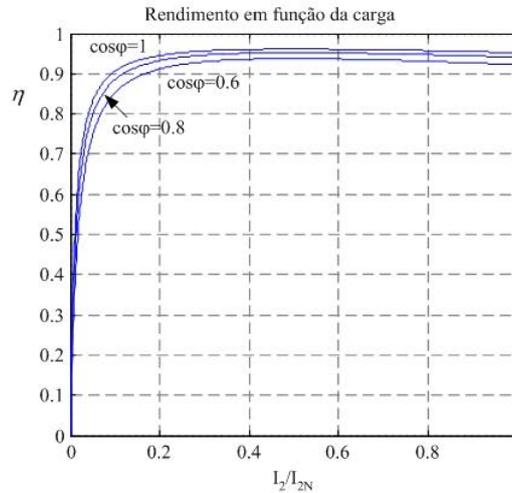


Figura 7.16. Curva do rendimento em função da carga.

Considerando que a tensão U_2 varia pouco com a corrente, pode obter-se o ponto de rendimento máximo derivando a expressão 7.28 em ordem à corrente de carga I_2' .

$$\frac{d\eta}{dI_2'} = \frac{U_2' \cos \varphi (U_2' I_2' \cos \varphi + P_o + R_{cc} I_2'^2) - U_2' I_2' \cos \varphi (U_2' \cos \varphi + 2R_{cc} I_2')}{(U_2' I_2' \cos \varphi + P_o + R_{cc} I_2'^2)^2} \quad (7.29)$$

$$\frac{d\eta}{dI_2'} = 0 \Rightarrow (U_2' I_2' \cos \varphi + P_o + R_{cc} I_2'^2) - I_2' (U_2' \cos \varphi + 2R_{cc} I_2') = 0 \quad (7.30)$$

$$\frac{d\eta}{dI_2'} = 0 \Rightarrow P_o - R_{cc} I_2'^2 = 0 \quad (7.31)$$

Conclui-se assim que o ponto de rendimento máximo é obtido quando as perdas no cobre forem iguais às perdas no ferro. A corrente do secundário correspondente ao ponto de rendimento máximo será dada por:

$$R_{cc} I_{2m}^2 = P_o \quad (7.32)$$

Dividindo ambos os termos pela expressão das perdas no cobre em situação nominal, obtém-se:

$$\frac{I_{2m}^2}{I_{2N}^2} = \frac{P_o}{P_{cuN}} \quad (7.33)$$

O valor da corrente do secundário relativo à corrente nominal no ponto de rendimento máximo será dado por:

$$\frac{I_{2m}}{I_{2N}} = \sqrt{\frac{P_o}{P_{cuN}}} \quad (7.34)$$

Normalmente este ponto é localizado, por construção do transformador, abaixo de metade da carga nominal.

7.5.2 Queda de tensão

A queda de tensão de um transformador é definida como a diferença entre os valores eficazes da tensão do secundário em vazio e o valor eficaz da tensão do secundário em carga.

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 \quad (7.35)$$

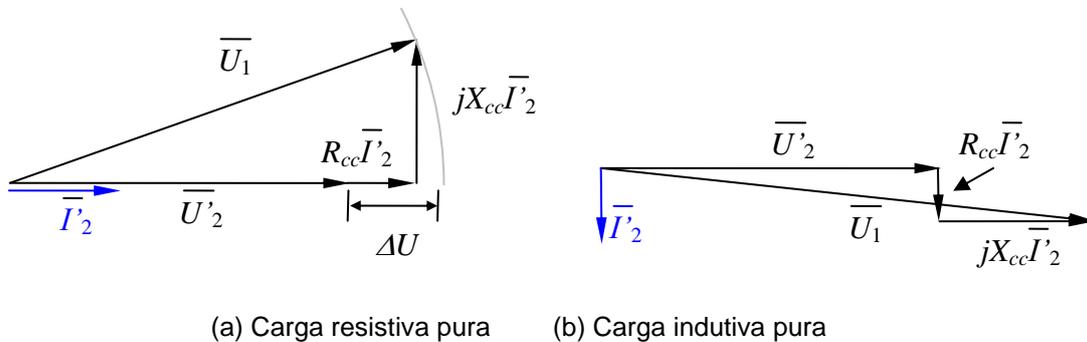
A queda de tensão em valores relativos é designada por regulação de tensão. É definida por:

$$\frac{\Delta U_2}{U_{20}} = \frac{U_{20} - U_2}{U_{20}} \quad (7.36)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por k , obtém-se:

$$\frac{\Delta U_2}{U_{20}} = \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{U_1 - U_1'}{U_1} \quad (7.37)$$

Esta queda de tensão depende da impedância de curto-circuito do transformador, da corrente de carga e do seu factor de potência. A figura 7.17 apresenta dois diagramas vectoriais para uma carga indutiva pura e uma carga resistiva pura.



(a) Carga resistiva pura (b) Carga indutiva pura
 Figura 7.17. Diagrama vectorial com carga resistiva e com carga indutiva.

A queda de tensão depende do tipo de carga. É mais elevada quando a carga for indutiva e pode ser negativa no caso de carga capacitiva.

Para transformadores de distribuição os valores da regulação de tensão são baixos (<5%).

Exemplo 7.3

Considere o transformador monofásico do exemplo 7.1. A resistência e a reactância de curto-circuito deste transformador são iguais a $R_{cc}=10 \Omega$ e $X_{cc}=40 \Omega$.

a) Calcule o vector da tensão no primário quando este se encontrar a alimentar a carga nominal no secundário sob tensão nominal e com factor de potência igual a 0,8 indutivo.

b) Determine o valor da regulação de tensão.

Resolução:

Quando a tensão do secundário for igual à tensão nominal, o seu valor reduzido ao primário é igual ao valor nominal da tensão do primário. O mesmo se passa com o valor da corrente. Considerando nulo o ângulo da tensão do

secundário, tem-se:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}'_2 + (R_{cc} + jX_{cc})\bar{I}'_2$$

A $\cos\varphi=0,8$ corresponde $\sin\varphi=0,6$. Logo $I_2'=10(0,8-j0,6)$ A e $U_2'=10000$ V, tem-se:

$$U_1=10320+j260$$

O valor eficaz será $U=10323$ V pelo que a queda de tensão será 323 V.

b) A regulação será dada por:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{|U_1| - |U'_2|}{|U_1|} = 0,0313$$

o que equivale a 3,13%.

7.6 Autotransformador

O autotransformador tem apenas um enrolamento contínuo sobre o qual estão ligados os terminais do primário e os terminais do secundário como se mostra na figura 7.18. No caso do autotransformador abaixador, mostrado na figura 7.18, o circuito do primário é constituído por todo o enrolamento (N_1 espiras). O circuito do secundário é constituído por uma porção menor de espiras do mesmo enrolamento (N_2 espiras).

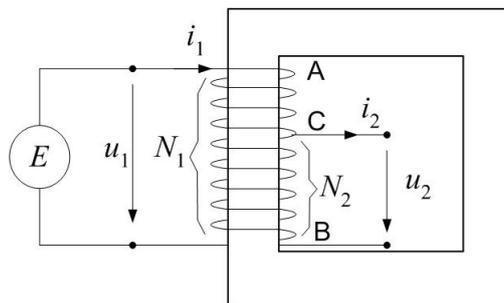


Figura 7.18. Autotransformador.

O autotransformador é usado com grandes vantagens económicas quando a razão de transformação for da ordem de grandeza da unidade. No caso do autotransformador abaixador deverá ser pouco superior à unidade, por exemplo 1,7 ou 2. No caso do autotransformador elevador a relação de transformação deverá ser um pouco inferior à unidade, por exemplo 0,7 ou 0,5.

O princípio de funcionamento e operação do autotransformador é semelhante ao do transformador. Se N_1 for o número de espiras da parte do enrolamento correspondente ao primário e N_2 o número de espiras correspondente à parte do secundário, a razão de transformação k pode ser representada também como:

$$k = \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1 \frac{d\phi}{dt}}{N_2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (7.38)$$

Donde se conclui que as tensões se relacionam do mesmo modo que no transformador.

A corrente no enrolamento da parte comum ao primário e ao secundário será dada pela diferença vectorial entre a corrente do primário e a corrente do secundário, isto é:

$$\dot{i}_{12} = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 \quad (7.39)$$

Atendendo às convenções da figura 7.18, estas duas correntes estão praticamente em fase e em valor eficaz tem-se também a diferença aritmética em que I_2 é superior a I_1 .

No caso ideal, em que se considera a relutância magnética do núcleo nula, a força magnetomotriz total deve ser nula também. Isto é:

$$(N_1 - N_2)i_1 + N_2(i_1 - i_2) = 0 \quad (7.40)$$

ou

$$(N_1 - N_2)i_1 + N_2(i_1 - i_2) = N_1i_1 - N_2i_2 = 0 \quad (7.41)$$

donde

$$k = \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (7.42)$$

Da expressão 7.42 conclui-se que também para as correntes se encontra uma relação semelhante ao caso do transformador.

7.6.1 Redução de cobre no autotransformador

O peso do cobre da secção AC correspondente ao primário (enrolamento em série) é proporcional a:

$$(N_1 - N_2)l_1 \quad (7.43)$$

O peso do cobre da secção CB correspondente à parte comum é proporcional a:

$$(I_2 - I_1)N_2 \quad (7.44)$$

Assim, o peso total do cobre do autotransformador é dado proporcional a:

$$(N_1 - N_2)l_1 + N_2(I_2 - I_1) \quad (7.45)$$

Num transformador de dois enrolamentos equivalente, o peso total do cobre será proporcional a:

$$N_1l_1 + N_2l_2 \quad (7.46)$$

A razão destes dois pesos será:

$$R_W = \frac{\text{Peso do cobre do autotransformador}}{\text{Peso do cobre do transformador}} = \frac{(N_1 - N_2)l_1 + N_2(I_2 - I_1)}{N_1l_1 + N_2l_2} \quad (7.47)$$

ou seja:

$$R_W = 1 - \frac{2 \frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{N_2}{N_1} \frac{l_2}{l_1}} = 1 - \frac{2}{1 + k} = 1 - \frac{1}{k} \quad (7.48)$$

Quanto menor for o termo R_W maior será a poupança de cobre no autotransformador em relação ao transformador de dois enrolamentos. A tabela 7.2 apresenta alguns valores da relação R_W .

Tabela 7.2 – Relação de quantidades de cobre entre um autotransformador e um transformador

k	R_W
---	-------

1.5	0.33
2	0.5
10	0.9
100	0.99

Da análise da tabela 7.2 pode concluir-se que apenas para razões de transformação próximas da unidade o ganho em cobre é significativo. Note-se que a poupança de cobre relativa no caso em que se usa o autotransformador é dada por: $P_W=1-R_W=1/k$.

Exemplo 7.4

Considere um transformador trifásico abaixador de 20 MVA 132/17,5 kV. O peso do cobre do enrolamento de 17,5 kV é 545 kg e o de 132 kV é de 542 kg.

a) Qual seria a quantidade de cobre que se pouparia se este transformador fosse substituído por um autotransformador equivalente?

b) Ambos os enrolamentos deste transformador são modificados de modo a alterar as suas tensões nominais. Esta alteração consiste em passar o enrolamento de 132 kV para 66 kV e o de 17.5 kV para 33 kV, mas é feita de modo a usar o mesmo cobre. Qual será agora a nova poupança de cobre caso se decidida usar um autotransformador.

Resolução

A quantidade total de cobre deste transformador é $542+545=1087$ kg.

a) A razão de transformação é $k=132/17,5=8$. A poupança relativa de cobre é dada por $P_W=1/8=0,125$. Em valores absolutos tem-se: $0,125 \times 1087=136$ kg.

b) A nova relação de transformação é $k=66/33=2$. A nova poupança é agora $P_W=1/2=0,5$. Em valores absolutos tem-se: $0,5 \times 1087=543.5$ kg.

7.7 Transformadores em sistemas trifásicos

Para se transformarem sistemas trifásicos de tensão de um nível para o outro, podem usar-se 3 transformadores iguais, um para cada fase, constituindo um banco de transformadores. Do lado dos três primários pode usar-se uma ligação em triângulo ou uma ligação em estrela. O mesmo se pode dizer para o lado dos secundários. Assim, podem usar-se 4 combinações diferentes. A ligação triângulo é designada por D ou d consoante se tratar do primário ou secundário. A ligação estrela designa-se por Y ou y. Assim tem-se transformadores Dd, Dy, Yd e Yy. De qualquer modo a potência do sistema trifásico será sempre 3 vezes a potência de cada transformador.

Note-se que as tensões destes transformadores dependem do tipo de ligação. Na ligação em triângulo os enrolamentos deverão ser dimensionados para suportar a tensão composta enquanto que na ligação estrela estes deverão ser dimensionados para suportar a tensão simples.

Em vez de um banco de três transformadores monofásicos usa-se mais frequentemente um transformador trifásico tendo seis enrolamentos num núcleo comum com três colunas principais colocado no mesmo tanque de arrefecimento como se mostra na figura 7.3. As vantagens de um transformador trifásico consistem num custo menor, menor peso, necessidade de menor espaço e um rendimento um pouco mais elevado.

No caso do regime alternado sinusoidal equilibrado, a análise é feita apenas para uma fase, sendo válidas

as considerações feitas sobre o transformador monofásico.

7.8 Transformadores de medida

Os transformadores de medida são usados para medida de tensão ou de corrente. A figura 7.19 apresenta o esquema de ligação do transformador de corrente (TI) e do transformador de tensão (TT). O primeiro coloca-se em série com o circuito que se quer medir a corrente. Tem o secundário em curto-circuito. O segundo coloca-se em paralelo e tem o secundário em aberto alimentando um voltímetro.

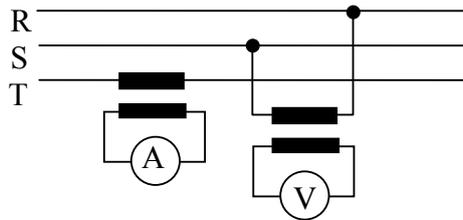


Figura 7.19. Ligação dos transformadores de medida.

Deverá ter-se o cuidado de não colocar os transformadores de corrente em circuito aberto nem de curto-circuitar os transformadores de tensão.

7.9 Características dos transformadores

A tabela 7.3 apresenta, como exemplo, as características de transformadores de distribuição secos trifásicos.

Tabela 7.3. Exemplo de um catálogo de transformadores secos (MT/BT)

Potência Nominal	kVA	100	250	400	630	1000	1600	2500		
Perdas em vazio	W	550	870	1200	1600	2300	3500	5500		
Perdas devidas à carga	W	1830	3320	4710	6810	8910	14402	21830		
Tensão de curto-circuito	%	6	6	6	6	6	6	7		
Corrente em vazio	%	2,5	2	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2		
Queda de tensão (cosφ=1)	%	1,99	1,50	1,35	1,26	1,07	1,08	1,11		
Queda de tensão (cosφ=0,8)	%	4,95	4,65	4,55	4,49	4,36	4,37	4,99		
□	100%	cosφ=1	%	97,68	98,35	98,54	98,68	98,89	98,89	98,92
		cosφ=0,8	%	97,11	97,95	98,19	98,36	98,62	98,62	98,65
	75%	cosφ=1	%	97,94	98,56	98,73	98,86	99,03	99,04	99,06
		cosφ=0,8	%	97,44	98,21	98,42	98,58	98,80	98,81	98,82

Potência acústica	dB(A)	59	65	68	70	73	76	79
-------------------	-------	----	----	----	----	----	----	----

7.10 Métodos mais comuns de refrigeração de transformadores

Os aspectos térmicos desempenham um papel primordial no dimensionamento e exploração dos transformadores.

Grande parte dos transformadores são refrigerados a óleo. A figura 7.20 apresenta o mecanismo de refrigeração dos transformadores a óleo.

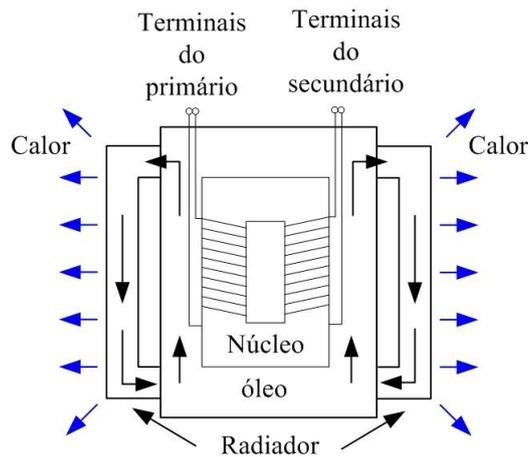


Figura 7.20. Mecanismo de refrigeração dos transformadores a óleo.

No sistema mais simples, designado por ONAN (óleo natural, ar natural), o óleo circula por convecção dentro do transformador subindo da base para o topo. Como a densidade do óleo diminui com a temperatura, este, ao aquecer, vai deslocar-se no sentido ascendente. O óleo aquecido é depois arrefecido num radiador entregando o seu calor ao exterior. Depois de frio, entra de novo no transformador junto à parte inferior. Este sistema não necessita de ventiladores ou bombas. Junto ao radiador a circulação de ar é feita também por convecção.



Figura 7.21. Arrefecimento tipo ONAN.



Figura 7.22. Arrefecimento tipo ONAF. Notem-se os ventiladores debaixo dos radiadores.

O sistema de arrefecimento ONAF (óleo natural, ar forçado) funciona segundo um princípio de

funcionamento semelhante ao ONAN. A única diferença é que existem agora ventiladores no exterior que obrigam o ar a circular mais rapidamente aumentando a capacidade de extracção do radiador. Com cargas pequenas, onde a necessidade de extracção de calor é menor, os ventiladores podem ser desligados e o transformador fica a funcionar em ONAN.

O aumento da potência nominal de um transformador quando se ligam os ventiladores exteriores é significativo chegando a atingir os 50%. Por exemplo um transformador de 20 MVA em funcionamento ONAN pode atingir a potência nominal de 30 MVA com arrefecimento ONAF.

O sistema ODAF (óleo dirigido, ar forçado) (em língua inglesa: Oil Directed Air Forced) O ar é obrigado a circular por meio de ventiladores e o óleo é obrigado a circular por meio de bombas e dirigido a determinados pontos dos enrolamentos por conveniente concepção do transformador. É o sistema mais eficiente de transferir o calor gerado no interior do transformador para a atmosfera.

O sistema ODWF (Oil Directed Water Forced) utiliza a circulação de óleo e água para transferir o calor. Quando estiver disponível uma alimentação suficiente de água fria, a utilização deste sistema pode reduzir as dimensões dos sistemas de refrigeração.

7.11 Exercícios

7.1. Um transformador monofásico tem 100 espiras no seu enrolamento do primário e 600 espiras no enrolamento do secundário. O enrolamento do primário encontra-se ligado a uma fonte de tensão alternada sinusoidal de 230 V, 50 Hz, enquanto que o enrolamento do secundário alimenta uma carga de 10 kVA. Pode considerar o conceito de transformador ideal.

- Determine as tensões e correntes aos terminais do transformador.
- Determine a impedância que se encontra ligada ao secundário
- Qual o valor da impedância vista do primário?

(solução: $U_1=230$ V $U_2=1380$ V $I_2=7,25$ A $I_1=43,48$ A b) $Z_2=190,44$ Ω c) $Z'_2=5,29$ Ω)

7.2. Um transformador de 10 kVA de potência nominal, 50 Hz, 230/50 V encontra-se ligado a uma fonte de tensão alternada sinusoidal de 200 V da qual absorve uma corrente de 20 A com um factor de potência igual a 0,9 indutivo. O transformador pode ser considerado ideal. Determine a impedância complexa do circuito de carga ligado aos terminais de tensão mais baixa. Qual o valor desta impedância vista dos terminais de 230 V.

(Solução: $Z_2=0,47$ Ω , ângulo 25.84° $Z'_2=10$ Ω , ângulo 25.84°)

7.3. Um transformador monofásico tem os seguintes parâmetros: $r_1=0.05$ Ω , $r_2=5$ Ω , $l_{\sigma 1}=0,7$ mH, $l_{\sigma 2}=70$ mH, $L_{1m}=2$ H, $N_1/N_2=0,1$. Não se consideram as perdas no ferro. Determine o circuito equivalente com os parâmetros referidos a:

- Ao enrolamento de tensão mais elevada
- Ao enrolamento de tensão mais baixa

Considere que a frequência é igual a 50Hz.

(Solução: a) $r'_1=5$ Ω , $r_2=5$ Ω , $X'_{\sigma 1}=22$ Ω , $X_{\sigma 2}=22$ Ω , $X_{2m}=62800$ Ω

b) $r_1=0,05$ Ω , $r'_2=0,05$ Ω , $X_{\sigma 1}=0,22$ Ω , $X'_{\sigma 2}=0,22$ Ω , $X_{1m}=628$ Ω)

7.4. Os ensaios de um transformador monofásico de 2 kVA, 230/60 V, 50 Hz, deram os seguintes resultados:

Ensaio em vazio, alimentando os enrolamentos de tensão mais baixa:

$$U_2=60 \text{ V}, I_2=0,7 \text{ A} \quad P_2=25 \text{ W}, U_1=230 \text{ V}$$

Curto circuito alimentado pelo enrolamento de tensão mais elevada:

$$U_1=20 \text{ V}, I_1=8,7 \text{ A} \quad P_1=50 \text{ W}$$

Determine os parâmetros do circuito equivalente em *gama* para este transformador referido ao enrolamento de 230 V.

(Solução: Circuito em *gama* $R_{cc}=0,66 \Omega$, $X_{cc}=2,2 \Omega$, $R_{1fe}=2115 \Omega$, $X_{1fe}=1568 \Omega$)

7.5. Um transformador monofásico de 20 kVA, 6000/230 V, 50 Hz, tem perdas em vazio no valor de 280 W. A resistência do enrolamento de tensão mais elevada é 18Ω , e a resistência do enrolamento de tensão mais baixa é $0,027 \Omega$. Este transformador é arrefecido a óleo. A convecção do ar sobre a cuba pode extrair 25 W por unidade de área e por grau centígrado de aumento de temperatura entre a cuba e o ar. Considere que a temperatura da cuba não pode exceder os 100°C e que a temperatura do ar não ultrapassa os 40°C . Calcule o valor das perdas em funcionamento nominal e estime a superfície da cuba necessária para que o transformador possa funcionar à potência nominal.

(Solução: Perdas= 684 W, Superfície= 4560 cm^2)

7.6. Uma unidade industrial é alimentada através de um transformador trifásico de $S_N=10 \text{ MVA}$ a partir de uma linha de 60 kV. Este transformador vai funcionar 8 horas por dia a plena carga e encontra-se em vazio no resto do dia. O construtor A propõe-se fornecer um transformador com rendimento a plena carga de 99% e perdas em vazio de 0,5% de S_N . O fornecedor B propõe um transformador pelo mesmo preço tendo um rendimento a plena carga de 98,8% e perdas em vazio de 0,3% de S_N .

Qual o transformador que deve ser escolhido?

Considerando que a energia custa $0,1 \text{ €/kWh}$, qual será a diferença no custo anual entre estes dois transformadores? (Considere que a fábrica funciona durante 250 dias por ano. Os restantes dias o transformador encontra-se em vazio)

Determine qual a carga a que corresponde o ponto de rendimento máximo de cada um destes dois transformadores.

(Solução: a) O transformador B. b) 9430 € c) Transformador A: 99% da carga nominal, Transformador B: 57,27% da carga nominal)

7.7. No ensaio em curto-circuito do transformador do problema anterior verificou-se que é necessário aplicar 12% da tensão ao primário para que circule em ambos os enrolamentos a corrente nominal. Determine a regulação de tensão nas três situações:

Carga nominal com $\cos\varphi=1$

Carga nominal indutiva com $\cos\varphi=0,1$

Carga nominal capacitiva com $\cos\varphi=0,1$

(Solução: a) $\text{Reg}=0,71 \%$ b) $\text{Reg}=10,6 \%$ c) $\text{Reg}=-13,5 \%$)

Capítulo 8 Princípio de Funcionamento das Máquinas de Corrente Alternada Polifásicas

8.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se o princípio de funcionamento das máquinas síncronas e assíncronas. Este tem como base a criação do campo girante das máquinas eléctricas rotativas. O estudo será feito através da noção de força magnetomotriz de entreferro.

8.2 Campo criado por um enrolamento concentrado

Considere-se, numa primeira fase de estudo, o enrolamento concentrado monofásico representado em corte na figura 8.1. Neste circuito, as duas bobinas com $N/2$ espiras cada uma, criam um campo magnético com dois pares de pólos. Estas duas bobinas encontram-se colocadas nas ranhuras ou cavas indicadas na figura estando as outras vazias. Diz-se que se está em presença de um enrolamento concentrado.

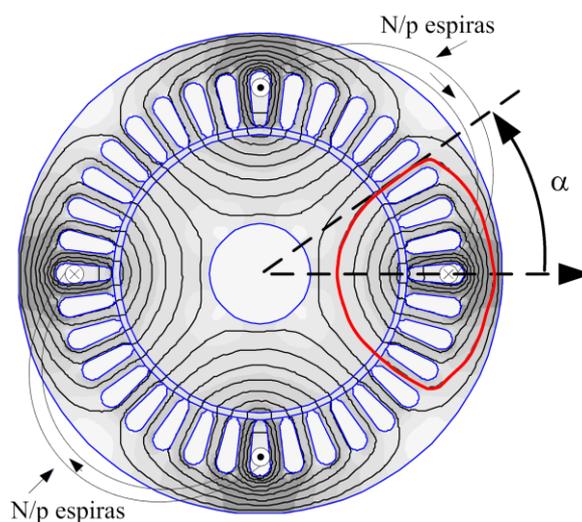


Figura 8.1. Enrolamento concentrado com dois pares de pólos ($p=2$).

A componente radial do campo de indução B varia ao longo da periferia do entreferro e tem o andamento indicado na figura 8.2. Este campo foi calculado com um programa de elementos finitos e apresenta uma forma aproximadamente rectangular. As variações de sinal do campo B verificam-se precisamente nos locais onde estão colocados os condutores. No exemplo mostrado a amplitude do campo de indução é um pouco inferior a $0,3T$.

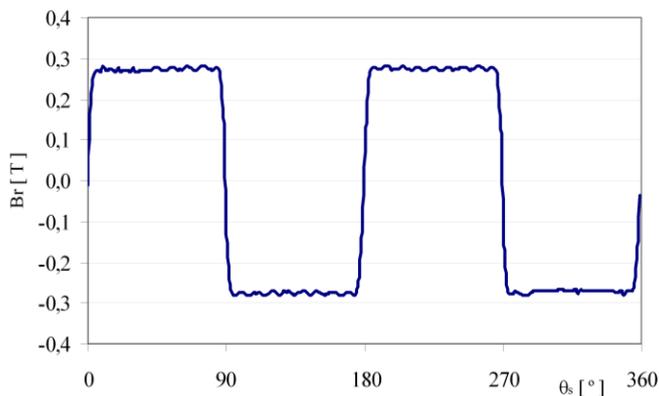


Figura 8.2. Andamento da componente radial do campo B ao longo da periferia do entreferro.

8.2.1 Conceito de força magnetomotriz de entreferro

O andamento da componente radial do campo B também poderá ser calculado de forma aproximada recorrendo ao conceito de força magnetomotriz de entreferro. Assim, considerem-se as hipóteses simplificativas:

1. O ferro tem permeabilidade magnética infinita resultando $H_{fe}=0$.
2. Ignoram-se os efeitos das cavas e dentes considerando-se o entreferro uniforme de espessura equivalente igual a g .
3. No entreferro, ao longo de uma linha de força, o campo é constante.

Considere-se a linha de força indicada a vermelho na figura 8.1 e que a coordenada de posição genérica é designada provisoriamente pela letra α . Esta linha de força circula pelo ferro no estator e no rotor e atravessa o entreferro nos locais determinado pelos ângulos $-\alpha$ e α . Tendo em atenção as hipóteses simplificativas atrás enunciadas e o teorema de Ampere, a circulação do campo magnético H por esta linha de força dá:

$$\oint H \cdot dl = 2H_g g = \frac{Ni}{p} \tag{8.1}$$

onde:

H_g – Campo magnético radial no entreferro nos locais representados por α e $-\alpha$.

N - Número de espiras por fase

p – número de pares de pólos

Definindo força magnetomotriz de entreferro, uma função da coordenada de posição α , como:

$$F_m(\alpha) = \frac{1}{2} \oint H \cdot dl = gH_g(\alpha) \tag{8.2}$$

tem-se

$$H_g(\alpha) = \frac{F_m(\alpha)}{g} \quad (8.3)$$

Atendendo à equação 8.1, resulta:

$$F_m(\alpha) = \pm \frac{Ni}{2p} \quad (8.4)$$

Onde os sinais (+) e (-) são usados de acordo com a figura 8.2. O campo no entreferro pode assim ser calculado de forma aproximada a partir desta função que constitui um auxiliar de cálculo.

O andamento de F_m , e por consequência do campo criado por um enrolamento concentrado ao longo de α , tem a forma rectangular como o apresentado na figura 8.3. Os pontos de descontinuidade desta função estão localizados nos locais onde se situam as correntes tendo sentido positivo ou negativo consoante o sentido destas. A vermelho indica-se uma aproximação sinusoidal para a onda de força magnetomotriz obtida através do desenvolvimento da onda rectangular em série de Fourier. Note-se que é uma aproximação grosseira. O valor máximo da onda sinusoidal é $4/\pi$ vezes superior ao valor da onda rectangular.

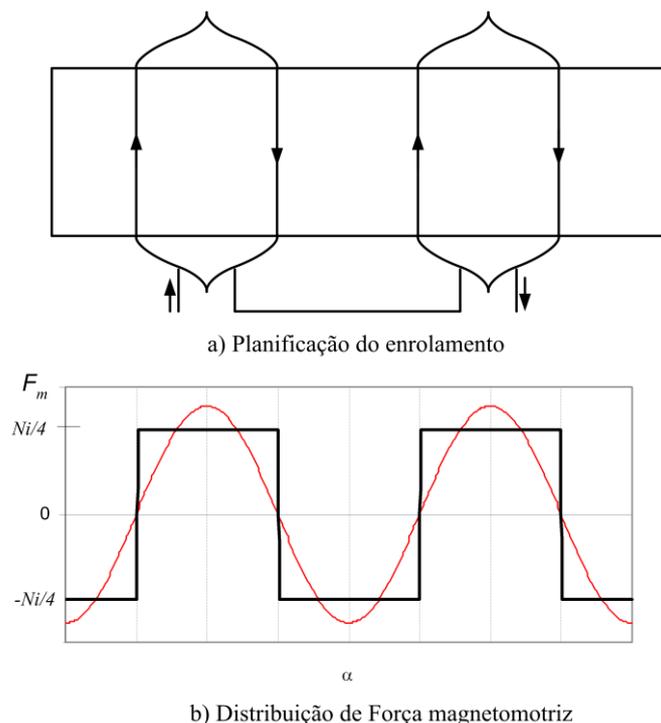


Figura 8.3. Andamento do campo B ao longo da periferia do entreferro ($p=2$).

O enrolamento concentrado apresenta assim alguns inconvenientes:

- a) Origina um campo no entreferro não sinusoidal ao longo de α .
- b) O espaço da periferia é mal utilizado uma vez que todos os condutores estão colocados na mesma cava existindo espaço desaproveitado.

8.3 Campo criado por um enrolamento distribuído

8.3.1 Enrolamento monofásico

Existem várias técnicas para criar um campo ao longo da periferia do entreferro de forma mais aproximada à sinusoidal. Uma delas consiste em distribuir o enrolamento por várias cavas. A bobina por pólo com N/p espiras, mostrada na figura 8.1, será decomposta em q bobinas com $N/(pq)$ espiras cada, colocadas em q cavas adjacentes. A figura 8.4 apresenta a distribuição de um enrolamento com $q=4$ (cavas por pólo e por fase) para um enrolamento com um par de pólos. As cavas que se encontram vazias serão ocupadas pelas outras duas fases ao que corresponde uma melhor ocupação da periferia. As cavas vazias serão utilizadas para a colocação dos condutores das outras duas fases num sistema trifásico. A figura 8.4 apresenta também o andamento da força magnetomotriz de entreferro.

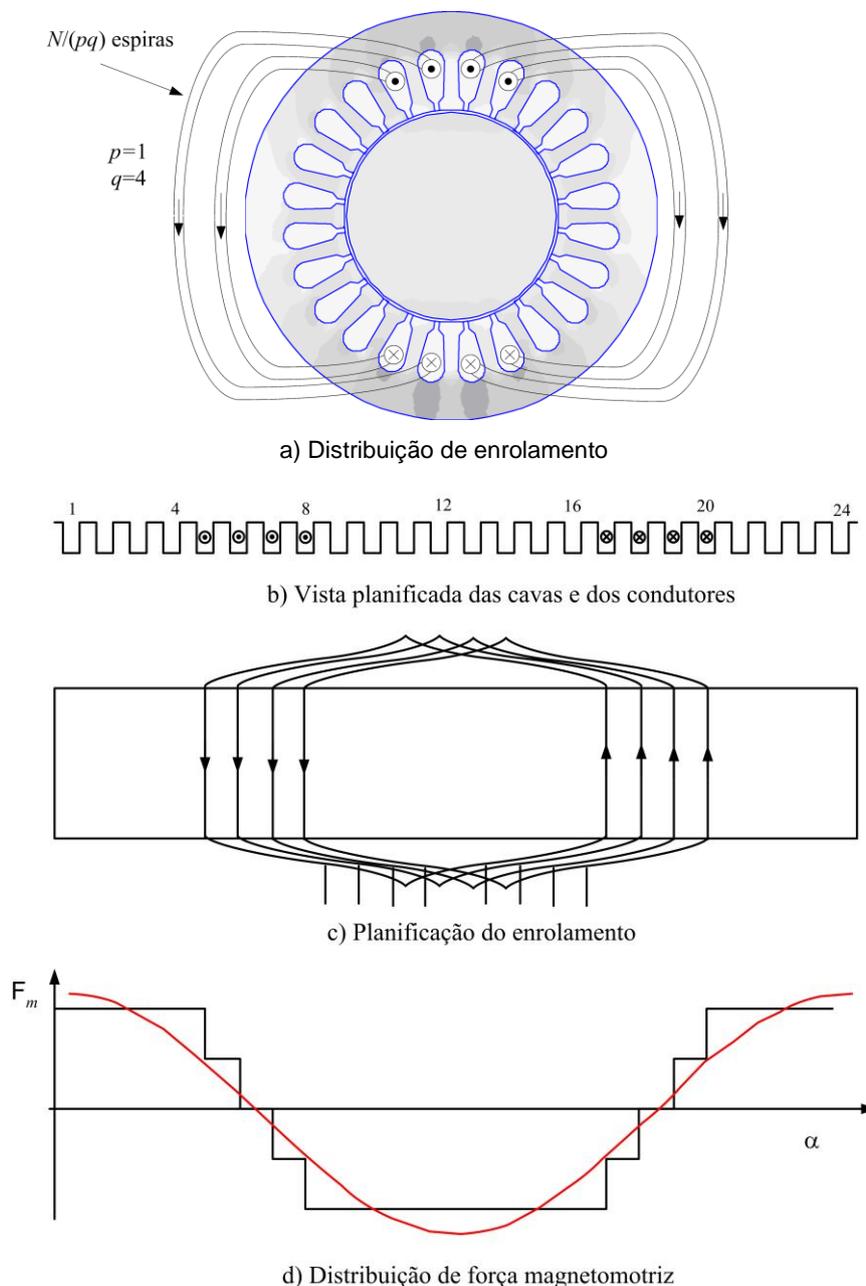


Figura 8.4. Enrolamento monofásico com quatro condutores por fase e por pólo ($p=1$, $q=4$).

Comparando com a situação anterior, figura 8.3, o andamento da F_m é mais aproximado da sinusóide.

A distribuição de condutores ao longo de várias cavas tem assim o benefício de tornar a distribuição de campo no entreferro mais próxima da sinusoidal. Como este enrolamento será distribuído também por vários locais, torna-se mais fácil a extracção de calor para o exterior. Este é um aspecto determinante no dimensionamento das máquinas. Estando os condutores distribuídos, torna-se também mais fácil a sua colocação na periferia da máquina uma vez que o tamanho das cavas é agora menor.

8.3.2 Enrolamento trifásico

A figura 8.5 apresenta a representação dos campos criados por cada fase, para o caso em que se tem apenas um par de pólos. A verde estão indicadas as cavas destinadas a cada uma das fases.

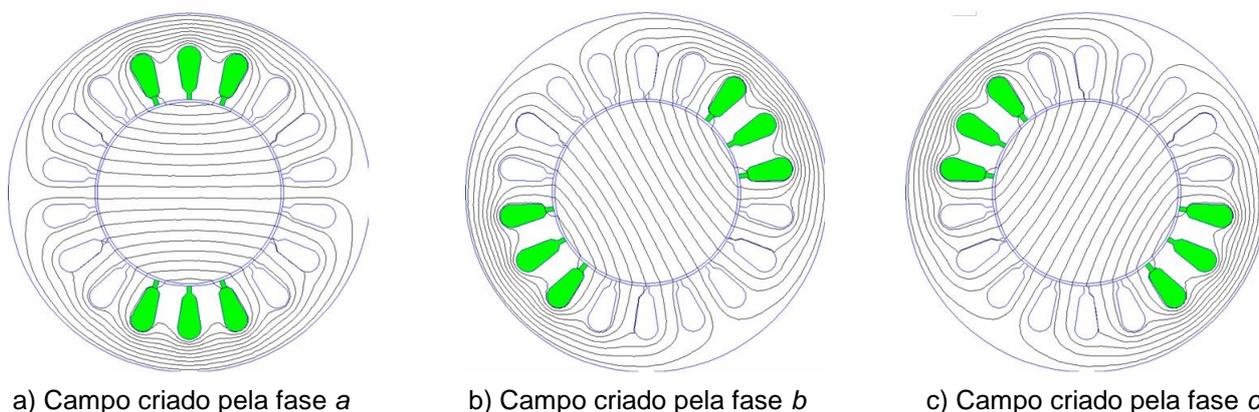


Figura 8.5. Campo criado por cada uma das fases isoladamente ($p=1, q=3$).

Da figura 8.5 pode concluir-se que cada fase cria um campo magnético com eixos de simetria colocados em posições diferentes. Estas posições dependem da localização dos condutores de cada fase. O eixo de simetria do campo resultante pode ser utilizado para indicar a posição das fases no espaço. Estes eixos de simetria estão desfasados de 120° no espaço.

A figura 8.6. apresenta um esquema simplificado para a representação do enrolamento com um par de pólos. Ao enrolamento da fase a, representada pelos círculos a vermelho, corresponde o rectângulo a representado a vermelho e colocado no eixo de simetria do campo criado pela fase a. O mesmo raciocínio é aplicado às fases b e c representadas a verde e a amarelo. Normalmente usa-se uma representação ainda mais simplificada representando apenas os rectângulos. Em vez dos rectângulos usam-se também símbolos de bobinas. Adopte-se agora a nomenclatura final para a posição ao longo da periferia. Esta passa a ser designada por θ_s e é medida a partir do eixo de simetria do campo da fase a.

A intensidade do campo criado por cada fase será proporcional à corrente correspondente, sendo o valor do campo resultante obtido pela soma vectorial dos 3 campos.

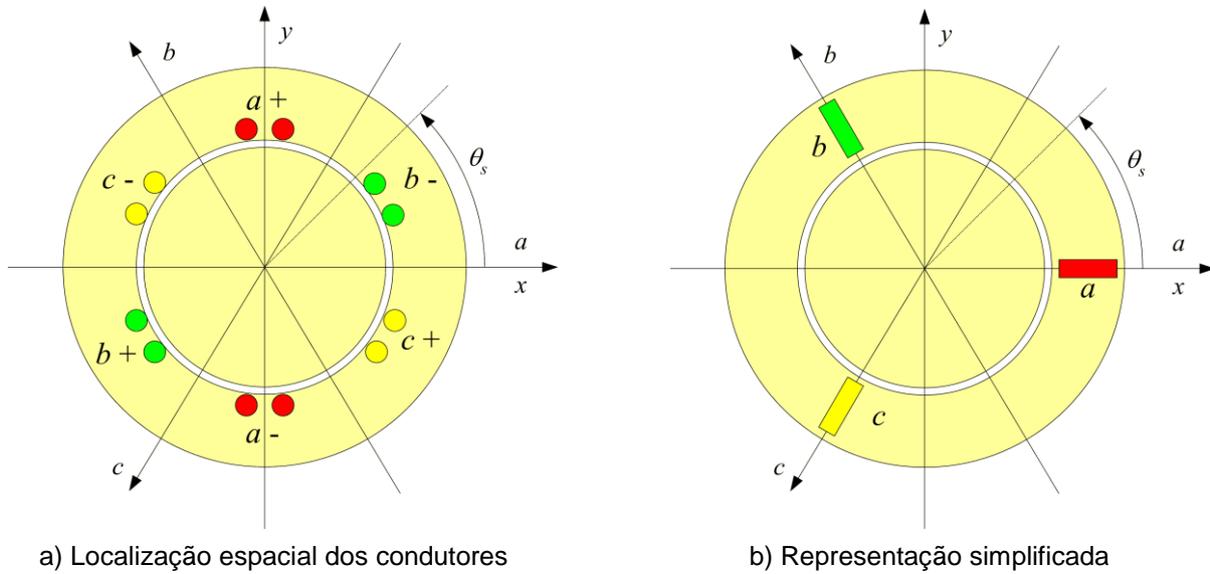


Figura 8.6. Esquema simplificado para a representação do enrolamento.

Estando os enrolamentos desfasados de 120°, o andamento ao longo de θ_s , para as três fases, pode ser aproximado por uma onda sinusoidal. Estas serão dadas por:

$$F_{na}(\theta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq}}{2p} i_a \cos(p\theta_s) \tag{8.5}$$

$$F_{nb}(\theta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq}}{2p} i_b \cos\left(p\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{8.6}$$

$$F_{nc}(\theta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq}}{2p} i_c \cos\left(p\theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{8.7}$$

Em que $N_{eq} = k_e N$ é um número equivalente de espiras que tem em conta a distribuição dos condutores por várias cavas. O factor $4/\pi$ resulta da aproximação da onda rectangular por uma onda sinusoidal. Os aspectos da distribuição são contabilizados no factor de enrolamento k_e . Este factor pode contabilizar os efeitos da distribuição e outros aspectos.

Assim têm-se 3 ondas de campo desfasadas no espaço de 120°. Estas são proporcionais às respectivas correntes que circulam nos enrolamentos.

O ângulo θ_s , que representa a coordenada de posição de um ponto genérico da periferia, no referencial do estator, é designado por ângulo mecânico. O ângulo $p\theta_s$ é designado por ângulo eléctrico. Frequentemente os estudos de máquinas eléctricas são feitos admitindo uma máquina com um par de pólos. Esta hipótese é equivalente a utilizar ângulos eléctricos em vez de ângulos mecânicos.

Exemplo 8.1

Um enrolamento trifásico com dois pares de pólos tem 200 espiras por fase e é caracterizado por um factor de enrolamento igual a $K_e=0,946$. Esta máquina encontra-se numa situação anormal de funcionamento pois apenas a fase a é alimentada com 15A (DC) estando as outras duas fases desligadas. Calcule a onda

de força magnetomotriz resultante.

Resolução

Do enunciado do problema tira-se: $i_a=15A$, $k_e=0.946$, $N=200$ espiras, $p=2$.

$$N_{eq}=200 \times 0.946=189.2 \qquad N_{eq} i_a / (2p)=709.5$$

Da equação 8.5 tira-se:

$$F_{ma}(\theta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq} i_a}{2p} \cos(p\theta_s) = 903.36 \cos(2\theta_s)$$

8.4 Campo criado por um sistema trifásico sinusoidal

Considere-se agora que a corrente na fase a tem a forma dada pela equação 8.8.

$$i_a = \sqrt{2} I_a \cos(\omega_s t) \tag{8.8}$$

A força magnetomotriz criada por esta fase será dada por:

$$F_{ma}(\theta_s, t) = \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq}}{2p} \sqrt{2} I_a \cos(p\theta_s) \cos(\omega_s t) \tag{8.9}$$

Esta equação representa uma força magnetomotriz que varia sinusoidalmente no espaço estando a sua amplitude a variar sinusoidalmente no tempo. Diz-se que se está em presença se um campo pulsante. Neste caso os pontos do espaço correspondentes a $\cos(p\theta_s)=0$ terão sempre amplitude nula, enquanto que os pontos do espaço correspondentes a $\cos(p\theta_s)=1$ terão sempre amplitude máxima. Definindo,

$$F_{max} = \sqrt{2} \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq}}{2p} I_a \tag{8.10}$$

e usando a fórmula trigonométrica,

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \tag{8.11}$$

obtém-se:

$$F_{ma}(\theta_s, t) = \frac{1}{2} F_{max} \cos(p\theta_s - \omega_s t) + \frac{1}{2} F_{max} \cos(p\theta_s + \omega_s t) \tag{8.12}$$

que se pode interpretar como a soma de duas ondas, uma que roda no sentido positivo, e a outra que roda no sentido negativo.

$$F^+ = \frac{1}{2} F_{max} \cos(p\theta_s - \omega_s t) \tag{8.13}$$

$$F^- = \frac{1}{2} F_{max} \cos(p\theta_s + \omega_s t) \tag{8.14}$$

Para as outras duas fases ter-se-á:

$$F_{nb}(\theta_s, t) = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(p\theta_s - \omega_s t) + \frac{1}{2} F_{\max} \cos\left(p\theta_s + \omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.15)$$

$$F_{nc}(\theta_s, t) = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(p\theta_s - \omega_s t) + \frac{1}{2} F_{\max} \cos\left(p\theta_s + \omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.16)$$

A força magnetomotriz resultante será a soma dos termos das equações 8.12, 8.15 e 8.16. Obtém-se:

$$F_{mt}(\theta, t) = F_{ma} + F_{nb} + F_{nc} = \frac{3}{2} F_{\max} \cos(p\theta_s - \omega_s t) \quad (8.17)$$

e representa uma onda que roda no sentido positivo. O valor máximo desta onda de força magnetomotriz é 3/2 superior ao valor máximo da onda de F.m.m criada por uma fase apenas.

A interpretação física da equação 8.17, encontra-se na figura 8.7 representando o campo resultante em três instantes sucessivos.

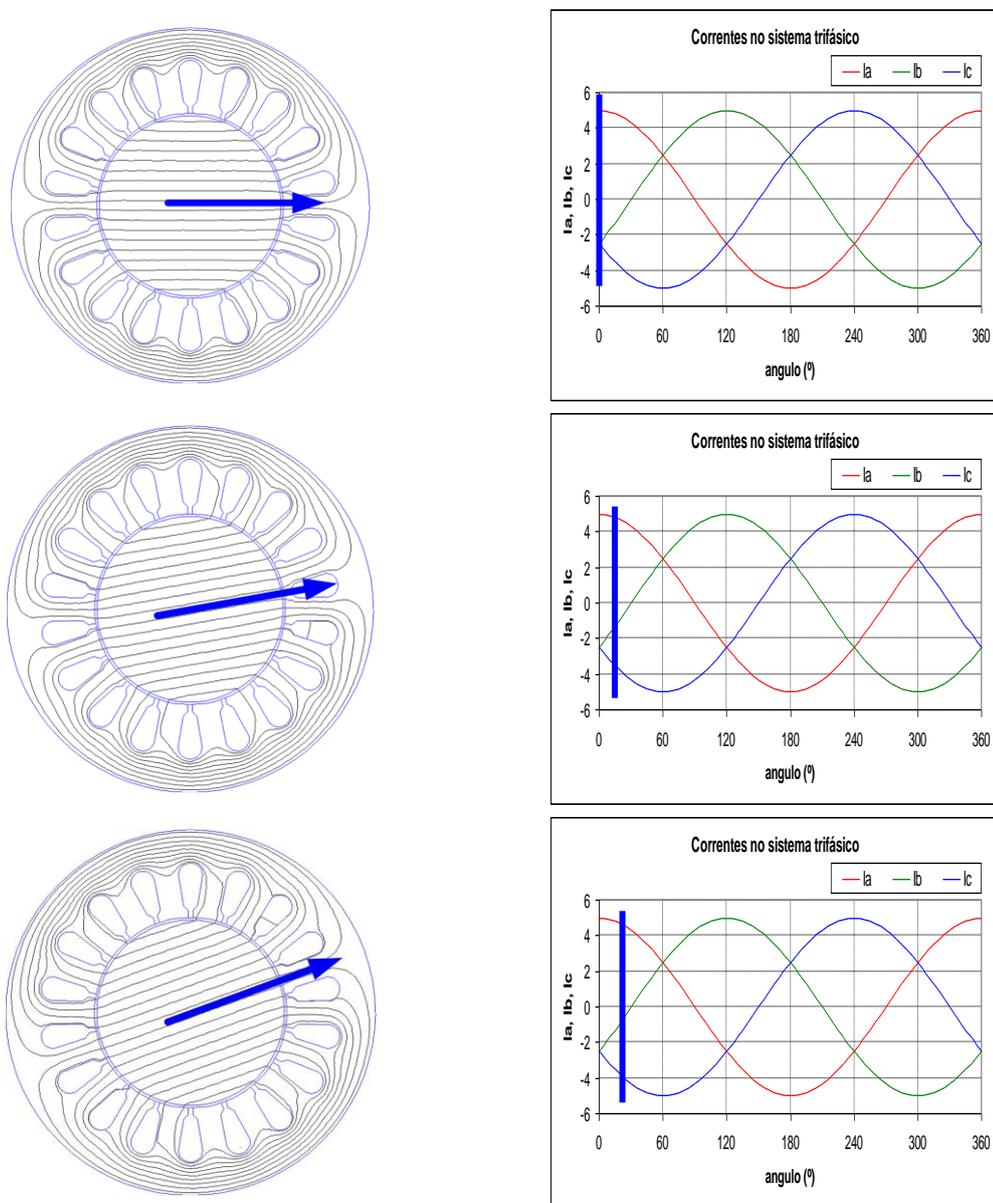


Figura 8.7. Forma do campo em três instantes sucessivos. A seta a azul representa a posição de campo máximo.

O campo total, para uma máquina com 2 pares de pólos e para um determinado instante, é apresentado na

figura 8.8 onde se pode observar que a distribuição de campo já é muito próxima da forma sinusoidal. Com efeito, quando se adicionam as forças magnetomotriz produzidas pelas 3 fases, verifica-se que o campo resultante continua a ter o mesmo número de pólos e se aproxima mais da forma sinusoidal.

Na figura podem observar-se os efeitos das cavas e dentes que foram desprezados neste estudo.

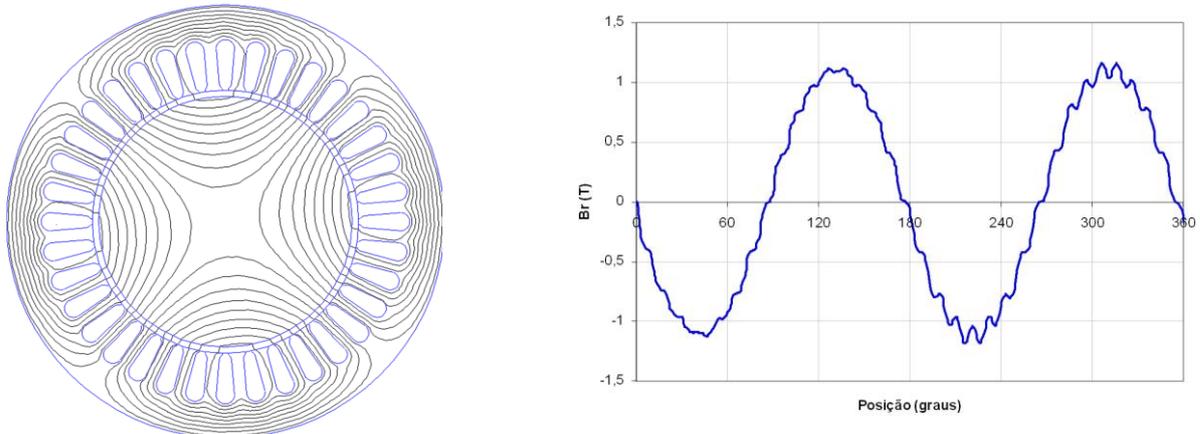


Figura 8.8. Distribuição de campo criado pelas três fases.

O ponto máximo da onda de força magnetomotriz θ_B é determinado por

$$\cos(p\theta_B - \omega_s t) = 1 \quad \Rightarrow \quad p\theta_B - \omega_s t = 0 \quad (8.18)$$

ou seja:

$$\theta_B = \frac{\omega_s}{p} t \quad (8.19)$$

Na expressão 8.19 a posição inicial do máximo do campo de indução magnética B é nula no instante inicial. Este caso particular resultou da escolha criteriosa do instante inicial para as expressões das correntes adoptadas na expressão 8.8. Da expressão 8.19 pode concluir-se que a velocidade do campo é dada por:

$$\omega_{syn} = \frac{\omega_s}{p} \quad (8.20)$$

Em rotações por minuto (rpm) tem-se:

$$N_{syn} = \frac{60f}{p} \quad (8.21)$$

Em resumo pode concluir-se que os 3 enrolamentos desfasados no espaço de 120° e percorridos por correntes sinusoidais desfasadas no tempo de 120° são equivalentes a um enrolamento fictício que roda à velocidade de sincronismo e é alimentado por corrente contínua de valor igual ao máximo da corrente de cada uma das fases tendo $3/2$ das espiras de cada fase.

Exemplo 8.2

Calcule as diversas velocidades de rotação do campo expressas em rotações por minuto para máquinas diferentes com números de pares de pólos de 1 a 10. Admita as frequências industriais de 50Hz e 60Hz.

Resolução

Atendendo à expressão 8.21 pode obter-se a tabela seguinte.

p	Nsyn (50Hz)	Nsyn (60Hz)
1	3000	3600
2	1500	1800
3	1000	1200
4	750	900
5	600	720
6	500	600
7	428.57	514.28
8	375	450
9	333.33	400
10	300	360

8.5 Cálculo do campo de indução no entreferro

A partir da expressão da onda de força magnetomotriz e da equação 8.3 pode calcular-se a onda de campo de indução magnética. Obtém-se:

$$\begin{aligned}
 B(\theta_s, t) &= \mu_0 \frac{F_{mt}}{g} = \mu_0 \frac{3F_{max}}{2g} \cos(p\theta_s - \omega_s t) \\
 &= B_{m\acute{a}x} \cos(p\theta_s - \omega_s t)
 \end{aligned}
 \tag{8.22}$$

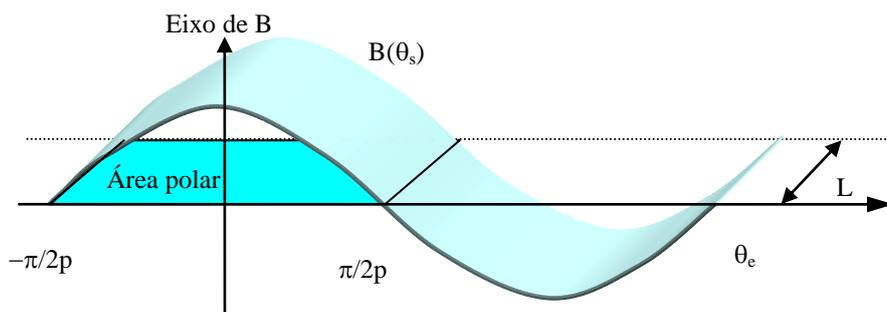


Figura 8.9. Definição de fluxo por pólo.

O fluxo magnético numa secção em movimento, com o eixo de simetria coincidente com a posição de campo máximo, pode ser calculado por:

$$\phi = L \int_{-\pi/2p}^{\pi/2p} B_{m\acute{a}x} \cos(p\theta_s) R d\theta_s
 \tag{8.23}$$

$$\phi = \frac{2LRB_{m\acute{a}x}}{p}
 \tag{8.24}$$

8.6 Fluxos ligados com os enrolamentos (não incluindo os fluxos de dispersão)

Considere-se um enrolamento, colocado na posição θ_a , com apenas uma espira e um par de pólos ($N=1$, $p=1$). Por definição o ângulo θ_a representa o eixo de simetria do enrolamento. Calcule-se o fluxo ligado com este enrolamento no instante em que o valor máximo do campo resultante se encontra na posição θ_B . Nesta primeira fase vai calcular-se apenas o fluxo ligado devido ao campo que circula pelo entreferro. A dispersão será considerada mais tarde para as máquinas síncronas e para as máquinas assíncronas nos capítulos seguintes.

Considere-se também que existe um campo de indução resultante no entreferro de estrutura sinusoidal devido às correntes do estator e às correntes do rotor.

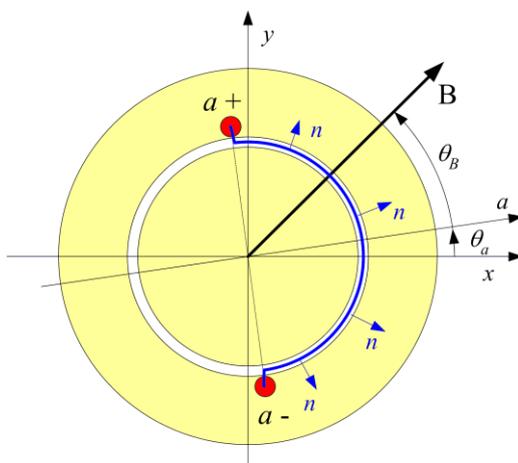


Figura 8.10. Localização da fase genérica para a determinação do fluxo ligado.

O fluxo ligado, figura 8.10, será dado por:

$$\psi_{1e} = \int_{\theta_a - \frac{\pi}{2}}^{\theta_a + \frac{\pi}{2}} B_{m\acute{a}x} \cos(\theta_s - \theta_B) LR d\theta_s \quad (8.25)$$

$$\psi_{1e} = LR \int_{\theta_a - \frac{\pi}{2}}^{\theta_a + \frac{\pi}{2}} B_{m\acute{a}x} \cos(\theta_s - \theta_B) d\theta_s \quad (8.26)$$

$$\psi_{1e} = 2LRB_{m\acute{a}x} \cos(\theta_a - \theta_B)$$

ou seja,

$$\psi_{1e} = \phi \cos(\theta_a - \theta_B) \quad (8.27)$$

Os fluxos ligados com os enrolamentos do estator podem ser calculados a partir de 8.27 tendo em conta que a posição dos enrolamentos das fases é $\theta_a=0$ para a fase a, $\theta_b=2\pi/3$ para a fase b e $\theta_c=2\pi/3$ para a fase c (ver figura 8.11). Obtém-se:

$$\psi_a = N_{1eq}\phi \cos(0 - \omega_s t) = N_{1eq}\phi \cos(\omega_s t) \quad (8.28)$$

$$\psi_b = N_{1eq}\phi \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega_s t\right) = N_{1eq}\phi \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.29)$$

$$\psi_c = N_{1eq}\phi \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \omega_s t\right) = N_{1eq}\phi \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.30)$$

A expressão 8.27 também pode ser usada para calcular o fluxo ligado com os enrolamentos do rotor. Com efeito, a interpretação daquela equação leva a concluir que o fluxo ligado num determinado enrolamento é dado pela projecção do vector B da figura 8.10 sobre o eixo de simetria do enrolamento.

Para o cálculo dos fluxos do rotor deve ter-se em atenção a figura 8.11 onde se apresenta um esquema da máquina assíncrona e outro para a máquina síncrona. Estas serão estudadas nos próximos capítulos. Para efeitos da teoria aqui descrita, basta ter em mente que a máquina assíncrona tem um sistema trifásico de enrolamentos no rotor e que a máquina síncrona tem no rotor uma bobina que é percorrida por corrente contínua.

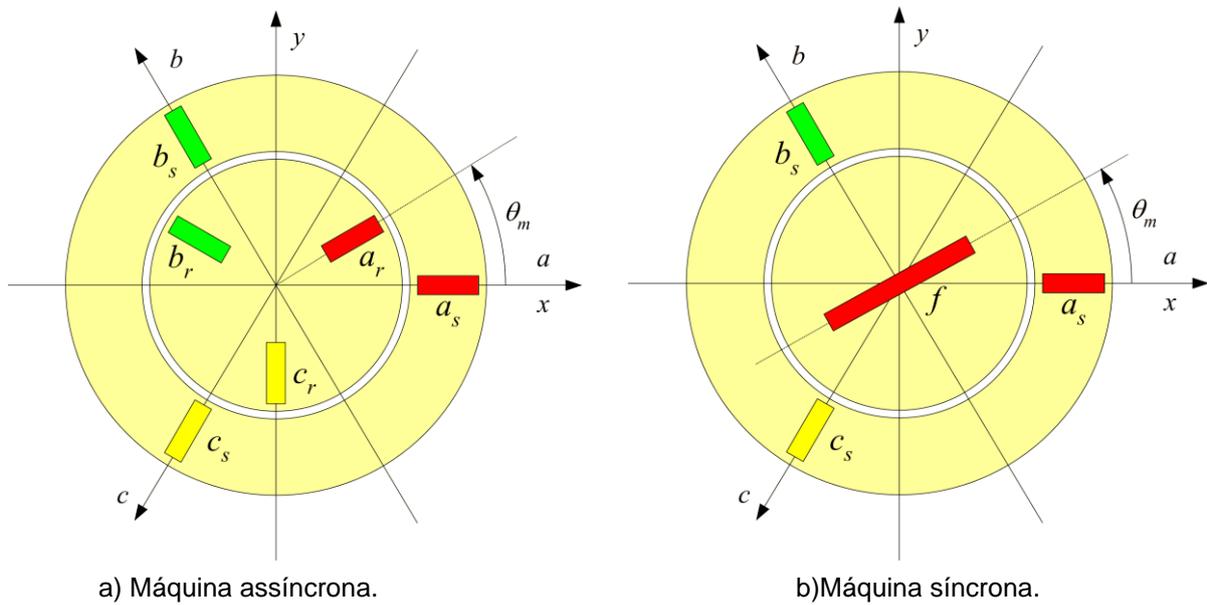


Figura 8.11. Localização das fases do estator e do rotor.

Estando o rotor numa posição θ_m , e considerando um enrolamento com p pares de pólos, tem-se:

$$\psi_{ar} = N_{2eq}\phi \cos(p\theta_m - \omega_s t) = N_{2eq}\phi \cos(\omega_s t - p\theta_m) \quad (8.31)$$

$$\psi_{br} = N_{2eq}\phi \cos\left(p\theta_m + \frac{2\pi}{3} - \omega_s t\right) = N_{2eq}\phi \cos\left(\omega_s t - p\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.32)$$

$$\psi_{cr} = N_{2eq}\phi \cos\left(p\theta_m + \frac{4\pi}{3} - \omega_s t\right) = N_{2eq}\phi \cos\left(\omega_s t - p\theta_m - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.33)$$

estando o rotor à velocidade ω_m , tem-se $\theta_m = \omega_m t + \delta$, ou seja:

$$\psi_{ar} = N_{2eq}\phi \cos(\omega_s t - p\omega_m t - \delta) = N_{2eq}\phi \cos(\omega_r t - \delta) \quad (8.34)$$

A frequência vista no rotor será:

$$\omega_r = \omega_s - p\omega_m \quad (8.35)$$

A equação 8.35 relaciona a frequência das grandezas do rotor e do estator com a velocidade de rotação.

Para os dois tipos de máquinas eléctricas baseadas no princípio do campo girante:

Máquinas síncronas, onde $\omega_s = p\omega_m \rightarrow \omega_r = 0$.

Nestas máquinas a velocidade de rotação é determinada pela velocidade do campo girante, sendo nula a frequência das grandezas do rotor.

Máquinas assíncronas

Nestas máquinas, como se verá, é induzida uma força electromotriz no rotor de frequência ω_r . Esta é utilizada para a criação das correntes que circularão neste. Define-se escorregamento relativo s de modo:

$$s = \frac{\omega_s - p\omega_m}{\omega_s} = \frac{\omega_r}{\omega_s} \quad (8.36)$$

ou seja

$$\omega_r = s\omega_s \quad (8.37)$$

8.7 Vector espacial de fluxo.

As expressões 8.28 a 8.34 derivam da expressão 8.27. Desta expressão pode concluir-se que cada um dos fluxos ligados com cada enrolamento pode ser calculado, aparte o número de espiras, como a projecção de um vector que roda à velocidade de sincronismo. Fazendo corresponder o plano de Argand com o plano xy das figuras anteriores, obtém-se a figura 8.12. O vector ψ_m é designado por vector espacial do fluxo.

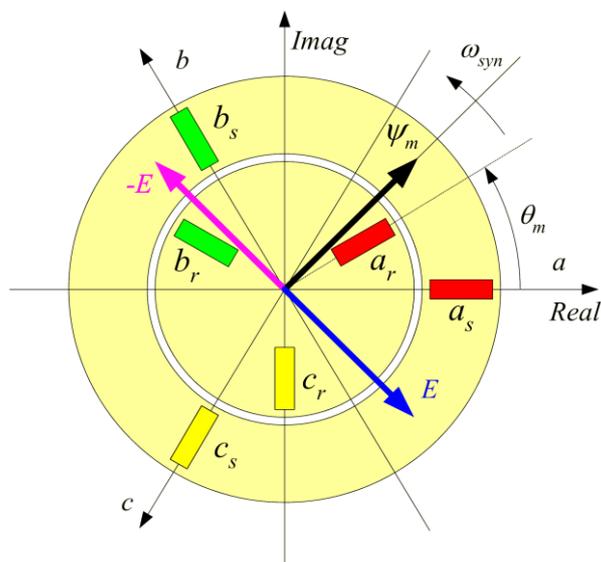


Figura 8.12. Vector espacial do fluxo.

Este vector constitui um instrumento de análise precioso. No referencial do estator este vector roda à velocidade de sincronismo ω_{syn} . No referencial do rotor roda à velocidade $s\omega_{syn}$. Normalmente os estudos são feitos considerando máquinas equivalentes com apenas um par de pólos. O cálculo dos fluxos vistos em diferentes referenciais pode ser efectuado facilmente com recurso a este vector. Na figura 8.12 estão representados dois vectores em quadratura com o vector espacial do fluxo. Estes serão usados para o cálculo das forças electromotrizas induzidas nos enrolamentos.

Exemplo 8.3

Considere o enrolamento do exemplo 8.1. Este enrolamento encontra-se agora alimentado por um sistema trifásico de correntes simétrico e equilibrado de valor eficaz igual a 15A. Nesta situação a onda de fmm num determinado instante é a que se indica na figura 8.8. A espessura do entreferro é igual a 2mm, o raio do entreferro é 40cm e o comprimento do núcleo de ferro é 50 cm.

- a) Calcule a expressão da onda de fmm resultante
- b) Calcule o valor de pico do campo de indução magnética obtido.
- c) Calcule o valor do fluxo por pólo ϕ .
- d) Obtenha as expressões matemáticas para os fluxos ligados com os enrolamentos.

Resolução

- a) A onda de F_{mm} resultante é dada pela expressão 8.17. O valor de F_{max} é dado por $\sqrt{2} \frac{4}{\pi} \frac{N_{eq} I_a}{2p}$ e vale 1277,5 Ae. A onda de F_{mm} resultante será: $1916 \cos(p\theta - \omega_s t)$
- b) O valor de pico do campo de indução magnética será dado pela expressão 8.22. Assim $B_{max} = \mu_0 \times 1916 / 0.002 = 1,2 \text{ T}$
- c) O fluxo por pólo pode ser calculada pela expressão 8.24. Tira-se: $\phi = 2 \times 0.5 \times 0.4 \times 1.2 / 2 = 0,24 \text{ Wb}$.
- d) Os fluxos ligados com os enrolamentos são dados pelas expressões 8.28 a 8.30. O valor de pico é $N_{eq} \phi = 45,4$

Assim:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 45,4 \cos(\omega_s t) && [\text{Wb}] \\ \psi_2 &= 45,4 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) && [\text{Wb}] \\ \psi_3 &= 45,4 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) && [\text{Wb}] \end{aligned}$$

8.8 Forças electromotrizs induzidas nos enrolamentos.

As forças electromotrizs são definidas como:

$$F_{em} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\psi}{dt} \tag{8.38}$$

Usando esta expressão é fácil calcular cada uma das forças electromotrizs do estator e do rotor a partir dos fluxos ligados. Neste primeiro estudo calcula-se apenas a força electromotriz criada pelo fluxo principal desprezando-se o fluxo de dispersão.

Para o estator, tem-se:

$$e_a = \omega_s N_{1eq} \phi \sin(\omega_s t) \tag{8.39}$$

$$e_b = \omega_s N_{1eq} \phi \sin\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{8.40}$$

$$e_c = \omega_s N_{1eq} \phi \sin\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{8.41}$$

Para o rotor, atendendo às expressões 8.38 tem-se;

$$e_{ar} = s\omega_s N_{2eq} \phi \sin(\omega_r t - \delta) \quad (8.42)$$

$$e_{br} = s\omega_s N_{2eq} \phi \sin\left(\omega_r t - \delta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.43)$$

$$e_{cr} = s\omega_s N_{2eq} \phi \sin\left(\omega_r t - \delta - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.44)$$

O que mostra que a amplitude das forças electromotrizes induzidas no rotor são proporcionais ao escorregamento. A frequência destas grandezas será também a frequência dos fluxos ligados com os enrolamentos do rotor. Para $s=0$, isto é, para a velocidade de sincronismo, a força electromotriz induzida é nula.

Da expressão 8.38 pode concluir-se que todas as expressões para as forças electromotrizes induzidas nos vários enrolamentos são obtidas a partir das derivadas das expressões dos fluxos. Em todos os casos tem-se ondas sinusoidais cujas derivadas são funções sinusoidais e se encontram em quadratura com os fluxos. Assim, tal como para os fluxos, onde é possível representá-los todos apenas com um vector espacial, também para as forças electromotrizes é possível usar apenas um vector espacial para representar todas. Este vector espacial encontra-se representado na figura 8.12. A conclusão das equações 8.42 a 8.44 permite afirmar que a amplitude deste vector será alterada se for observado no referencial do rotor. Tal como o vector espacial do fluxo, também o vector espacial da força electromotriz pode ser usado para o cálculo das várias forças electromotrizes. Neste caso deverá ter-se em atenção que estas forças electromotrizes têm, em módulo, valores diferentes consoante o referencial onde são calculados.

8.8.1 Correntes no rotor de uma máquina assíncrona

Na máquina de indução $s \neq 0 \rightarrow E \neq 0$, a força electromotriz induzida no rotor pode ser usada para a criação das correntes no rotor que por consequência criarão também um campo. Sendo o circuito eléctrico indutivo, as correntes do rotor estarão desfasadas em atraso de um ângulo φ_r em relação às forças electromotrizes que lhes dão origem. Assim, as correntes do rotor tomarão a forma:

$$i_{ar} = \sqrt{2} I_r \sin(\omega_r t - \delta - \varphi_r) \quad (8.42)$$

$$i_{br} = \sqrt{2} I_r \sin\left(\omega_r t - \delta - \varphi_r - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.43)$$

$$i_{cr} = \sqrt{2} I_r \sin\left(\omega_r t - \delta - \varphi_r - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.44)$$

8.8.2 Campo girante criado pelas correntes do rotor.

No caso das máquinas assíncronas, as correntes do rotor constituem um sistema trifásico de frequência $\omega_r = s\omega_s$. Estas correntes circulam em enrolamentos que rodam à velocidade ω_m e criam, no seu próprio referencial, um campo girante que roda à velocidade dada por:

$$\omega_{rr} = \frac{\omega_r}{p} = \frac{s\omega_s}{p} \quad (8.45)$$

do mesmo modo que as correntes do estator, como se viu na secção 8.4. Visto do referencial do estator, este campo rodará à velocidade:

$$\frac{S\omega_s}{p} + \omega_m = \frac{S\omega_s}{p} + \frac{\omega_s}{p}(1-s) = \frac{\omega_s}{p} \tag{8.46}$$

o que quer dizer que o campo criado pelo rotor e o campo criado pelo estator rodam em sincronismo, isto é, rodam à mesma velocidade.

8.8.3 Princípio de funcionamento do gerador síncrono – geração das forças electromotrizes

O enrolamento de excitação da máquina síncrona f (fig. 8.11b) é percorrido por corrente contínua e por essa razão vai criar um fluxo ϕ_r constante no tempo localizado no espaço pela posição do rotor. Rodando o rotor à velocidade ω_s , este fluxo rodará também à mesma velocidade. Pelas equações 8.39 a 8.41 conclui-se que se cria um sistema trifásico de forças electromotrizes.

8.9 Geração do binário

Nesta secção descrevem-se os conceitos que permitem compreender o modo como é gerado o binário nas máquinas de corrente alternada de campo girante. Como se viu na secção 8.4, as correntes num enrolamento trifásico criam um campo girante sinusoidal ao longo da periferia com velocidade dependente da frequência dada pela expressão 8.21. Este campo magnético é caracterizado por linhas de força que circulam pelo ferro do estator e do rotor atravessando o entreferro. Para simplificar a exposição considera-se uma máquina com um par de pólos.

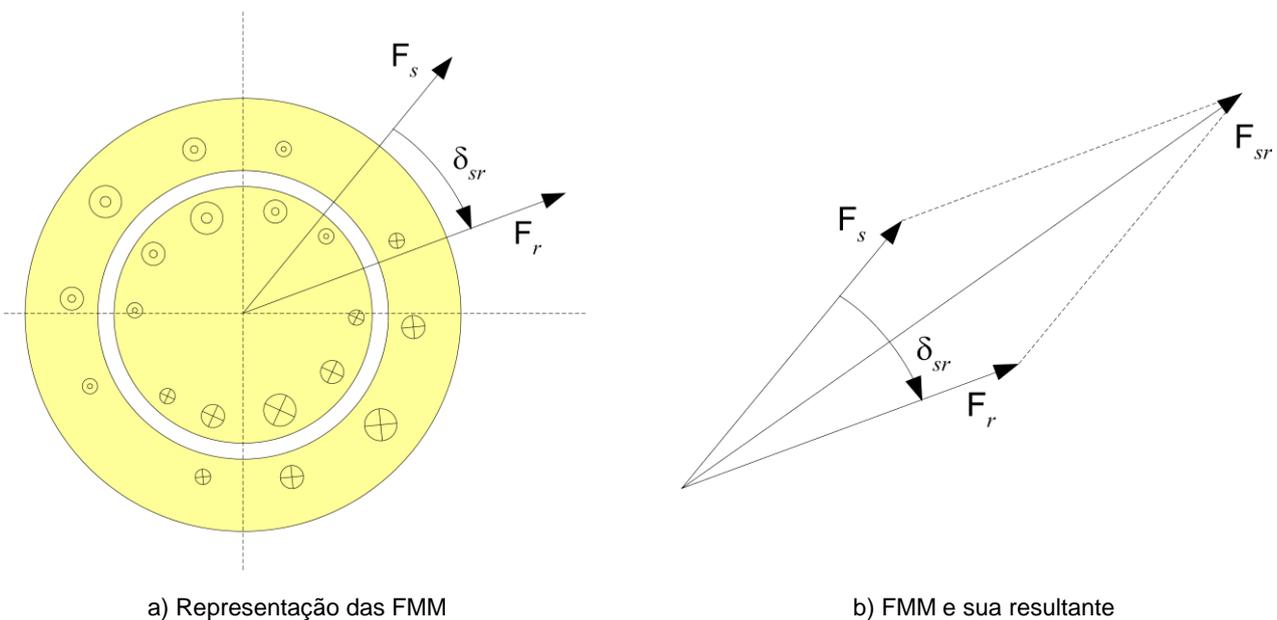


Figura 8.13. Esquema elementar de uma máquina com um enrolamento no estator e o outro no rotor.

Existindo condutores e correntes no estator e no rotor, irão existir também duas ondas de força magnetomotriz, uma criada no estator e designada por F_s e a outra criada pelo rotor e designada por F_r . As duas ondas de f.m.m. são síncronas e podem ser representadas como se indica na figura 8.13a. Nesta figura utilizam-se símbolos de dimensões diferentes para indicar que as correntes do estator e do rotor têm uma distribuição sinusoidal no espaço. Os vectores F_s e F_r estão localizados nos pontos onde a f.m.m. respectiva é máxima sendo δ_{sr} o ângulo que representa a defasagem destas duas ondas. O campo

resultante será obtido pela soma vectorial das duas componentes como se mostra na figura 8.13b.

A amplitude da força magnetomotriz resultante F_{sr} pode ser obtida a partir das suas componentes F_s e F_r e do ângulo δ_{sr} através da fórmula trigonométrica da diagonal do paralelogramo, isto é:

$$F_{sr}^2 = F_s^2 + F_r^2 + 2F_sF_r \cos \delta_{sr} \quad (8.47)$$

Numa máquina eléctrica usual, a maior parte do fluxo produzido pelos enrolamentos circula pelo estator e pelo rotor atravessando o entreferro. Este é o fluxo principal. Além deste, existirão duas outras componentes de dispersão, uma associada aos enrolamentos do estator e a outra associada aos enrolamentos do rotor. A introdução dos efeitos destes fluxos de dispersão será feita nos capítulos 9 e 10 não tendo influência nas expressões que se irão seguir.

Seguidamente ir-se-á desenvolver uma expressão para o binário escrita apenas em termos das forças magnetomotrizes. Neste caso não figuram os termos do fluxo de dispersão dependendo o binário apenas do fluxo principal.

O binário pode ser dado através da derivada parcial da co-energia magnética em ordem à coordenada de posição angular. Para se obter uma expressão para a co-energia magnética pode utilizar-se a expressão 6.18 que está escrita em termos dos fluxos ligados e das correntes, ou utilizando grandezas do campo magnético. Pode demonstrar-se que a co-energia magnética se pode calcular como:

$$W_m' = \iiint_V \left(\int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} \right) dV \quad (8.48)$$

No ar a densidade volúmica de co-energia magnética é dada por $\mu_0 H^2/2$. Por sua vez, o campo H no ferro é nulo, sendo nula também a densidade de co-energia magnética. Atendendo ao facto de se terem campos sinusoidais no entreferro, cujo valor médio do seu quadrado é igual a metade do quadrado do valor máximo, o valor médio da co-energia magnética é dado por:

$$w_m' = \frac{\mu_0}{2} \frac{H_{pico}^2}{2} = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{F_{mpico}}{g} \right)^2 \quad (8.49)$$

A co-energia total será dada pelo produto da densidade volúmica pelo volume do entreferro, uma vez que é apenas neste que existe co-energia magnética armazenada. Assim:

$$W_m' = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{F_{mpico}}{g} \right)^2 \pi DLg = \frac{\mu_0 \pi DL}{4g} F_{sr}^2 \quad (8.50)$$

Tendo em atenção a equação 8.47 e que a variação com o ângulo afecta apenas o termo do fluxo principal, tem-se:

$$M_{em} = \frac{\partial W_m'}{\partial \delta_{sr}} = - \left(\frac{\mu_0 \pi DL}{2g} \right) F_s F_r \sin \delta_{sr} \quad (8.51)$$

Para uma máquina com p pares de pólos obtém-se a expressão geral:

$$M_{em} = \frac{\partial W_m'}{\partial \delta_{sr}} = -p \left(\frac{\mu_0 \pi DL}{2g} \right) F_s F_r \sin \delta_{sr} \quad (8.52)$$

Donde se pode concluir que o binário é proporcional ao produto das duas forças magnetomotrizes e ao seno do ângulo espacial entre elas. Atendendo à equação 8.52 pode concluir-se que se o ângulo δ_{sr} for negativo, isto é se a força magnetomotriz do rotor estiver atrasada em relação à do estator, o binário é positivo contribuindo para o avanço do rotor rumo ao alinhamento das duas forças magnetomotrizes. Caso o

ângulo δ_{sr} seja positivo, o binário é negativo e por consequência o rotor irá acelerar no sentido da diminuição do ângulo δ_{sr} , isto é o rotor mover-se-á no sentido do alinhamento das duas forças magnetomotrizas.

Uma analogia razoável para ilustrar esta acção consiste em imaginar dois ímãs em barra que possam rodar sobre os seus centros colocados no mesmo eixo como se mostra nas figuras 8.14 e 8.15. O pólo Norte é definido quando as linhas de força saem da peça que lhe dá origem. No estator, o pólo Norte é definido quando as linhas de força circulam do estator para o rotor. Ao contrário, no rotor, o pólo norte é definido quando estas linhas de força circulam do rotor para o estator. A figura 8.14 ilustra este resultado.

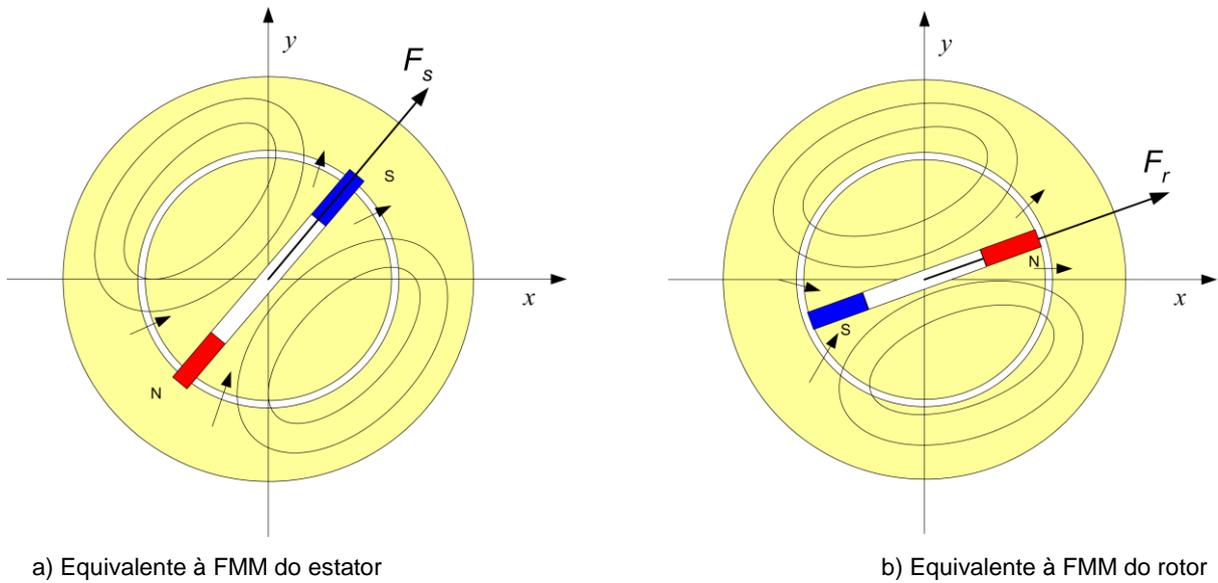


Figura 8.14. Componentes das forças magnetomotriz e a sua resultante.

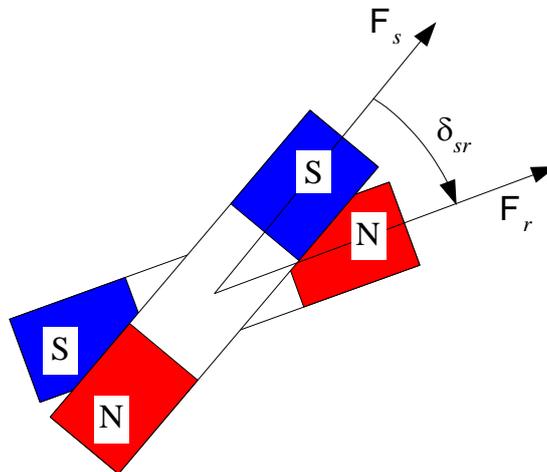


Figura 8.15. Analogia com dois ímãs permanentes

Haverá um binário proporcional ao deslocamento angular dos ímãs que actuará no sentido de os alinhar.

Doutro modo pode concluir-se também que o sistema actua no sentido de alinhamento das linhas de força criadas pelos dois circuitos.

8.9.1 Princípio de funcionamento do motor assíncrono

A máquina assíncrona, ou de indução, utiliza a força electromotriz induzida no rotor que existe pelo facto deste rodar a velocidade diferente do campo. Esta força electromotriz vai fazer circular uma corrente nos próprios enrolamentos quando estes estiverem fechados por um circuito eléctrico exterior como por exemplo uma resistência ou mesmo quando estiverem em curto-circuito. Esta corrente terá a frequência $\omega_r = s\omega_s$ e criará um campo girante que roda, em relação ao rotor, à velocidade de $s N_{syn}$. Como o rotor se encontra em movimento à velocidade N , a velocidade do campo criado no rotor em relação a um observador colocado no estator será dada por $N + sN_{syn}$, ou seja N_{syn} . Conclui-se assim que os campos criados pelos enrolamentos do estator e pelos enrolamentos do rotor são síncronos.

As características de funcionamento desta máquina serão estudadas no capítulo 9.

8.9.2 Princípio de funcionamento do motor síncrono

O motor síncrono só pode funcionar em regime permanente à velocidade de sincronismo. A força magnetomotriz do estator é criada por um conjunto de enrolamentos trifásicos alimentados por um sistema trifásico de correntes.

Como esta máquina roda à velocidade de sincronismo, a condição 8.35 estabelece que no rotor não será sede de forças electromotriz induzidas criadas por indução de campos originados no estator. Assim, a força magnetomotriz do rotor deverá ser criada por um enrolamento alimentado por corrente contínua. Usualmente utiliza-se um enrolamento monofásico alimentado exteriormente de várias formas como se verá.

As características desta máquina serão estudadas no capítulo 10.

8.10 Exercícios

8.1. Considere um enrolamento trifásico do estator de uma máquina. Quando este enrolamento for percorrido por um sistema trifásico simétrico e equilibrado de correntes, obtém-se uma onda de força magnetomotriz que roda no sentido positivo como se mostrou.

Considere agora que há uma troca de duas fases, por exemplo, a corrente i_b circula no enrolamento destinado à fase c e a corrente i_c circula no enrolamento destinado à fase b . Mostre que nestas condições obtém-se uma onda de força magnetomotriz da mesma amplitude que roda no sentido contrário.

A máquina é agora alimentada por um sistema de correntes de amplitude igual, mas com ângulos de fase iguais. Na prática este sistema poderá ser obtido colocando as três fases em série. Qual a onda de força magnetomotriz que irá obter?

8.2 Para a criação de binário estabeleceu-se por hipótese que as duas ondas de fmm criadas pelo estator e pelo rotor deveriam ser síncronas.

a) Qual seria o valor do binário no caso em que as duas ondas se deslocam uma em relação à outra.

b) Determine também o valor do binário caso existam números diferentes de pólos no estator e no rotor.

Capítulo 9 Máquinas de Indução Polifásicas

9.1 Descrição das máquinas de indução polifásicas

As máquinas assíncronas, também designadas por máquinas de indução, são constituídas por duas partes distintas: o estator e o rotor, figura 9.1.

O Estator é a parte fixa da máquina. É constituído por uma carcaça que suporta um núcleo de chapa magnética. Este núcleo é munido de cavas onde é montado um conjunto de enrolamentos dispostos simetricamente que constituem as fases do estator. A generalidade das máquinas é trifásica, mas poderão ser concebidas e construídas máquinas com outro número de fases.

O Rotor é a parte móvel da máquina. É colocado no interior do estator tendo a forma de um cilindro. Tal como o estator, o rotor é constituído por um empilhamento de chapas que constituem o núcleo magnético e por enrolamentos colocados em cavas. Este núcleo magnético encontra-se apoiado sob o veio, normalmente em aço.

O rotor pode ser de dois tipos: rotor bobinado e rotor em gaiola de esquilo, que pode ser de gaiola simples, de gaiola dupla ou de gaiola de barras profundas.

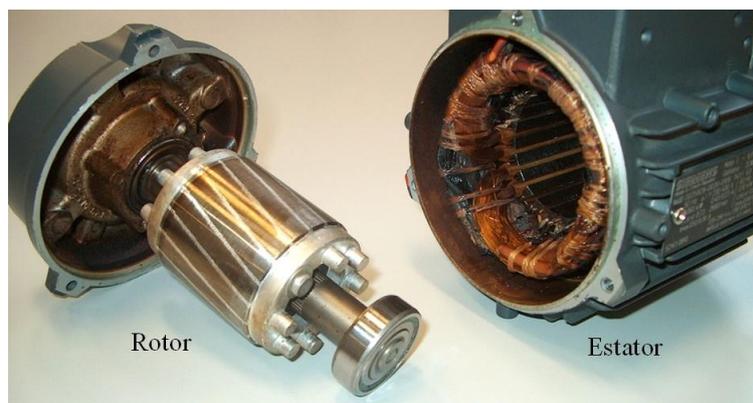


Figura 9.1. Constituição de uma máquina de indução de rotor em gaiola de esquilo.

Os núcleos magnéticos são construídos em material ferromagnético e destinam-se a permitir criar um campo de indução magnética intenso à custa de forças magnetomotrizes não muito elevadas. Assim, deverão ter uma permeabilidade magnética elevada.

Como o campo magnético é variável no tempo, os núcleos magnéticos são sede de perdas de energia que podem ser de dois tipos: correntes de Foucault e histerese. Interessa assim utilizar um material com uma pequena área do ciclo de histerese e com resistividade elevada, de preferência um material não condutor. Normalmente utilizam-se chapas empilhadas e isoladas umas das outras. Em ambos os núcleos há cavas onde são colocados os condutores que constituem os enrolamentos. Normalmente as perdas magnéticas no rotor são menos importantes que as perdas magnéticas no estator.

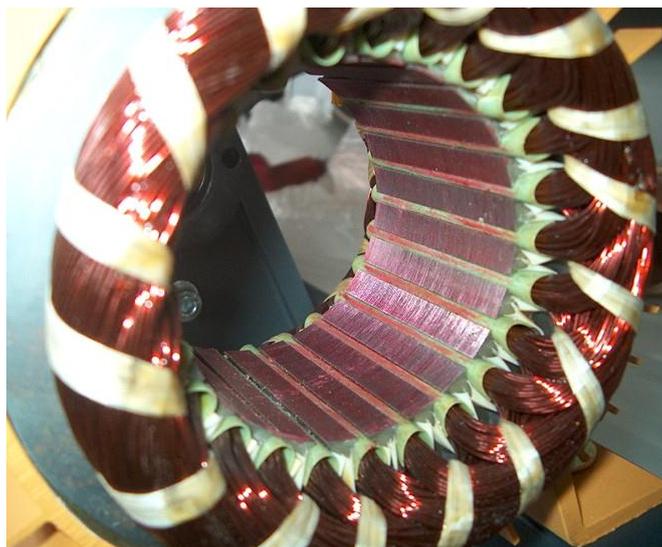


Figura 9.2. Constituição do enrolamento do estator.

9.1.1 Rotor em gaiola de esquilo

Rotor de gaiola simples.

Os condutores, de cobre ou de alumínio, são colocados em cavas paralelamente ao veio da máquina sendo curto-circuitados em cada extremidade por um anel condutor. O conjunto do material condutor tem o aspecto de uma gaiola de esquilo. Em certos tipos de rotores a gaiola é inteiramente moldada, constituindo o conjunto um dispositivo extraordinariamente robusto. Junto aos anéis dos topos podem ser encontradas alhetas para a ventilação que são parte da peça rígida que constitui os condutores e os anéis que os curto-circuitam, figura 9.1.

Como será visto mais à frente, estes motores podem ter um binário de arranque baixo sendo a corrente absorvida nesta situação várias vezes superior à corrente nominal.

Rotor de gaiola dupla.

Este tipo de rotor comporta duas gaiolas concêntricas. A gaiola exterior é construída para ter uma resistência suficientemente elevada de modo a permitir um bom binário de arranque, enquanto que a gaiola interior é caracterizada por uma resistência baixa de modo a garantir um bom rendimento em funcionamento normal. No arranque funcionará essencialmente a gaiola exterior, enquanto que, na situação normal, o binário será produzido principalmente pela gaiola interior. O grande benefício que se obtém da utilização de motores deste tipo consiste no aumento do binário de arranque. Consegue-se também uma ligeira diminuição do valor da corrente de arranque.

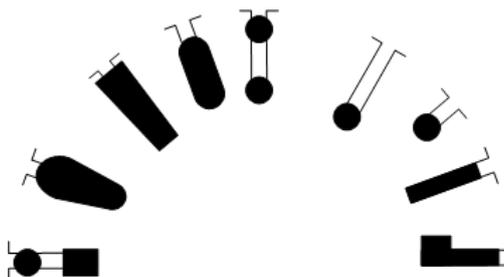


Figura 9.3. Diferentes formas para a realização das barras das gaiolas.

Rotor de gaiola de barras profundas.

Este tipo de rotor tem o aspecto da gaiola simples, embora as barras que constituem o seu enrolamento sejam de maior profundidade. As suas características de arranque são análogas às do rotor de gaiola dupla.

A figura 9.3 apresenta algumas formas dos condutores do rotor (definidos pela forma da respectiva cava) tanto para máquinas de gaiola simples como de gaiola dupla, bem ainda como de barras profundas.

9.1.2 Rotor bobinado

Os enrolamentos neste tipo de rotores são de material condutor isolado e colocados em cavas. São semelhantes aos enrolamentos do estator. Normalmente o rotor é trifásico encontrando-se os seus enrolamentos ligados em estrela ou em triângulo. Os três condutores do enrolamento são ligados ou a um ligador centrífugo ou a 3 anéis em cobre isolados e solidários com o rotor. A ligação ao exterior é obtida através de 3 escovas que fazem contacto com cada um destes anéis, figura 9.4.

Estas máquinas apresentam assim um grau de liberdade suplementar em relação as máquinas de rotor em gaiola. Este grau de liberdade é aproveitado, normalmente, para a melhoria das características de arranque.

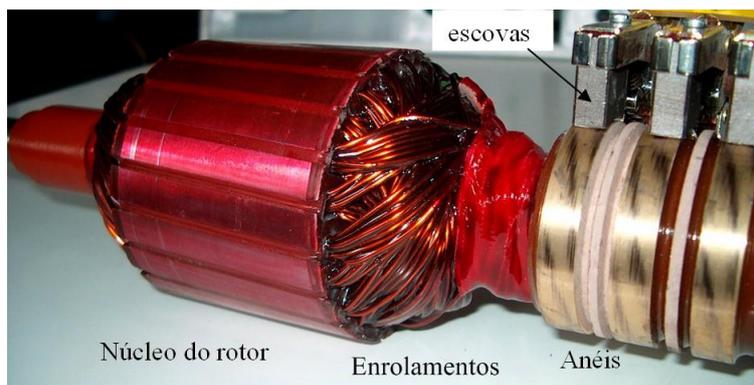
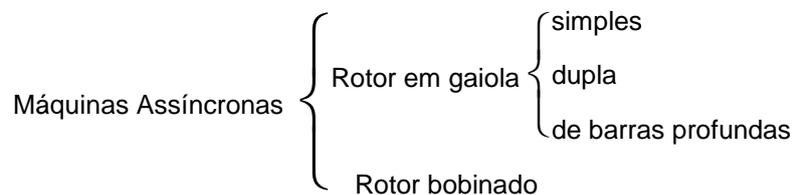


Figura 9.4. Rotor bobinado com anéis e escovas.

A designação das máquinas assíncronas é feita consoante o tipo de rotor com que são construídas. Assim podem distinguir-se.



9.2 Obtenção de um circuito equivalente

Para a obtenção do circuito equivalente, considere-se uma máquina de indução de rotor bobinado, com um par de pólos, com o rotor parado e numa posição em que os enrolamentos do rotor estão alinhados com os enrolamentos do estator, figura 9.5.

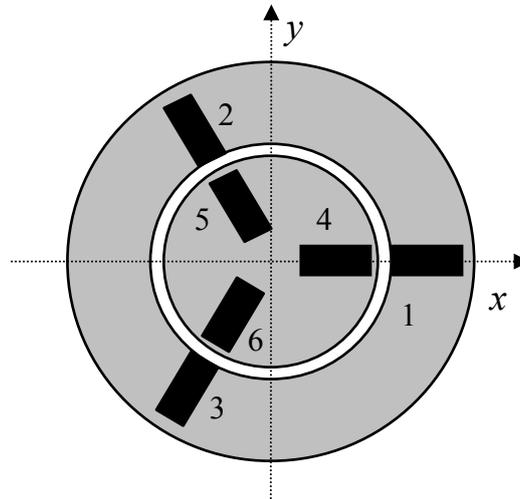


Figura 9.5. Representação da máquina de indução com os enrolamentos do rotor alinhados com os enrolamentos do estator.

Nestas condições, os enrolamentos 1-4, 2-5 e 3-6 comportam-se como 3 transformadores. A variação do fluxo criado pela fase 1 vai fazer sentir-se directamente na fase 4 e também nas fases 5 e 6. A máquina poderá ser representada por um circuito equivalente por fase semelhante ao do transformador, figura 9.6. Neste circuito equivalente o enrolamento do rotor encontra-se reduzido ao enrolamento do estator. A designação dos parâmetros e variáveis é semelhante à utilizada no estudo do transformador.

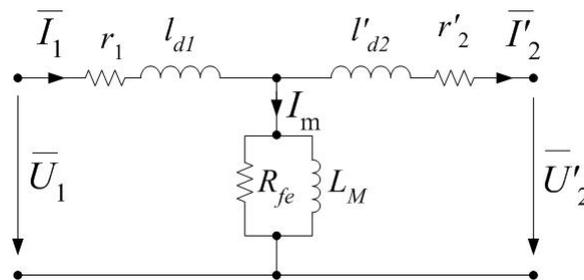


Figura 9.6. Circuito equivalente da máquina parada com os enrolamentos alinhados.

Considere-se agora que a máquina se encontra parada, mas os enrolamentos estão desfasados de um ângulo θ , figura 9.7.

Os enrolamentos do estator criam um campo girante que roda à velocidade de sincronismo. Este campo girante é traduzido por uma onda de campo de indução B cujo máximo se alinha com as fases 1 e 4 em instantes diferentes, devido ao facto destes enrolamentos se encontrarem desfasados no espaço. Há assim um atraso no tempo do fluxo ligado com o enrolamento 4 em relação ao fluxo ligado com o enrolamento 1. O mesmo se passa em relação ao conjunto das outras fases.

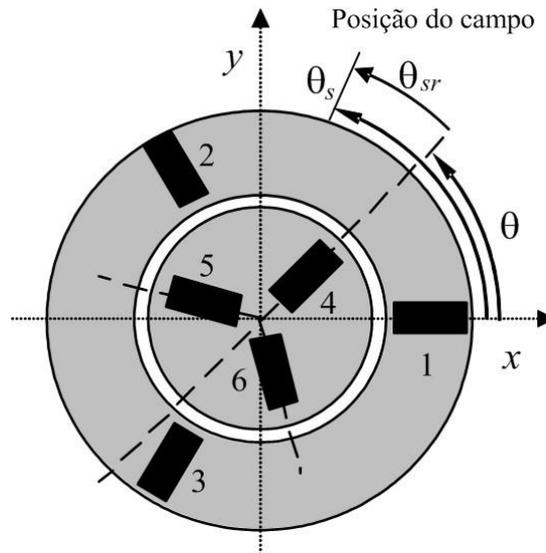


Figura 9.7. Representação da máquina parada com enrolamentos desfasados de θ .

Como consequência da defasagem (no tempo) dos fluxos, as tensões no rotor irão estar desfasadas de um ângulo que depende de θ em relação às tensões do estator correspondentes. A máquina tem um comportamento como transformador desfasador.

Considere-se um determinado instante de tempo e definam-se as posições como:

θ – posição do rotor medido entre os eixos de simetria das fases 1 e 4;

θ_s – posição do eixo de simetria do campo no referencial do estator, medido em relação ao eixo de simetria da fase 1;

θ_{sr} – posição do eixo de simetria do campo no referencial do rotor, medido em relação ao eixo de simetria da fase 4.

Nestas condições, figura 9.7, tem-se:

$$\theta_{sr} = \theta_s - \theta \quad (9.1)$$

A relação entre as velocidades do campo girante nos dois referenciais (rotor e estator) obtêm-se derivando a equação 9.1. Assim:

$$\omega_{sr} = \omega_s - \omega_m \quad (9.2)$$

Como o campo girante roda à velocidade ω_s , medida num referencial do estator, as fases do estator sofrerão variações de frequência angular igual a ω_s . Como as fases do rotor estão em movimento à velocidade ω_m , sofrerão variações de frequência ω_{sr} dada por 9.2. As frequências das grandezas do estator e do rotor serão diferentes tal como foi visto no capítulo anterior. A grandeza ω_{sr} é designada por frequência de escorregamento e desempenha um papel muito importante no funcionamento e controlo das máquinas assíncronas. Definindo escorregamento relativo s por:

$$s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \quad (9.3)$$

e atendendo a que

$$\omega_{sr} = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \omega_s \quad (9.4)$$

tem-se:

$$\omega_{sr} = s\omega_s \quad (9.5)$$

A força electromotriz vista do lado do rotor, que é a derivada em relação ao tempo do fluxo, é proporcional à frequência com que o fluxo varia nos enrolamentos do rotor. Assim, a relação entre a força electromotriz do estator E_1 e do rotor E_2 será:

$$E_2 = sE_1 \quad (9.6)$$

Obtém-se assim o circuito equivalente da figura 9.8. Neste circuito tem-se em consideração que as reactâncias dependem da frequência. Neste caso é necessário ter em conta a equação 9.5.

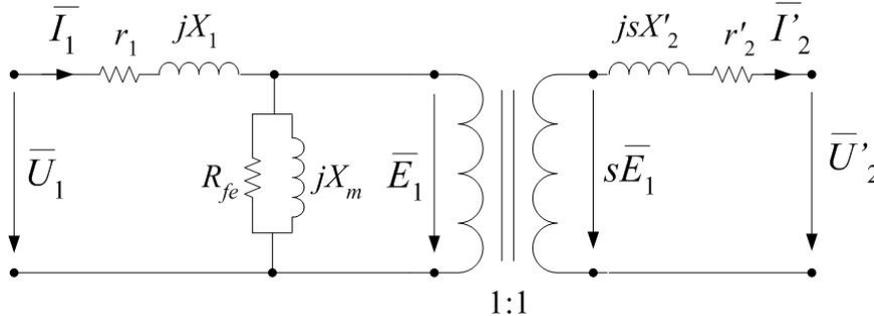


Figura 9.8. Circuito equivalente.

Em relação às equações do rotor, pode escrever-se:

$$\begin{aligned} s\bar{E}_1 &= r'_2 \bar{I}'_2 + jsX'_2 \bar{I}'_2 + \bar{U}'_2 \\ \bar{E}_1 &= \frac{r'_2}{s} \bar{I}'_2 + jX'_2 \bar{I}'_2 + \frac{\bar{U}'_2}{s} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Que dá origem ao circuito equivalente da figura 9.9.

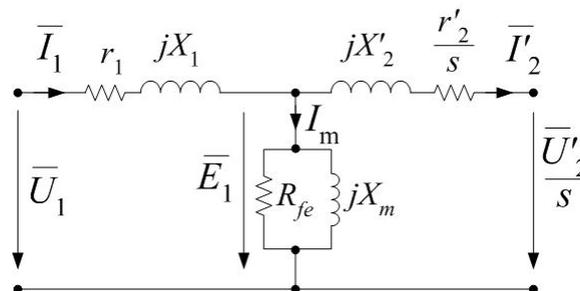


Figura 9.9. Circuito equivalente em T da máquina de indução.

Onde:

U_1 e I_1 – tensão e corrente no estator;

U'_2 e I'_2 – tensão e corrente no rotor reduzidas ao estator;

I_m – corrente de magnetização;

r_1 e r'_2 – resistências do estator e do rotor reduzida ao estator;

X_1 e X'_2 representam a dispersão;

R_{fe} e X_m – coeficientes do ramo de magnetização.

O circuito equivalente da figura 9.9 constitui o instrumento de trabalho para a determinação do comportamento das máquinas de indução.

9.3 Análise do comportamento da máquina assíncrona através de circuitos equivalentes

9.3.1 Introdução.

A máquina assíncrona pode ser estudada através do seu circuito equivalente por fase, figura 9.9. Este é semelhante ao circuito equivalente em T do transformador, mas há que considerar que a resistência e a tensão dos enrolamentos do rotor aparecem divididas pelo escorregamento s . Tal como no caso do transformador, as grandezas do rotor podem ser reduzidas ao estator e vice-versa. Um aspecto importante tem a ver com o valor da corrente de magnetização que agora é considerável quando comparado com os valores nominais da máquina, cerca de 25 a 65%.

9.3.1.1 Interpretação do circuito equivalente

Considere-se o caso mais vulgar em que a máquina se encontra com os enrolamentos do rotor em curto-circuito. Neste caso $U_2=0$. O circuito equivalente resultante encontra-se representado na figura 9.10, onde se apresenta também o trânsito das potências tendo-se em consideração que:

$$\frac{r_2'}{s} = r_2' + \frac{1-s}{s} r_2' \quad (9.8)$$

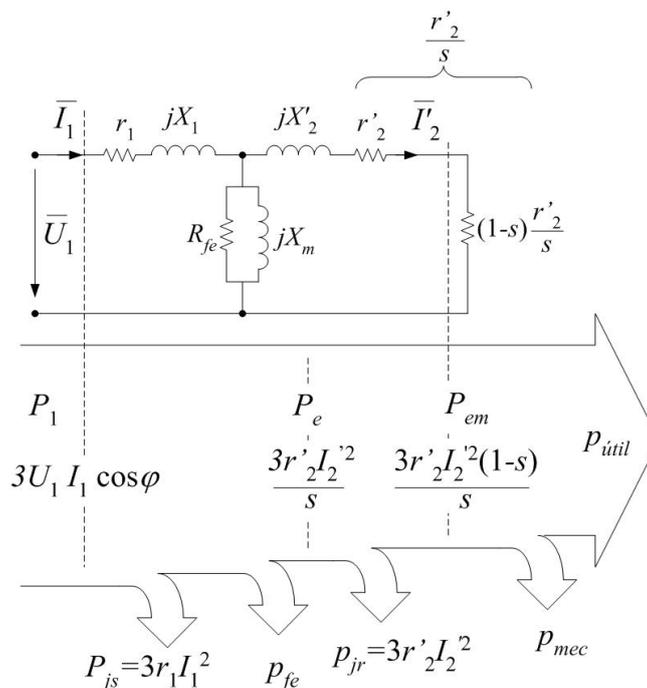


Figura 9.10. Interpretação do circuito equivalente.

A interpretação desta figura mostra que, em funcionamento motor, parte da potência eléctrica fornecida pela rede, dada por $3U_1 I_1 \cos \varphi$, é consumida sob a forma de perdas de Joule no estator $3r_1 I_1^2$ e perdas no núcleo de ferro que são representadas pela resistência R_{fe} . A restante potência P_e , é transferida para o rotor pelo entreferro e é representada na resistência r_2'/s .

$$P_e = 3 \frac{r_2' I_2'^2}{s} \quad (9.9)$$

A potência P_e irá ser dividida em duas parcelas sendo a primeira respeitante às perdas por efeito de Joule no rotor. A restante irá transformar-se em potência mecânica. A potência electromagnética que se converte em potência mecânica será dada por:

$$P_{em} = 3 \frac{1-s}{s} r_2' I_2'^2 \quad (9.10)$$

Descontando as perdas mecânicas obtém-se a potência mecânica útil. Comparando a expressão 9.9 com a expressão 9.10 conclui-se que a potência electromagnética é apenas uma parte de potência transferida no entreferro e tem-se:

$$P_{em} = (1-s)P_e \quad (9.11)$$

Do mesmo modo se pode ver que

$$p_{jr} = sP_e \quad (9.12)$$

A equação 9.12 determina a relação entre as perdas de Joule no rotor e a potência que atravessa o entreferro.

O binário pode ser calculado pela divisão da potência que se converte em mecânica P_{em} pela velocidade de rotação expressa em radianos por segundo. Assim, quando a máquina se encontrar com os enrolamentos do secundário em curto-circuito, ter-se-á:

$$M_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{3}{\omega_m} \frac{1-s}{s} r_2' I_2'^2 \quad (9.13)$$

Pode exprimir-se também o binário electromagnético M_{em} em função da velocidade de sincronismo e da potência que atravessa o entreferro. Como:

$$\omega_m = \frac{\omega}{p}(1-s) \quad (9.14)$$

tira-se

$$M_{em} = \frac{3p}{\omega} \frac{r_2' I_2'^2}{s} = p \frac{P_e}{\omega} \quad (9.15)$$

Conhecendo a tensão aplicada U_1 e a velocidade de rotação (ou o escorregamento s), é possível obter as correntes, e a partir delas, as restantes grandezas da máquina de indução. Para isso é necessário resolver o circuito da figura 9.10 para cada valor do escorregamento s . A figura 9.11 apresenta o andamento das grandezas mais importantes em função da velocidade de rotação. As correntes e o binário estão apresentadas relativamente aos valores nominais da máquina.

Apenas para valores próximos da velocidade de sincronismo as correntes do estator e do rotor tomam valores aceitáveis para regime contínuo. Devido aos problemas térmicos resultantes do valor elevado das correntes, esta máquina só poderá funcionar, em permanência, nesta zona de correntes inferiores às correntes nominais.

A interpretação do circuito equivalente pode fazer-se de uma forma ligeiramente diferente como se verá. Com efeito as perdas mecânicas podem ser associadas às perdas no ferro e representadas em conjunto na resistência R_{fe} .

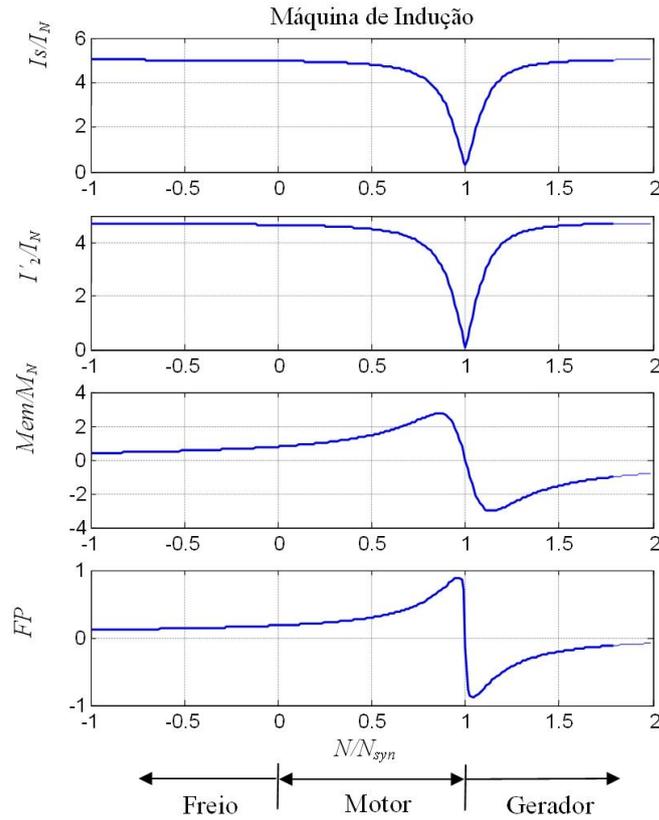


Figura 9.11. Grandezas da máquina de indução em função da velocidade.

Verifica-se também que o binário se inverte junto à velocidade de sincronismo. A análise do circuito equivalente e das curvas da figura 9.11 permite obter a tabela 9.1.

Tabela 9.1

N/N_{syn}	$[-\infty, 0]$	$[0, 1]$	$[1, \infty]$	
s	$s > 1$	$0 < s < 1$	$s < 0$	
r_2/s	+	+	-	Potência eléctrica recebida da rede
$r_2(1-s)/s$	-	+	-	Potência mecânica fornecida ao veio

A potência mecânica fornecida ao veio é positiva para valores de velocidades entre zero e a velocidade de sincronismo. Nesta zona a potência eléctrica que atravessa o entreferro é positiva. A máquina recebe assim potência eléctrica da rede e entrega potência mecânica ao veio, isto é, funciona como motor.

Para velocidades superiores à velocidade de sincronismo as potências eléctrica e mecânica são ambas negativas. A máquina funciona como gerador porque recebe potência mecânica do veio e entrega potência eléctrica à rede.

Para velocidades negativas a potência eléctrica é positiva e a potência mecânica é negativa. A máquina recebe potência eléctrica da rede e potência mecânica do veio. Estas duas potências serão transformadas em calor no seu interior. Diz-se que funciona como freio.

O ponto de funcionamento, em regime permanente, é obtido quando o binário electromagnético for igual ao binário de carga.

9.3.2 Circuito equivalente em ângulo

Dada a semelhança entre os circuitos equivalentes do transformador e da máquina assíncrona, o estudo que aqui será apresentado será válido também (com poucas alterações) para o caso do transformador.

Considere-se o circuito equivalente da figura 9.12 onde as grandezas do secundário se encontram reduzidas ao primário e as perdas no ferro são representadas por uma resistência em série com o ramo de magnetização. O valor de r_m e X_m são obtidos da resolução do paralelo de R_{fe} e jX_m do circuito da figura 9.9. Na prática resulta um valor de X_m próximo do valor utilizado na figura 9.9.

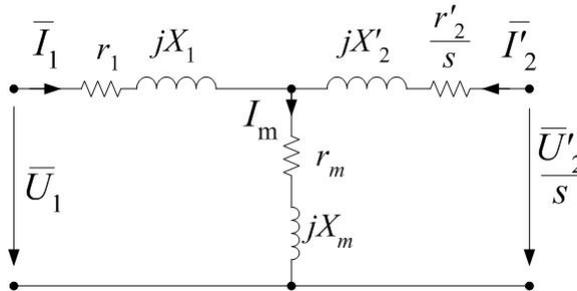


Figura 9.12. Circuito equivalente reduzido ao primário com representação das perdas no ferro.

A este circuito equivalente corresponde o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \frac{\bar{U}_2}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_m & \bar{Z}_m \\ \bar{Z}_m & \bar{Z}'_2 + \bar{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}'_2 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= r_1 + jX_1 \\ \bar{Z}'_2 &= \frac{r'_2}{s} + jX'_2 \\ \bar{Z}_m &= r_m + jX_m \end{aligned} \quad (9.17)$$

Podem multiplicar-se ambos os membros da segunda equação por um parâmetro qualquer \bar{a} , diferente de zero, que o resultado não se altera. Mas daqui resulta uma matriz de impedâncias não simétrica e, por conseguinte, sem circuito equivalente. Para que a matriz das impedâncias se mantenha simétrica é necessário fazer ainda as seguintes operações:

1. Multiplicar o termo referente à primeira linha e segunda coluna por \bar{a} e dividir I_2 por \bar{a} . A primeira equação não será alterada.
2. Como se divide I_2 por \bar{a} na operação 1, deve multiplicar-se por \bar{a} o termo correspondente à segunda linha e segunda coluna. Ambas as equações permanecem inalteradas. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \frac{\bar{U}_2}{\bar{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_m & \bar{a}\bar{Z}_m \\ \bar{a}\bar{Z}_m & \bar{a}^2(\bar{Z}'_2 + \bar{Z}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \frac{\bar{I}'_2}{\bar{a}} \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

Às equações 9.18 corresponde o circuito equivalente da figura 9.13. As impedâncias deste circuito dependem do parâmetro \bar{a} que é arbitrário.

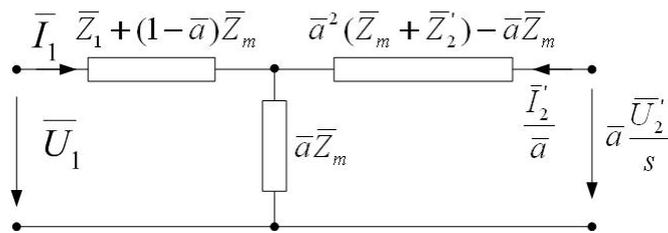


Figura 9.13. Circuito equivalente geral (com \bar{a} arbitrário).

É possível escolher um parâmetro \bar{a} de forma a simplificar o circuito. Para que este se reduza a dois ramos independentes ter-se-á:

$$\bar{Z}_1 + (1-\bar{a})\bar{Z}_m = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{a} = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m} \quad (9.19)$$

Utilizando o valor particular de \bar{a} dado pela expressão 9.19, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{a}^2(\bar{Z}_m + \bar{Z}'_2) - \bar{a}\bar{Z}_m &= \bar{a}^2\bar{Z}'_2 + (\bar{a}^2 - \bar{a})\bar{Z}_m \\ &= \bar{a}^2\bar{Z}'_2 + \bar{a}(\bar{a} - 1)\bar{Z}_m = \\ &= \bar{a}^2\bar{Z}'_2 + \bar{a}\bar{Z}_1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

O circuito ficará como o representado na figura 9.14.

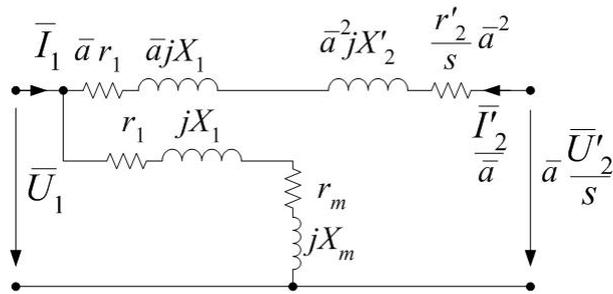


Figura 9.14. Circuito equivalente com o valor de \bar{a} da equação 9.19.

Associando termos e definindo:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \bar{a}r_1 \\ \bar{X}_1 &= \bar{a}X_1 \\ \bar{R}_2 &= \bar{a}^2r'_2 \\ \bar{X}_2 &= \bar{a}^2X'_2 \\ \bar{X}_{cc} &= \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \\ \bar{I}''_2 &= \frac{\bar{I}'_2}{\bar{a}} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Obtém-se o circuito da figura 9.15

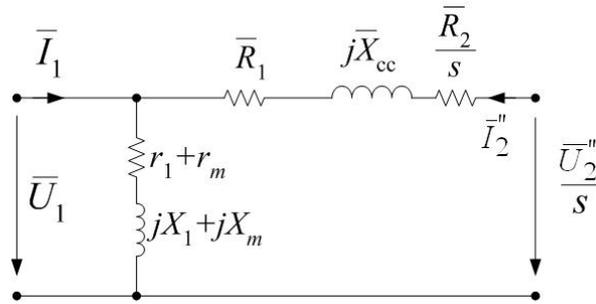


Figura 9.15. Circuito equivalente em ângulo.

Se $r_m \ll X_m$ então

$$\bar{a} = 1 + \frac{x_1}{X_m} - j \frac{r_1}{X_m} \quad (9.22)$$

Os parâmetros definidos pela equação 9.21 são representados por números complexos visto que \bar{a} é um número complexo. Na secção seguinte será visto como obter um circuito equivalente aproximado a partir destes resultados.

Considerando apenas a parte real de \bar{a} , dado que esta é bastante superior à parte imaginária, resultam parâmetros (equação 9.21) reais sendo os erros obtidos pouco significativos.

EXEMPLO 9.1

Uma máquina assíncrona trifásica de rotor bobinado, de 3.2kW, $U_1=220/380V$, ligada em estrela, tem os seguintes parâmetros do seu circuito equivalente reduzido:

$$r_1=1,5\Omega \quad r_2=1,98\Omega \quad X_1=2,98\Omega \quad X_m=41\Omega \quad X'_2=2,97\Omega \quad p=2$$

As perdas em vazio são 300W.

Determine os parâmetros do circuito equivalente em ângulo.

Resolução.

O valor das perdas no ferro pode ser representado introduzindo uma resistência em série no ramo de magnetização. O valor desta resistência é normalmente muito menor do que o valor da reactância. Para o cálculo da corrente de magnetização pode-se, em primeira aproximação, considerar que a corrente é limitada apenas pelas reactâncias de dispersão e de magnetização. Assim:

- Corrente em vazio $I_0 \cong 220/44 = 5$ A
- Resistência total em vazio sem representar as perdas mecânicas $r_1 + r_m =$

$$300/(3 \times 5^2) = 4 \Omega$$

O valor da resistência a inserir no ramo de magnetização será:

$$r_m=4-1,5=2,5 \Omega. \text{ Obtêm-se o circuito equivalente da figura 9.16.}$$

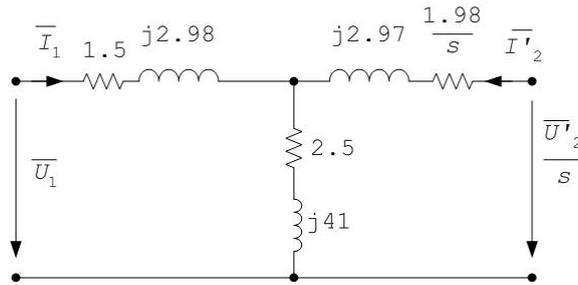


Figura 9.16. Circuito equivalente reduzido ao primário com representação das perdas no ferro. (Valores das impedâncias em Ohm)

Parâmetros do circuito equivalente em ângulo.

Da equação 9.22 tira-se:

$$\bar{a} = 1 + \frac{x_1}{X_m} - j \frac{r_1}{X_m} = 1,073 - j0,036$$

Desprezando a parte imaginária de \bar{a} face à parte real, tira-se:

$$R_1 = ar_1 \quad R_2 = a^2 r_2' \quad X_1 = ax_1 \quad X_2 = a^2 x_2'$$

Obtém-se o circuito equivalente da figura 9.17.

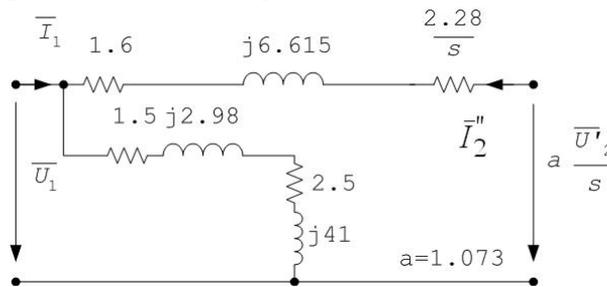


Figura 9.17. Circuito equivalente em ângulo. (Valores das impedâncias em Ohm).

9.4 Características das Máquinas de Indução.

9.4.1 Circuito equivalente aproximado.

É possível obter um circuito equivalente aproximado a partir do circuito equivalente da figura 9.15 utilizando um parâmetro real $a = 1 + \frac{x_1}{X_m}$. Os erros que resultam do desprezo da parte imaginária da equação 9.22 são

pouco significativos. Este circuito equivalente encontra-se representado na figura 9.18 e vai servir de base aos cálculos que se irão efectuar. Tem a mesma forma do circuito equivalente representado na figura 9.15.

Apenas os parâmetros complexos $\bar{R}_1, \bar{X}_{cc}, \bar{R}_2$ serão substituídos pelos respectivos parâmetros reais.

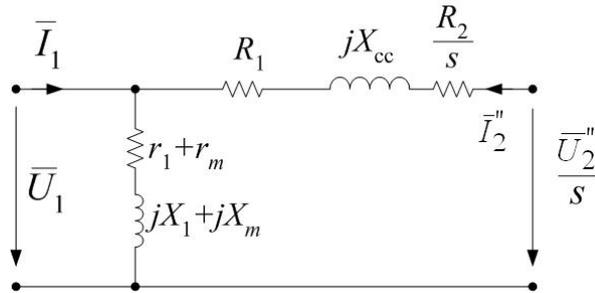


Figura 9.18. Circuito equivalente aproximado.

Como a é um número real, as expressões das potências irão manter-se inalteradas. Por exemplo, tomando a expressão das perdas de Joule do rotor do circuito original e multiplicando e dividindo por a^2 como se mostra na equação 9.23, obtém-se uma expressão análoga com grandezas do novo circuito equivalente.

$$3r_2' I_2'^2 = 3a^2 r_2' \frac{I_2''^2}{a^2} = 3R_2 I_2''^2 \quad (9.23)$$

O mesmo se passará com a potência que atravessa o entreferro, a potência que se converte em mecânica e com a potência que é trocada aos terminais do rotor.

9.4.2 Cálculo do desempenho a partir do circuito equivalente aproximado

9.4.2.1 Cálculo das correntes

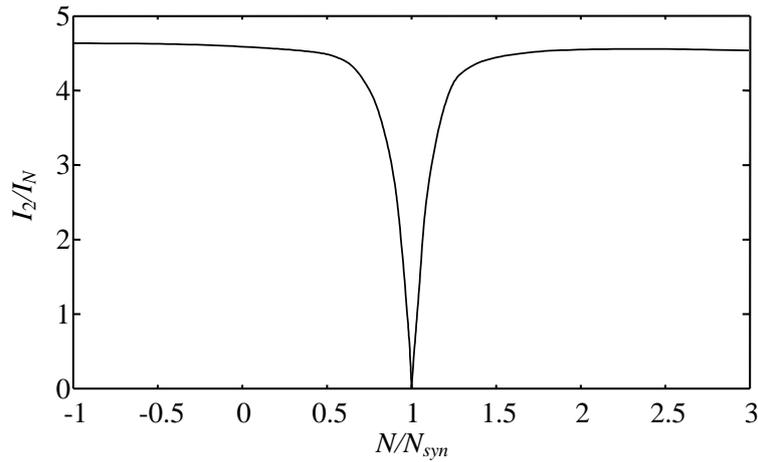
Em curto-circuito $U_2=0$ e portanto $U_2'' = 0$, tem-se:

$$\bar{I}_2'' = -\frac{\bar{U}_1}{\left(R_1 + \frac{R_2}{s}\right) + jX_{cc}} \quad (9.24)$$

Em amplitude, tem-se

$$I_2'' = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (9.25)$$

O andamento da corrente I_2'' determinado pela expressão 9.25 encontra-se representada na figura 9.19.


 Figura 9.19. Corrente I_2'' em função da velocidade.

9.4.2.2 Estudo da característica electromecânica

A potência que atravessa o entreferro será dada por:

$$P_e = 3 \frac{R_2 I_2''^2}{s} = \frac{3 \frac{R_2}{s} U_1^2}{\left(R_1 + \frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \quad (9.26)$$

e o binário electromagnético será:

$$M_{em} = \frac{3p R_2}{\omega s} I_2''^2 = \frac{\frac{3p R_2}{\omega s} U_1^2}{\left(R_1 + \frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \quad (9.27)$$

Binário máximo

Da equação 9.27 pode concluir-se que o binário electromagnético máximo obtém-se quando:

$$\frac{d}{ds} \left[s \left(R_1 + \frac{R_2}{s} \right)^2 + s X_{cc}^2 \right] = 0 \quad (9.28)$$

ou seja

$$\left(R_1 + \frac{R_2}{s} \right)^2 - 2s \left(R_1 + \frac{R_2}{s} \right) \frac{R_2}{s^2} + X_{cc}^2 = 0 \quad (9.29)$$

após algumas operações obtém-se:

$$R_1^2 + X_{cc}^2 - \left(\frac{R_2}{s} \right)^2 = 0 \quad (9.30)$$

O binário máximo ocorre quando o escorregamento é:

$$s_m = \pm \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad (9.31)$$

Substituindo na equação 9.27 obtém-se

$$M_{m\acute{a}x} = \pm \frac{3pU_1^2}{2\omega \left[\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{CC}^2} \right]} \quad (9.32)$$

Comentários

- Para o mesmo escorregamento, o binário depende do quadrado da tensão de alimentação.
- O binário depende da relação R_2/s . Não se altera quando se varia a resistência R_2 e o escorregamento s ao mesmo tempo de modo que esta relação se mantenha.
- Na expressão 9.32 o sinal mais (+) corresponde ao funcionamento como motor e o sinal menos (-) ao de gerador.
- Nas máquinas assíncronas de potência média, R_1 é menor do que X_{CC} (10 a 20% de X_{CC}). Por esta razão R_1^2 é ainda muito menor do que X_{CC}^2 e a expressão 9.31 simplifica-se ficando:

$$s_m \approx \pm \frac{R_2}{X_{CC}} \quad (9.33)$$

- A expressão 9.32 permite concluir que o binário máximo não depende da resistência do secundário. Contudo o valor daquela resistência é determinante no cálculo do escorregamento para o qual ele se verifica (s_m). A máquina de rotor bobinado permite que se introduzam resistências em série com os enrolamentos do rotor. Nestas condições é possível alterar a resistência total representada por R_2 . Variando R_2 altera-se o escorregamento de binário máximo, mas mantém-se o valor do binário máximo.
- Considerando que $R_1 \ll X_{CC}$ pode concluir-se da expressão 9.32 que o binário electromagnético máximo é pouco diferente em funcionamento gerador e em funcionamento motor. Na situação de gerador é em valor absoluto um pouco superior à situação de motor. Com efeito, o termo R_1 encontra-se no divisor a subtrair em funcionamento gerador e a somar em funcionamento motor.
- Da expressão 9.31 pode concluir-se que quanto menor for a relação R_2/X_{CC} menor é o valor absoluto do escorregamento de binário máximo s_m . Verifica-se que quanto maior for a potência da máquina, menor é s_m e por consequência menor é o escorregamento a que corresponde o funcionamento normal da máquina.
- O binário máximo depende do quadrado da tensão de alimentação e é tanto menor quanto maior for a impedância X_{CC} .
- Na situação de motor define-se

$$K_m = \frac{M_{m\acute{a}x}}{M_N} \quad (9.34)$$

onde M_N é o binário nominal. A esta relação dá-se o nome de "Capacidade de sobrecarga do motor assíncrono".

Binário de Arranque

Nos primeiros instantes do transitório de arranque a máquina encontra-se parada. À velocidade nula corresponde $s=1$, e substituindo na expressão 9.27, obtém-se a expressão para o cálculo do binário de arranque:

$$M_{arr} = \frac{3 \frac{P}{\omega} R_2 U_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_{cc}^2} \quad (9.35)$$

Esta é uma das características de exploração mais importantes da máquina de indução quando funciona como motor.

Define-se K_{arr} a que se dá o nome "Multiplicidade de binário de arranque"

$$K_{arr} = \frac{M_{arr}}{M_N} \quad (9.36)$$

Este parâmetro é normalmente dado pelos fabricantes no caso das máquinas de rotor em gaiola.

O binário de arranque é tanto menor quanto maior for a reactância de dispersão da máquina. De igual modo, uma resistência R_2 baixa implica também um binário de arranque baixo.

EXEMPLO 9.2

Considere uma máquina de rotor em gaiola de esquilo com as seguintes características nominais:

$$P_N=275 \text{ kW} \quad U_N=600 \text{ V} \quad 50\text{Hz} \quad p=2 \quad N_N=1451 \text{ rpm.}$$

Esta máquina pode ser representada através do seu circuito equivalente em ângulo com os seguintes parâmetros:

$$R_1=14,3 \text{ m}\Omega \quad R_2=38,2 \text{ m}\Omega \quad X_{cc}=265 \text{ m}\Omega \quad Z_0=0,475+j4,46 \text{ }\Omega$$

1. Calcule o binário máximo e o escorregamento para o qual ele se verifica na situação de motor e gerador.

2. Determine a relação M_{max}/M_N .

3. Calcule o binário de arranque e a sua relação com o binário nominal.

Resolução

1.0 escorregamento de binário máximo pode ser calculado a partir do circuito equivalente em ângulo. Obtém-se:

$$s_m = \pm \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \pm 0,144$$

O binário máximo na situação de motor e gerador será

$$M_{max} = \pm \frac{3pU_1^2}{2\omega \left[\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} \right]}$$

Sendo $U_1=600/\sqrt{3}$, obtém-se:

$$M_{maxM} = 4100 \text{ Nm} \quad (\text{motor})$$

$$M_{maxG} = -4568 \text{ Nm} \quad (\text{gerador})$$

2.A potência nominal num motor é uma potência útil. Assim, o binário nominal será

$$P_N = \omega_{mN} M_N = \frac{2\pi}{60} 1451 M_N = 275000 \text{ W}$$

donde $M_N = 1810 \text{ Nm}$

assim

$M_{\text{max}} / M_N = 2,26$ (motor) e $2,52$ (gerador)

3.0 binário de arranque pode ser calculado a partir da equação 9.35. Assim, entrando com os parâmetros do circuito equivalente em ângulo (Figura 9.18), obtém-se:

$$M_{\text{arr}} = \frac{3 \frac{P}{\omega} R_2 U_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_{cc}^2} = 1200 \text{ Nm}$$

donde

$M_{\text{arr}} / M_N = 0,66$

9.4.3 Características do motor de indução ligado a uma rede eléctrica

9.4.3.1 Introdução

Nesta secção admite-se que a fonte de energia que alimenta o motor é sinusoidal e caracterizada por um valor eficaz de tensão U_1 e frequência f_1 constantes. Em funcionamento normal, a baixos escorregamentos, a resistência R_2/s é muito superior a X_{cc} sendo a corrente I_2'' fortemente resistiva. O carácter resistivo vai diminuindo à medida que o escorregamento s aumenta pois X_{cc} mantém-se constante e R_2/s diminui. A corrente I_1 será a soma de I_0 com I_2'' como se mostra na figura 9.20 para dois pontos de funcionamento (a e b). Demonstra-se que o afixo de I_1 descreverá uma circunferência no plano de Argand à medida que o escorregamento varia.

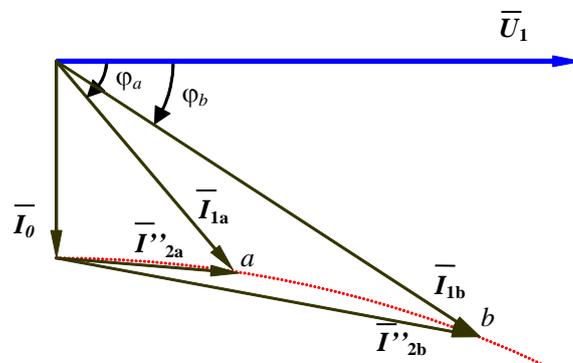


Figura 9.20. Diagrama vectorial da máquina em carga (para dois valores de carga).

As características de carga de um motor de indução são definidas em função da potência útil mecânica. Encontram-se representadas na figura 9.21.

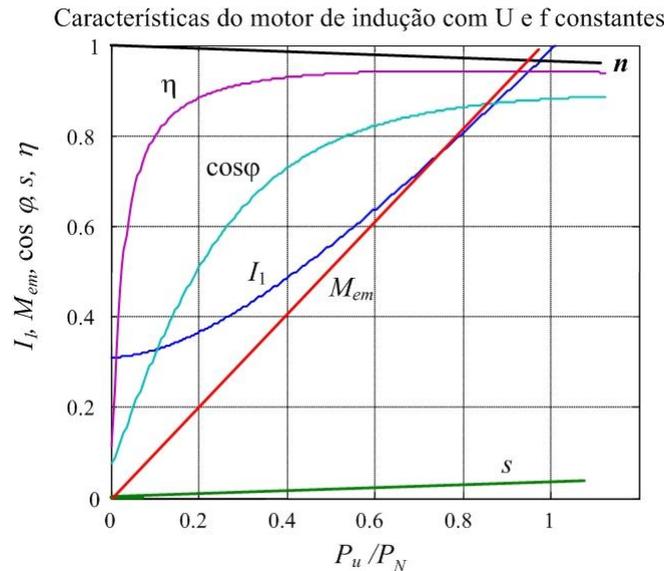


Figura 9.21. Características de serviço da máquina assíncrona.

Analise-se cada uma destas características.

9.4.3.2 Velocidade de rotação do motor

A máquina de indução é construída de modo a que a velocidade se afaste pouco (no funcionamento normal) da velocidade de sincronismo. Esta condição é imposta para que se garanta que a máquina tenha um bom rendimento.

Em vazio a velocidade de rotação é praticamente igual à velocidade de sincronismo. À medida que a carga (P_U) vai aumentando a velocidade vai diminuindo, mas esta diminuição é normalmente pequena. Para máquinas de pequena potência a variação de velocidade na situação de carga nominal pode atingir os 7%. Para motores de média e grande potência aquela variação restringe-se a 1% ou menos. A relação $n = N/N_{syn} = f(P_U)$ é aproximadamente representada por uma recta de pequena inclinação relativamente ao eixo das abcissas com ordenada na origem igual a 1. Como consequência, o escorregamento s será também representado por uma recta com pouca inclinação, mas próxima do eixo das abcissas.

Assim o motor assíncrono é uma máquina de velocidade quase constante.

9.4.3.3 Relação $M_{em} = f(P_U)$

Como durante a variação de carga (P_U) a velocidade do motor assíncrono fica quase constante, e como $P_U = M_{em} \omega_m$, a característica $M_{em} = f(P_U)$ é quase rectilínea, sendo aproximadamente proporcional a P_U .

9.4.3.4 Factor de potência $\cos\phi = f(P_U)$.

Em vazio o factor de potência de uma máquina assíncrona não ultrapassa geralmente o valor de 0.2. Como não há corrente no secundário, ou ela é muito pequena, a máquina comporta-se como uma bobina sendo o factor de potência baixo.

A corrente no secundário aumenta com o aumento de carga tomando a máquina um carácter menos indutivo, figura 9.20. O factor de potência irá subir com a carga. Este aumento do factor de potência é relativamente rápido e atinge um máximo próximo do ponto nominal de funcionamento. Para a carga nominal o factor de potência depende da potência do motor e do número de pares de pólos ou da sua velocidade de rotação como se pode ver na figura 9.22. Os valores desta figura foram retirados da base de dados europeia de motores assíncronos EuroDEEM. Nesta base de dados encontram-se as características dos motores fabricados por algumas empresas.

Deve notar-se que em vazio, além das perdas no ferro, há a considerar também as perdas mecânicas pois a máquina encontra-se em rotação. Nesta situação, as perdas no cobre são pequenas comparadas com as perdas em regime nominal uma vez que as correntes no rotor são muito baixas e as correntes no estator são bastante inferiores à corrente nominal.

A representação das perdas mecânicas no circuito equivalente pode fazer-se de forma menos exacta adicionando-as às perdas no ferro. A resistência r_m , que se encontra em série com o ramo de magnetização, pode assim representar a soma das perdas no ferro com as perdas mecânicas, isto é, as perdas em vazio.

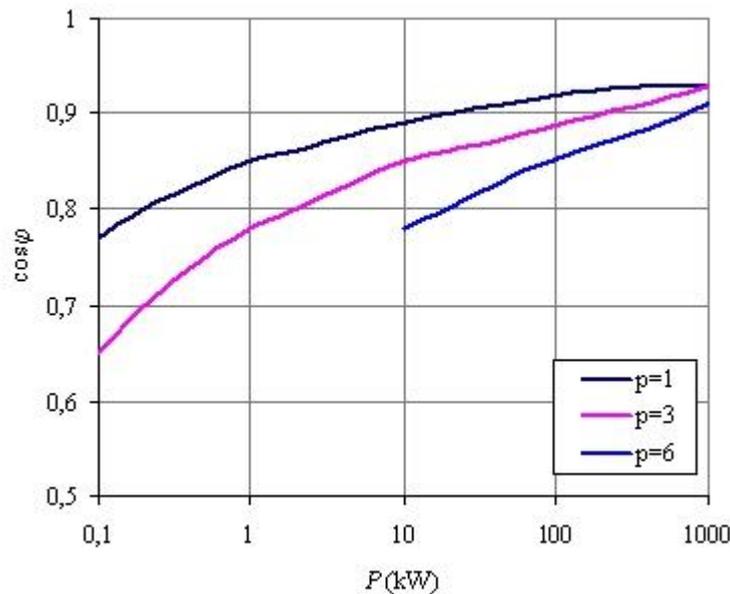


Figura 9.22. Factor de potência à carga nominal dos motores assíncronos em função da potência e do número de pares de pólos. (fonte: EuroDEEM)

9.4.3.5 Rendimento $\eta = f(P_u)$.

Os motores assíncronos têm os mesmos tipos de perdas que os outros motores eléctricos: perdas mecânicas, perdas no cobre, perdas no ferro e perdas complementares. Com excepção das perdas complementares, todas as outras podem ser calculadas através do circuito equivalente.

As perdas totais serão:

$$\sum P = P_{c1} + P_{c2} + P_{fe} + P_{mec} + P_{comp} \quad (9.37)$$

Para cargas compreendidas entre zero e o valor nominal P_{fe} representa apenas as perdas no ferro do estator porque, para as frequências normais do rotor, as perdas rotóricas no ferro são extremamente baixas. As perdas no ferro dependem fortemente da frequência e esta no rotor é muito baixa na situação normal de funcionamento.

Com o aumento da carga, a soma das perdas $P_{fe} + P_{mec}$ diminui um pouco devido à diminuição do fluxo principal e da velocidade de rotação. Normalmente esta diminuição não ultrapassa 4 a 8% e por essa razão estas perdas são consideradas perdas constantes no motor. As perdas no cobre e as perdas adicionais variam com a carga.

As perdas na máquina de indução, tal como noutros tipos de máquinas, podem ser decompostas na soma de duas parcelas: uma parcela correspondente às perdas constantes (independentes do estado de carga) e outra parcela de perdas variáveis com a carga. Tendo em consideração o circuito equivalente em ângulo

pode escrever-se:

$$p_{perdas} = p_0 + 3(R_1 + R_2)I_2'^2 \quad (9.38)$$

onde

$$p_0 = p_{fe} + p_{mec} + 3r_1I_0^2 \quad (9.39)$$

A figura 9.21 descreve uma curva tipo do rendimento de um motor assíncrono que atinge o seu máximo a cerca de 75% da carga nominal. A figura 9.23 apresenta a variação dos valores do rendimento nominal em função do número de pares de pólos e da potência das máquinas assíncronas.

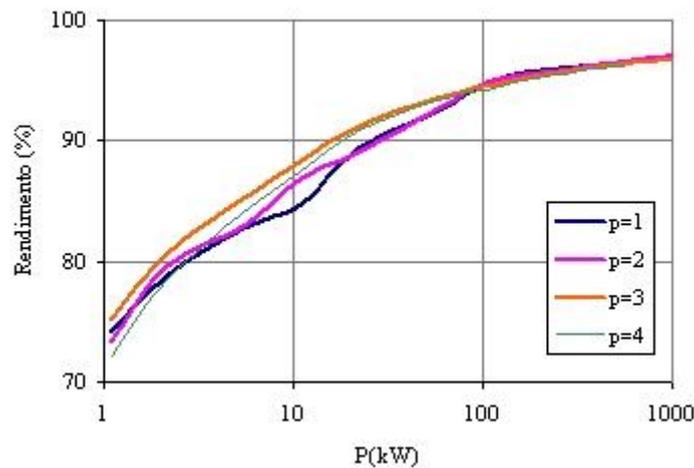


Figura 9.23. Variação do rendimento nominal com a potência e o número de pares de pólos. (fonte: EuroDEEM)

Por vezes há interesse em utilizar motores com rendimento mais elevado do que os de fabrico normal. Estes são mais caros, mas o seu preço adicional pode ser compensado com um custo inferior em perdas e um funcionamento mais prolongado. A figura 9.24 mostra uma comparação dos rendimentos de motores de fabrico normal com motores de alto rendimento. Verifica-se uma melhoria substancial para motores de gama média de potências. Para potências elevadas o benefício não é importante.

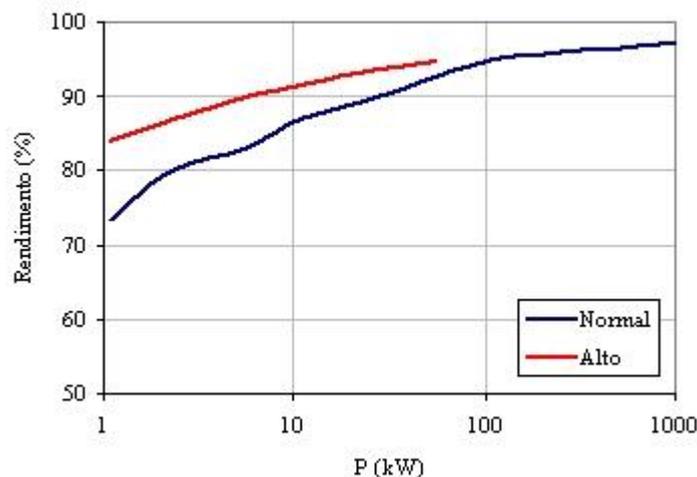


Figura 9.24. Comparação entre rendimentos de motores de fabrico "Standard" e motores de alto rendimento para

$$N_{\text{syn}}=1500\text{rpm} . (\text{fonte EuroDEEM})$$

Exemplo 9.3

Considere a máquina do exemplo 9.2. Calcule o factor de potência e o rendimento nas 3 situações:

- a) Em vazio.
- b) À velocidade intermédia entre o vazio e o ponto de funcionamento nominal.
- c) Na situação nominal.

Resolução:

a) Em vazio, recorrendo ao circuito equivalente em ângulo (exemplo 9.2), tem-se:

$$I_0 = U_1/Z_0 = 8,18-j76,8 \text{ A}$$

Obtém-se:

$$\cos \varphi = 0,1$$

$$\eta = 0 \quad (\text{a potência útil é nula})$$

b) A velocidade intermédia entre o ponto nominal e o vazio será $N=1475.5$ rpm. (1451, 1500). A esta velocidade corresponde um escorregamento de

$$s = \frac{1500 - 1475,5}{1500} = 0,0163$$

Introduzindo este valor no circuito da figura 9.18 e fazendo $U_2=0$ pode calcular-se a corrente I_2 , o binário e o factor de potência. Obtém-se:

$$\vec{I}_2 = 145,37-j16,4 \text{ A} \quad M_{em} = 956,38 \text{ Nm}$$

$$\vec{I}_1 = 154-j93 \text{ A} \quad \cos\varphi = 0,86$$

donde

$$P_u=147,7 \text{ kW} \quad P_1=159,5 \text{ kW}$$

$$\eta=92,6\%$$

c) Para a situação nominal o raciocínio é semelhante ao do caso anterior.

Obtém-se

$$\vec{I}_2 = 278,7-j62,4 \text{ A} \quad M_{em} = 1822\text{Nm}$$

$$\vec{I}_1 = 286,8-j139,4 \text{ A} \quad \cos\varphi = 0,90$$

donde

$$P_u=277 \text{ kW} \quad P_1=298 \text{ kW}$$

$$\eta=92,85\%$$

Comentários.

1. O ponto intermédio corresponde aproximadamente a 50% da carga nominal. O rendimento já é elevado para este ponto de funcionamento, muito próximo do nominal. O mesmo se passa para o factor de potência.

2. Em regime nominal obteve-se um valor ligeiramente diferente para o binário. Esta diferença deve-se aos erros do modelo. Um pequeno erro no escorregamento, ou num parâmetro, dá origem a diferenças notáveis.

9.4.4 O gerador de indução

9.4.4.1 Introdução

Na grande maioria das aplicações a máquina assíncrona é utilizada em funcionamento motor. Em certas aplicações, como por exemplo, em elevadores, pode ser utilizada umas vezes como motor e outras como gerador. Recentemente, com a generalização de centrais eléctricas de pequena potência, esta máquina tem vindo a ser utilizada também a funcionar como gerador. Esta secção é dedicada a este funcionamento e aborda a situação em que este se encontra em paralelo com a rede eléctrica. Para a análise vai continuar-se a utilizar a convenção motor, isto é, a potência eléctrica é positiva quando transitar da rede para a máquina e a potência mecânica é fornecida quando transitar para o veio. Nesta convenção, em funcionamento como gerador, ambas estas potências serão negativas.

9.4.4.2 Máquina assíncrona em paralelo com uma rede.

Considere-se uma máquina de indução ligada a uma rede de tensão $U_1 = cte$ e frequência $f_1 = cte$. Quando se encontrar a funcionar como motor a sua velocidade é menor do que a velocidade de sincronismo. O ponto de funcionamento nesta situação, figura 9.25, corresponde ao ponto 1.

Retirando-se a carga mecânica ao motor a corrente no estator reduzir-se-á para a corrente em vazio.

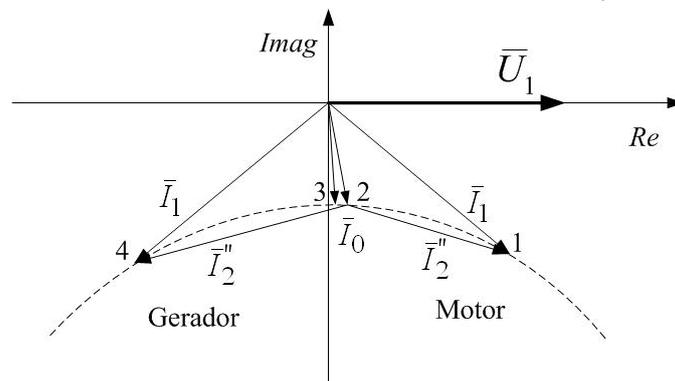


Figura 9.25. Diagrama das correntes em funcionamento motor e gerador.

Nesta situação a corrente do estator coincide praticamente com a corrente de magnetização que é aproximadamente constante (Ponto 2, figura 9.25). A velocidade de rotação é ligeiramente inferior à velocidade de sincronismo.

Acelere-se agora ligeiramente o rotor da máquina utilizando para tal um motor auxiliar de modo que $N = N_{syn}$, isto é, até à velocidade de sincronismo. Para realizar esta operação é necessário fornecer à máquina assíncrona uma potência correspondente às perdas mecânicas. As perdas no ferro e as perdas do cobre do estator em vazio são fornecidas pela rede de energia. (Ponto 3, figura 9.25).

Continuando a aumentar-se a velocidade de rotação da máquina assíncrona, então ultrapassa-se a velocidade de sincronismo e o escorregamento torna-se negativo. O fluxo magnético, permanecendo constante em amplitude, continua a rodar à mesma velocidade N_{Syn} . No entanto, em relação ao rotor, este fluxo roda em sentido contrário ao sentido da sua rotação mecânica e por consequência também varia o sentido da f.e.m. induzida no rotor $E'_2 = s E_2$.

A componente activa da corrente muda de sentido, mudando também o sentido do fluxo de potência eléctrica trocada com a rede. No entanto a componente reactiva mantém o mesmo sentido. A corrente do rotor cria uma força magnetomotriz que gira à mesma velocidade do campo girante. Como $N > N_{Syn}$ esta f.m.m. gira em sentido contrário no referencial do rotor e, interagindo com a f.m.m. do estator, cria um binário electromagnético de sentido negativo que se vai opor ao binário que se lhe forneceu através da máquina exterior. Concluí-se assim que a máquina absorve potência mecânica e fornece potência eléctrica à rede. A figura 9.25, ponto 4, ilustra este ponto de funcionamento.

O fluxo magnético principal é criado no gerador de indução pela corrente de magnetização I_m . Esta corrente corresponde a um consumo de potência reactiva por parte da máquina assíncrona. Esta deverá ser fornecida pela rede ou por uma bateria de condensadores.

O acoplamento do gerador assíncrono à rede não apresenta assim dificuldades de maior.

Na prática o gerador assíncrono é utilizado apenas em centrais de pequena potência como as pequenas centrais hidroeléctricas e as centrais eólicas.

Na utilização do gerador de indução dever-se-á ter em atenção que não se poderá fornecer um binário superior ao binário máximo em funcionamento gerador. Com efeito, nesta situação, o grupo “Máquina motriz - máquina assíncrona” embarcaria e atingiria velocidades elevadas. A corrente do gerador subiria para valores próximos da corrente de arranque.

9.5 Ensaios do motor de indução

9.5.1 Introdução

Esta secção é dedicada aos ensaios do motor de indução. Descrevem-se apenas os ensaios mais vulgares.

9.5.2 Determinação das resistências

A resistência dos circuitos acessíveis pode ser determinada fazendo circular uma corrente contínua e medindo a consequente queda de tensão. Um outro método consiste em utilizar uma ponte de impedâncias.

9.5.3 Ensaio em vazio

O ensaio em vazio permite obter informações importantes: perdas no ferro, corrente de magnetização, perdas mecânicas e factor de potência em vazio.

Coloca-se a máquina a rodar com o rotor em curto-circuito e sem qualquer carga mecânica no veio. O estator deverá ser alimentado por um sistema trifásico de tensões de frequência constante e amplitude variável. Pode utilizar-se para isso um autotransformador com regulação de tensão em carga. Depois da máquina ter rodado algum tempo e de se ter verificado que todas as ligações estão correctas, sobe-se a tensão de 20% sobre o valor nominal e mede-se a corrente e a potência. Depois fazem-se leituras da potência, tensão e corrente para valores sucessivamente mais reduzidos de tensão aplicada até que a corrente comece a subir de novo.

A figura 9.26 mostra o andamento das grandezas normalmente obtidas com este ensaio.

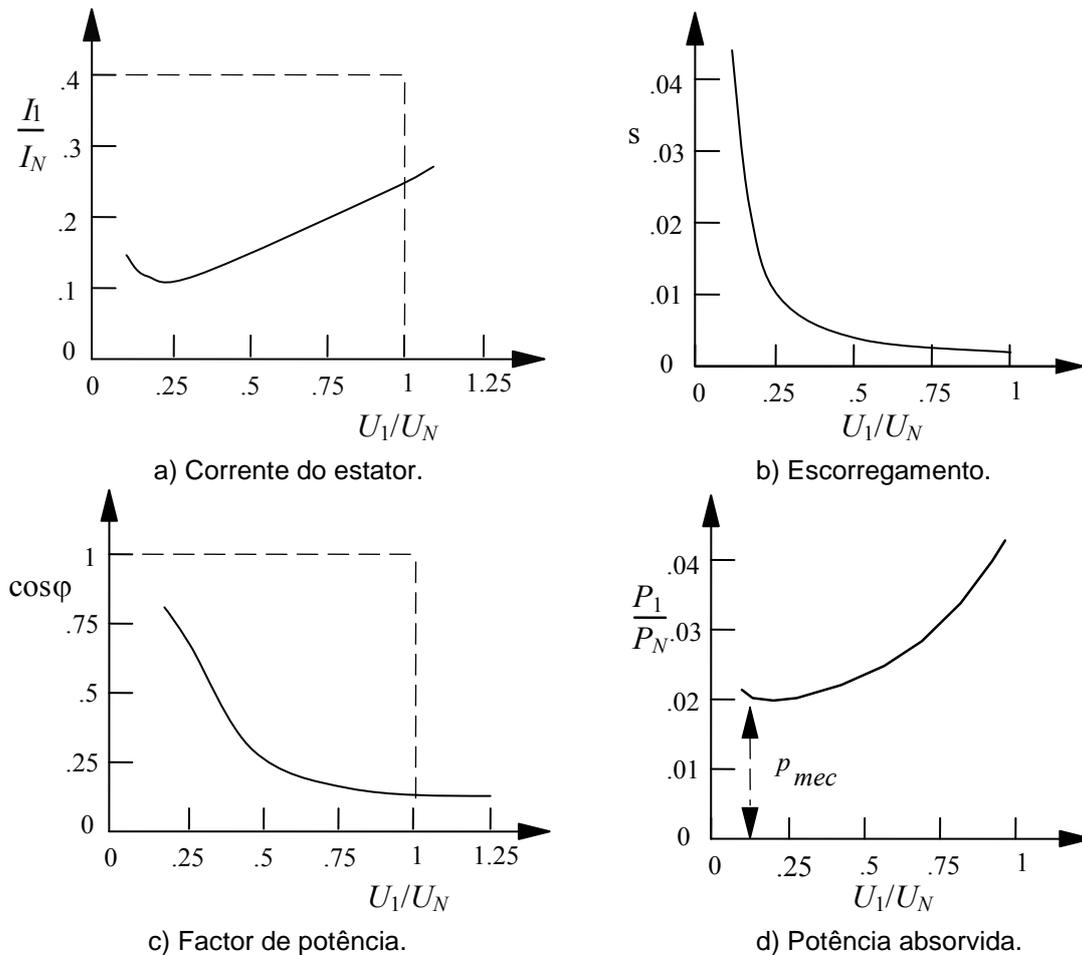


Figura 9.26. Curvas obtidas no ensaio em vazio.

À tensão nominal, para máquinas de potência média e elevada, a corrente é cerca de um quarto a um terço da corrente nominal. Este valor é mais elevado para máquinas de potência pequena. O factor de potência é baixo. Com o abaixamento da tensão, a potência e a corrente diminuem, figura 9.26a. A curva da potência é quase parabólica para tensões próximas da nominal pois as perdas no ferro são aproximadamente proporcionais ao quadrado da tensão, figura 9.26d.

Quando a tensão atingir o valor reduzido de cerca de 20%, a corrente de magnetização e as perdas no ferro são baixas. A velocidade cai apenas alguns por cento, e por consequência, as perdas mecânicas mantêm o seu valor inicial. A componente activa da corrente torna-se elevada para contrabalançar a corrente do rotor que sobe de forma a compensar a diminuição da tensão, pois para manter a máquina a rodar é necessário vencer um determinado binário de atrito. Assim, o factor de potência sobe e o escorregamento terá de ser maior para permitir que circule uma corrente mais elevada no rotor. A potência absorvida serve agora quase inteiramente para contrabalançar as perdas mecânicas, e, se a curva da potência for extrapolada, o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas representará as perdas mecânicas, figura 9.26d.

Continuando a reduzir a tensão atinge-se um ponto em que o binário motor produzido pela máquina é inferior ao binário de carga e a máquina acaba por parar.

A curva da potência traçada na figura 9.26d não inclui as perdas no cobre do estator. Se a corrente de magnetização à tensão nominal for de um terço da corrente nominal, estas perdas serão cerca de um nono das mesmas perdas em regime nominal.

Na máquina de rotor bobinado, o ensaio em vazio poderá ser feito do mesmo modo ou alternativamente com a máquina parada e com os enrolamentos do rotor em aberto. Os resultados que se obtêm são

diferentes dos do ensaio acima descrito. Note-se que agora a máquina está parada e portanto não existem perdas mecânicas. Deve considerar-se também que, agora, no núcleo do rotor roda um campo girante de frequência nominal. Assim, enquanto que na situação normal as perdas no ferro do rotor são desprezáveis, neste novo ensaio podem ser importantes.

9.5.4 Ensaio com rotor bloqueado ou em curto-circuito

O ensaio com rotor bloqueado ou em curto-circuito é análogo ao ensaio de curto-circuito do transformador.

O rotor é mantido parado e em curto-circuito. O estator é alimentado à frequência nominal a uma tensão reduzida para evitar correntes excessivas.

O ensaio em curto-circuito é realizado subindo a tensão lentamente e lendo-se a corrente, a tensão, e a potência absorvida até a corrente atingir um valor um pouco superior à corrente nominal. Nesta situação as leituras deverão ser efectuadas rapidamente para assim se evitarem sobreaquecimentos. Quando possível deverá ler-se também o binário no veio da máquina.

A figura 9.27 apresenta duas curvas obtidas a partir do ensaio em curto-circuito.

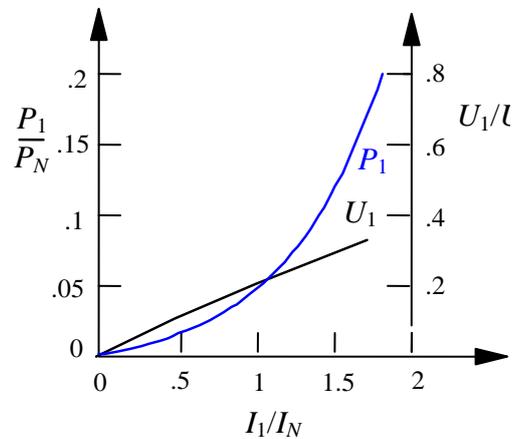


Figura 9.27. Ensaio em curto-circuito.

9.5.5 Ensaio em Carga

No ensaio de um motor de pequena potência pode usar-se como carga uma máquina auxiliar que consuma potência mecânica, como por exemplo, uma máquina de corrente contínua funcionando como gerador. O motor de indução encontra-se sob tensão e frequência nominais e os enrolamentos do rotor em curto-circuito. A carga mecânica deverá variar entre zero, passar pelo ponto nominal, e atingir alguma sobrecarga. Dever-se-á ler a tensão de alimentação, a corrente, a potência de entrada e a velocidade.

9.6 Ajuste de velocidade das máquinas de indução.

9.6.1 Introdução

A velocidade de rotação de uma máquina de indução é dada por

$$N = \frac{60 f}{p} (1-s) \quad (9.40)$$

onde

N - velocidade de rotação em rotações por minuto;

f - frequência de alimentação em Hertz;

s – escorregamento;

p - número de pares de pólos.

Da expressão 9.40 pode concluir-se que para ajustar a velocidade de rotação pode actuar-se em 3 grandezas:

1. Na frequência de alimentação;
2. No número de pares de pólos;
3. No escorregamento.

Seguidamente ir-se-á descrever com mais detalhe cada um destes processos.

9.6.2 Ajuste de velocidade por variação da frequência de alimentação

Este método baseia-se no ajuste da velocidade de sincronismo às necessidades da carga.

A regulação de frequência tem o inconveniente de exigir uma fonte de energia de frequência ajustável. É um processo que pode ser realizado com a utilização de onduladores, também designados por inversores autónomos, que são hoje facilmente construídos recorrendo a técnicas de Electrónica de Potência. São normalmente de dois tipos:

Onduladores de corrente: A partir de uma corrente contínua criam-se 3 correntes alternadas com uma determinada forma, sinusoidal ou outra.

Onduladores de tensão: A partir de uma tensão contínua produzem uma fonte de tensão alternada trifásica.

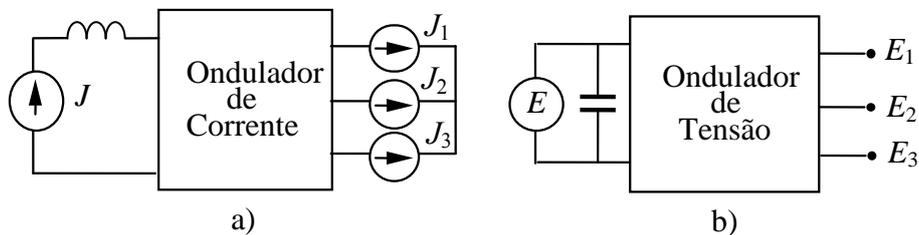


Figura 9.28. Onduladores trifásicos de corrente e tensão

Tanto os onduladores de corrente como os de tensão partem de uma forma contínua de energia (corrente ou tensão). Existe a possibilidade de se obter directamente da rede uma fonte de energia de frequência regulável utilizando outros sistemas menos comuns.

O estudo da máquina de indução em regime permanente, alimentado com frequência variável, pode ser realizado recorrendo ao circuito equivalente em ângulo apresentado na figura 9.18. Há que ter em conta que as reactâncias são proporcionais à frequência, e como esta varia, as reactâncias X_{cc} e $(x_1 + X_m)$ terão de ser calculadas para a frequência em estudo. As equações 9.24 a 9.35, resultantes do circuito equivalente, serão válidas tendo em conta esta dependência da frequência.

Na prática a variação de frequência deverá ser acompanhada por uma variação simultânea da tensão de alimentação que deverá depender também da característica da carga.

Entre as numerosas possibilidades de tipos de cargas, destacam-se os 3 casos mais simples:

- 1) com binário constante independente da velocidade;
- 2) com potência constante independente da velocidade;

3) quando o binário é proporcional ao quadrado da velocidade (ou da frequência).

Para que um motor funcione a várias velocidades alimentado com várias frequências e com valores semelhantes de rendimento, factor de potência, capacidade de sobrecarga e de frequência de escorregamento, deve fazer-se, simultaneamente com a variação de frequência, uma variação de tensão de alimentação que depende da frequência e do binário de carga da forma seguinte:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{f_1'}{f_1} \sqrt{\frac{M_{em}'}{M_{em}}} \quad (9.41)$$

Onde U_1' , f_1' , M_{em}' são a tensão, a frequência e o binário numa situação conhecida e U_1 , f_1 , M_{em} o valor das mesmas grandezas noutra situação que se queira análoga.

A equação 9.41 é uma equação geral aproximada. Para a situação de binário de carga constante, independente da velocidade, tem-se:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{f_1'}{f_1} \quad \text{ou} \quad \frac{U_1'}{f_1'} = \frac{U_1}{f_1} \quad (9.42)$$

Que é designada por comando U/f constante que é o modo mais vulgar de controlo das máquinas de indução. Este só pode ser utilizado para frequências inferiores à frequência industrial. Como a tensão a aplicar à máquina sobe com a frequência, quando a tensão atingir o valor nominal aplicar-se-á a tensão nominal e não será possível a continuação do aumento desta por se ter atingido o valor máximo. A figura 9.29 apresenta a lei de variação da tensão em função da frequência para uma gama de frequências alargada. Nesta figura estão representados dois regimes de exploração.

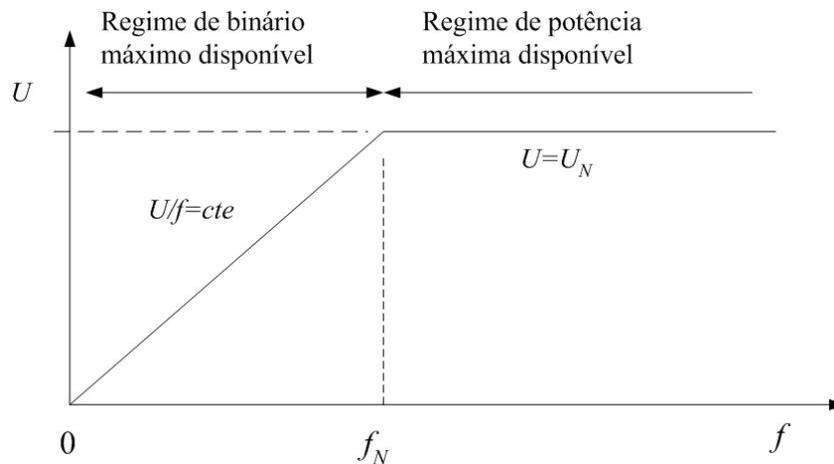


Figura 9.29. Regimes de exploração da máquina de indução.

No regime de binário máximo disponível, a tensão e a frequência são variados proporcionalmente segundo $U/f=cte$. Obtêm-se as características electromecânicas da figura 9.30a. Neste regime está disponível o binário máximo, embora a potência da máquina se encontre reduzida visto esta estar alimentada com a tensão reduzida. No segundo regime, regime de potência máxima disponível, também designado por regime de enfraquecimento de campo, a tensão aplicada é constante e igual à máxima possível. As características electromecânicas vão variar agora de acordo com a figura 9.30b. Como a frequência aumenta e a tensão se mantém constante, o fluxo vai diminuir em relação ao da situação nominal. Verifica-se agora que o binário máximo fica reduzido, mas a potência nominal da máquina está disponível.

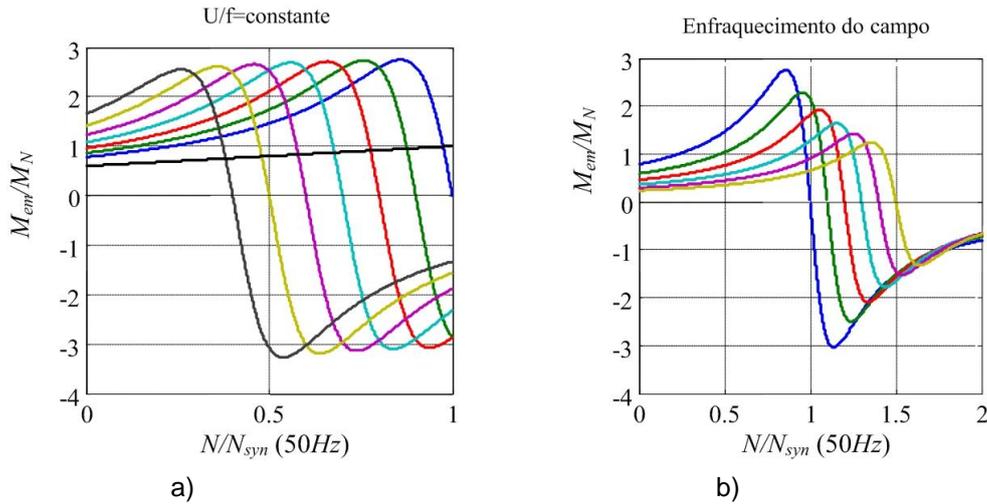


Figura 9.30. Características electromecânicas para os dois regimes de exploração para várias frequências. N_{syn} corresponde a 50Hz.

9.6.3 Ajuste da velocidade por variação do número de pares de pólos.

É um processo teoricamente bastante simples. Para que possa ser aplicado é necessário que tenha sido previsto na construção da máquina. Trata-se de uma variação por escalões e não uma variação contínua que está normalmente restringido a duas velocidades de sincronismo sendo normalmente utilizado em máquinas de rotor em gaiola. Nas máquinas de rotor bobinado o processo é mais complexo pois torna-se necessário também alterar o número de pares de pólos do rotor.

9.6.4 Ajuste por variação do escorregamento.

9.6.4.1 Variação da tensão aplicada com frequência constante.

É possível obter uma variação do escorregamento a partir da variação da amplitude da tensão aplicada ao motor. Como o binário electromagnético é proporcional ao quadrado da tensão de alimentação, quando se varia esta grandeza varia-se também o escorregamento para uma determinada carga (ver figura 9.31).

Este processo usa-se normalmente em casos de pequena potência e em cargas em que o binário varia fortemente no sentido crescente com a velocidade. É também necessário uma máquina com um valor de s_m (escorregamento de binário máximo) bastante elevado. Conduz a gamas de variação de velocidade estreitas.

A variação de tensão é normalmente feita através de dispositivos de Electrónica de Potência.

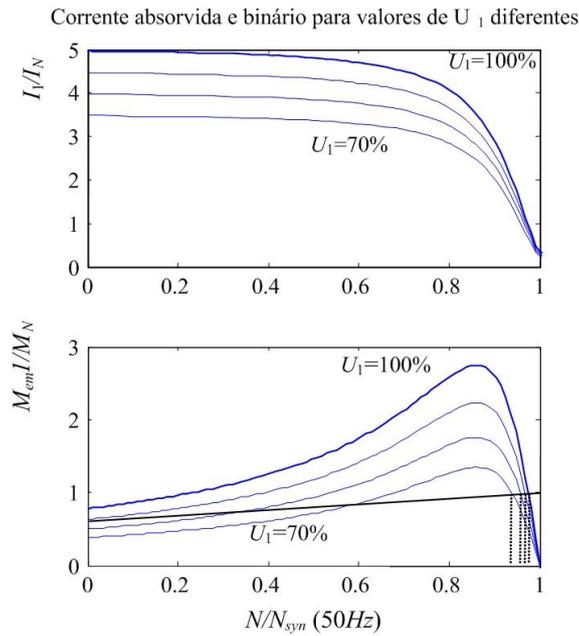


Figura 9.31. Ajuste da velocidade através da tensão aplicada.

9.6.4.2 Variação da resistência do circuito do rotor.

O ajuste da velocidade por variação de resistências no circuito do rotor só é possível para a máquina de rotor bobinado. Tem a vantagem de manter o binário máximo acessível, mas faz-se à custa de uma dissipação de energia em resistências exteriores. Este processo de variação de velocidade encontra-se ilustrado na figura 9.32.

Em máquinas de elevada potência ($P \approx 1MW$) a potência dissipada nas resistências exteriores pode tomar valores bastantes elevados comparadas com as perdas no cobre no rotor. À potência dissipada nas resistências dá-se o nome de potência de escorregamento.

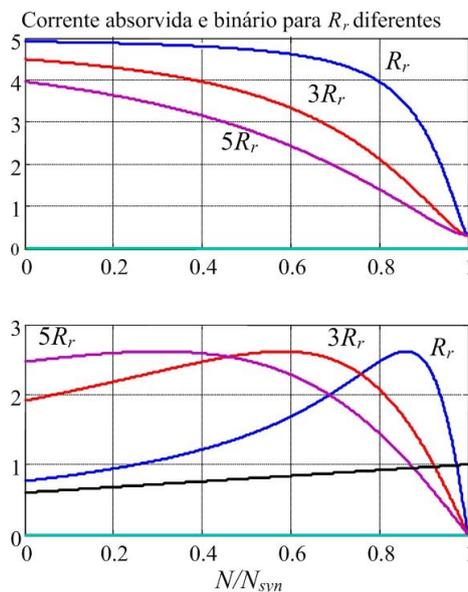


Figura 9.32. Variação de velocidade por resistências rotóricas.

9.6.4.3 Ajuste de velocidade por imposição de uma força electromotriz ao rotor.

Existem vários processos de regular a velocidade da máquina de rotor bobinado que actuam nas grandezas eléctricas do rotor. De uma forma geral pode dizer-se que todos eles se baseiam na imposição de um

sistema trifásico de tensões (ou correntes) no rotor. Note-se que este sistema de tensões imposto tem de ser feito à frequência das grandezas do rotor e, por conseguinte, ser variável com a velocidade de rotação da máquina.

Entre os numerosos dispositivos realizados, aqueles que estão a ter mais sucesso são o Sistema de Recuperação de Energia de Escorregamento, também conhecido por Cascata Hipossíncrona, e o sistema designado por máquina assíncrona duplamente alimentada que consiste na alimentação do rotor da máquina com um conversor de frequência bidireccional. Ambos os processos se aplicam a máquinas na gama de potências da ordem dos 500 kW a 20 MW embora também possam ser usados em máquinas de potência muito superior.

O Sistema de Recuperação de Energia de Escorregamento (SREE) é dos dois processos o mais simples e o mais económico. O seu princípio de funcionamento baseia-se na recuperação, através dum conversor de frequência estático, da energia que seria dissipada nas resistências que seriam introduzidas em série com os enrolamentos do rotor. Esta potência é entregue novamente à rede através do referido conversor quase sem perdas. É portanto um sistema de elevado rendimento.

O conversor de frequência estático é realizado de forma a manter em fase a tensão e a corrente no secundário. Visto do lado da máquina, este conversor é equivalente ao efeito que teria uma resistência exterior. Assim o binário máximo é mantido.

A alimentação da máquina de indução através de um conversor de frequência bidireccional no rotor permite variar a curva electromecânica de uma forma mais geral do que o sistema de recuperação de energia de escorregamento. Com efeito, enquanto que o SREE permite apenas extrair potência do rotor, este sistema permite retirar e introduzir potência no rotor e variar o ângulo de defasagem entre a tensão e corrente rotóricas. Como consequência, o sistema pode funcionar como motor e como gerador acima e abaixo de velocidade de sincronismo. É possível também, variando o ângulo de defasagem, controlar o factor de potência do lado do estator.

9.7 Arranque dos motores trifásicos de indução

O arranque de uma máquina rotativa é o transitório que, a partir da máquina parada, a coloca em movimento em regime permanente. Normalmente este transitório requer alguns cuidados. No motor de indução é necessário ter em conta simultaneamente 3 aspectos. O primeiro, aspecto eléctrico, tem a ver com o facto da corrente absorvida da rede ser elevada. O segundo, o aspecto mecânico, resulta da necessidade do binário motor ter de ser superior ao binário de carga. Por fim, o aspecto energético ou térmico, tem a ver com o facto de poderem ocorrer valores elevados de energia dissipada neste transitório, o que irá fazer elevar a temperatura no motor.

9.7.1 Aspecto eléctrico

No instante inicial do transitório de arranque a velocidade da máquina é nula. Como se pode verificar com o auxílio do circuito equivalente, a esta situação ($s=1$) corresponde uma impedância equivalente vista do estator relativamente baixa (4 a 7 vezes menor do que na situação nominal). A máquina pode ser percorrida por correntes várias vezes superiores à corrente para a qual foi dimensionada. Há que ter em conta que também os cabos eléctricos e restante aparelhagem serão percorridos pela corrente de arranque. Em redes de baixa potência, a circulação da corrente de arranque vai provocar um abaixamento transitório da tensão que pode ser suficiente para afectar as cargas que se encontrem na vizinhança. Este é o aspecto mais importante do arranque. Existe também o aspecto mecânico e energético que normalmente são condicionantes apenas em alguns casos.

9.7.2 Aspecto mecânico

O binário acelerador, num processo de arranque, é a diferença entre o binário útil desenvolvido pela máquina, e o binário de carga (figura 9.33).

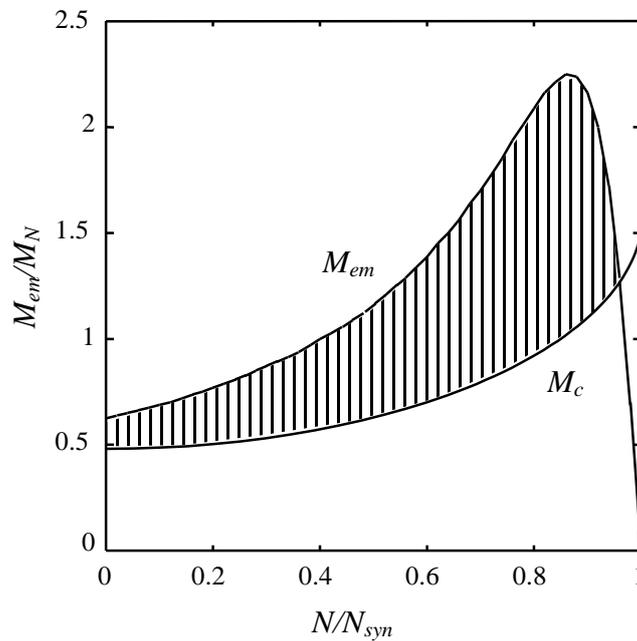


Figura 9.33. Binário acelerador.

Para que velocidade aumente é necessário que o binário acelerador seja positivo, isto é, que o binário electromagnético seja maior do que o binário de carga.

A equação fundamental da mecânica escreve-se

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - M_c \quad (9.43)$$

onde

$$\omega_m = \frac{\omega}{p}(1-s) \quad (9.44)$$

$J = J_M + J_C$ — Momento de inércia do conjunto motor-carga.

Da equação 9.43 tira-se:

$$\omega_m = \frac{1}{J} \int_0^t (M_{em} - M_c) dt \quad (9.45)$$

A equação 9.45 permite concluir que a velocidade de rotação ao longo do tempo (e num processo de arranque) pode ser calculada através de um integral indefinido. As grandezas M_{em} e M_c são normalmente função da velocidade ω_m . Este integral pode ser calculado quando se conhecer a característica de carga.

O tempo de arranque é função da característica electromecânica de máquina, da característica da carga e de momento de inércia e será tanto mais rápido quanto maior for a diferença entre as duas características referidas e quanto menor for o momento de inércia do conjunto "Motor-Carga".

O binário electromagnético depende do quadrado de tensão de alimentação. Quando, num motor de indução, se efectuar uma redução de tensão de alimentação com o objectivo de baixar o pico de corrente de arranque, é necessário ter em atenção que o binário de arranque também fica reduzido e pode ocorrer que

se torne mais baixo do que o binário mínimo necessário para colocar a máquina em movimento.

9.7.3 Aspecto energético ou térmico

As correntes elevadas, que se verificam durante o arranque numa máquina de indução, são responsáveis por uma considerável perda de energia por efeito de Joule, que vai fazer aumentar a temperatura nas suas partes construtivas. Este aspecto deverá ser considerado especialmente em situações com elevados momentos de inércia. Em situações em que o arranque seja muito frequente, o custo da energia gasta neste processo poderá ser importante.

9.7.4 Tipos de arranque para a máquina de rotor em gaiola

1. Arranque directo

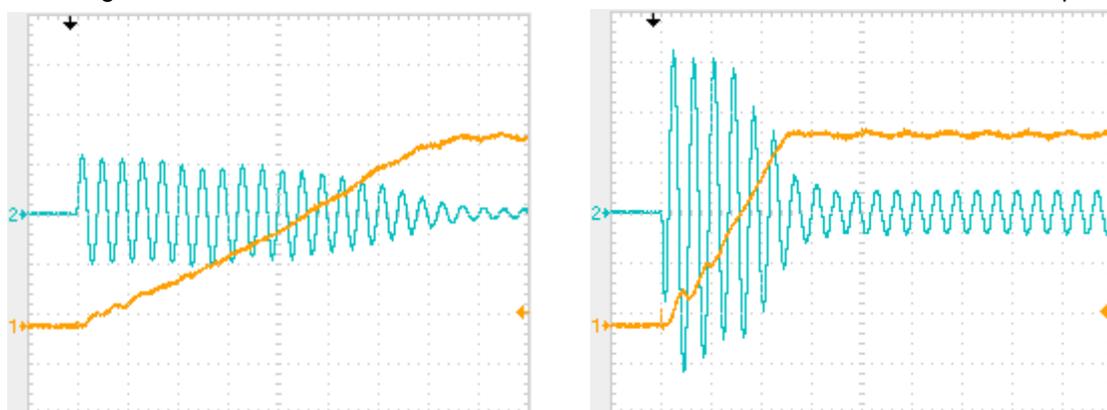
No arranque directo liga-se a máquina directamente à rede de energia utilizando apenas uma manobra. Este é caracterizado por uma grande simplicidade e por grandes correntes que podem reflectir-se negativamente na rede eléctrica de alimentação. Estes efeitos são tanto maiores quanto menor for a potência de curto-circuito da rede no local onde a máquina se encontrar ligada.

Este processo de arranque é ideal nos casos onde a intensidade de corrente de arranque é aceitável e quando o binário de arranque do motor for suficientemente superior ao da carga. A intensidade de corrente de arranque é bastante elevada, da ordem de 4 a 8 vezes a intensidade nominal. Normalmente o binário durante o arranque é maior do que o binário nominal (salvo algumas excepções) sobretudo no caso de motores com gaiolas complexas, atingindo um máximo a cerca de 80 a 90% da velocidade nominal. A partir deste valor a intensidade de corrente é consideravelmente reduzida.

Este tipo de arranque permite a entrada em funcionamento da máquina mesmo com plena carga caso a rede admita o pico de corrente. É assim indicado para máquinas de pequena e média potência.

Como o binário pode ser elevado no instante de ligação (o que não é o caso da figura 9.33), este processo é desaconselhado quando se pretender um arranque suave e progressivo como é o caso de certas aplicações (certos monta-cargas, tapetes, transportadores, etc).

A figura 9.34 apresenta um transitório de arranque directo obtido para uma máquina de 2.2kW. Este transitório foi realizado com carga mecânica nula. A curva alternada representa a corrente absorvida da rede e a curva a laranja representa a velocidade que parte do zero e atinge a velocidade de sincronismo. Foi realizado com a máquina ligada em estrela, figura 9.34a e com a máquina ligada em triângulo, figura 9.34b. Em triângulo absorve 3 vezes mais corrente da rede e tem um transitório 3 vezes mais rápido.



(a) Máquina ligada em estrela

(b) Máquina ligada em triângulo

Figura 9.34. Transitório de arranque directo (20A/div, 50ms/div).

O arranque directo é frequentemente utilizado em motores de potência considerável (1MW) alimentados a

6kV.

2. Arranque por autotransformador

No arranque por autotransformador liga-se a máquina, no primeiro tempo, a uma tensão mais baixa e assim baixa-se o pico de corrente de arranque.

Utiliza-se para isso um autotransformador redutor que se retira de serviço, depois da máquina ter alcançado uma velocidade elevada. O arranque é assim realizado em mais do que uma etapa em que a tensão que se aplica à máquina é mais baixa no primeiro tempo e depois colocada no seu valor nominal.

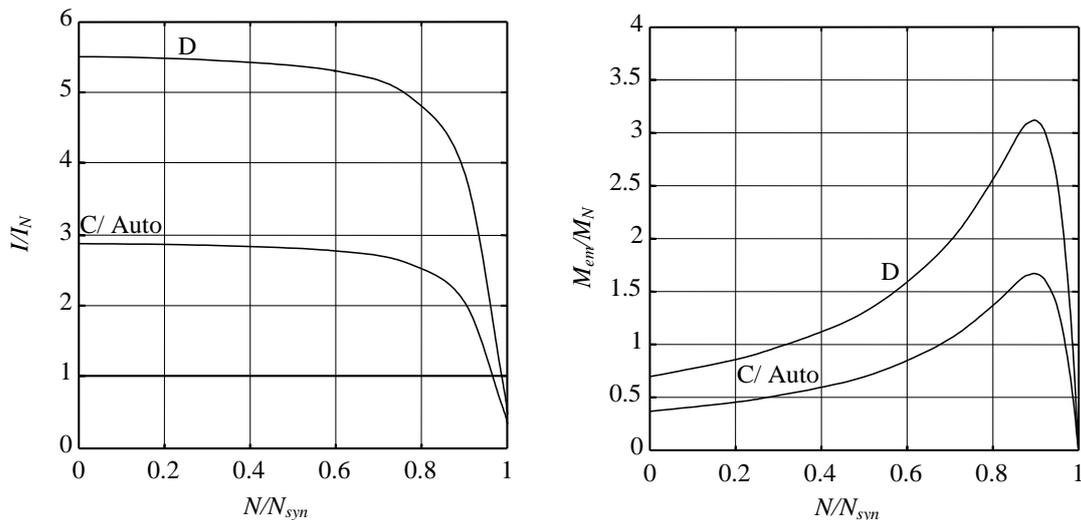


Figura 9.35. Características de arranque por autotransformador ($m^2=2$). D- Arranque directo

Sendo m a relação de transformação do autotransformador na primeira fase do arranque, a tensão aplicada à máquina é reduzida na relação de m e portanto a corrente na máquina é reduzida na mesma proporção. A corrente que circula na rede será reduzida de m^2 .

Sendo o binário proporcional ao quadrado da tensão de alimentação, pode concluir-se que o binário de arranque virá reduzido de m^2 . Este tipo de arranque tem a vantagem de reduzir a corrente pedida à rede na proporção que se desejar bastando para isso dimensionar o autotransformador segundo as necessidades. Tem o inconveniente de reduzir o binário de arranque na mesma proporção. É utilizado mais frequentemente em motores de grande potência.

3. Arranque estrela-triângulo

O arranque estrela-triângulo só pode ser aplicado a máquinas que tenham acessíveis as seis extremidades dos 3 enrolamentos do estator e que tenham sido dimensionados para funcionar em regime normal ligados em triângulo, isto é, os seus enrolamentos deverão ser capazes de suportar a tensão composta.

No primeiro tempo do arranque os enrolamentos são ligados em estrela, ou seja sob uma tensão reduzida de $\sqrt{3}$ (cerca de 58%) da tensão nominal. Esta tensão é constante durante todo o primeiro tempo. Tendo o motor atingido uma velocidade considerável, os seus enrolamentos são depois ligados em triângulo (2º tempo) a que corresponde a situação normal de funcionamento.

Sendo a tensão aplicada ao motor reduzida de $\sqrt{3}$, a corrente no motor é reduzida de $\sqrt{3}$ e o seu binário vem para $1/3$ do binário correspondente à ligação em triângulo. A corrente na linha de alimentação também é reduzida para $1/3$.

As características de arranque neste caso estão indicadas na figura 9.36.

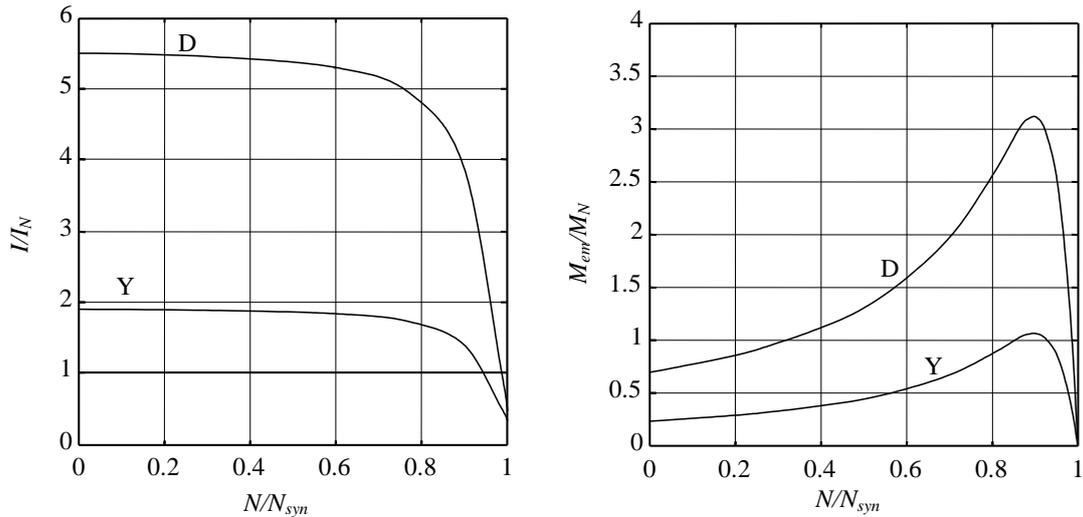


Figura 9.36. Características do arranque estrela-triângulo. D – Arranque directo.

Na figura 9.36 pode verificar-se que o valor de binário na situação inicial é bastante baixo. É portanto um processo bem adaptado a situações onde a característica de carga é caracterizada por um binário reduzido no arranque.

Deve salientar-se que na comutação de estrela-triângulo a corrente é anulada nestes enrolamentos durante um intervalo de tempo reduzido e só depois o enrolamento é ligado em triângulo. Na segunda ligação (triângulo) podem surgir picos de corrente elevados. A figura 9.37 apresenta um transitório de arranque estrela-triângulo numa máquina de 5.5kW onde é visível o pico na transição de estrela para triângulo.

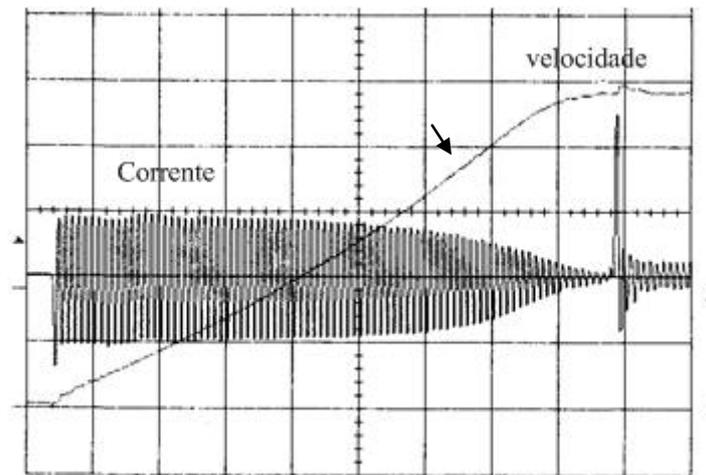


Figura 9.37. Arranque estrela-triângulo (30A/div, 200ms/div)

4. Arranque com ajuda de uma impedância intercalada no circuito do estator

4.1 Resistência

A redução da corrente do motor é obtida durante o primeiro tempo pela colocação em série de uma resistência trifásica que é de seguida colocada em curto-circuito.

A intensidade de corrente de arranque que percorre a linha de alimentação é reduzida proporcionalmente à redução de tensão aplicada ao motor. Contudo o binário é reduzido na relação quadrática. É portanto um processo menos eficaz que o do autotransformador (figura 9.38).

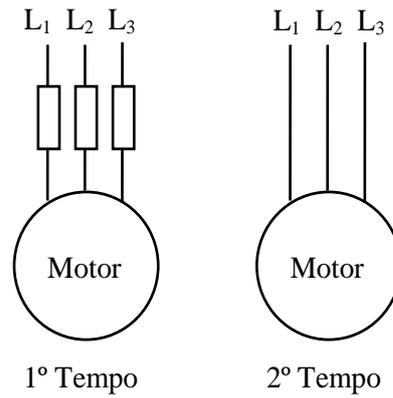


Figura 9.38. Arranque por impedâncias introduzidas em série com o estator.

A tensão aplicada aos terminais do motor vai variando à medida que a velocidade aumenta e que a corrente diminui. A intensidade é máxima no instante de ligação a que corresponde uma tensão mínima aplicada à máquina.

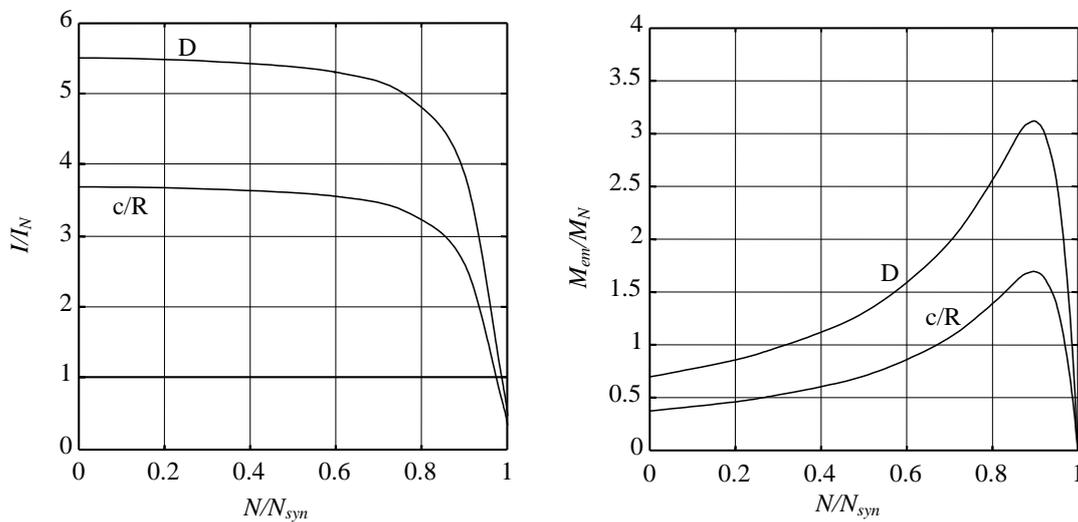


Figura 9.39. Arranque com resistências no estator. D – Arranque directo.

A passagem a “tensão plena” faz-se com regimes transitórios menos violentos que no caso do arranque estrela-triângulo.

4.2 Indutância

Este processo é semelhante ao anterior. Tem a vantagem de não haver perdas de energia nas resistências exteriores, mas é feito sob uma potência reactiva muito mais importante que no caso do arranque por resistências introduzidas em série com o circuito do estator. A figura 9.40 apresenta o transitório de arranque de uma máquina de 5.5kW utilizando este processo.

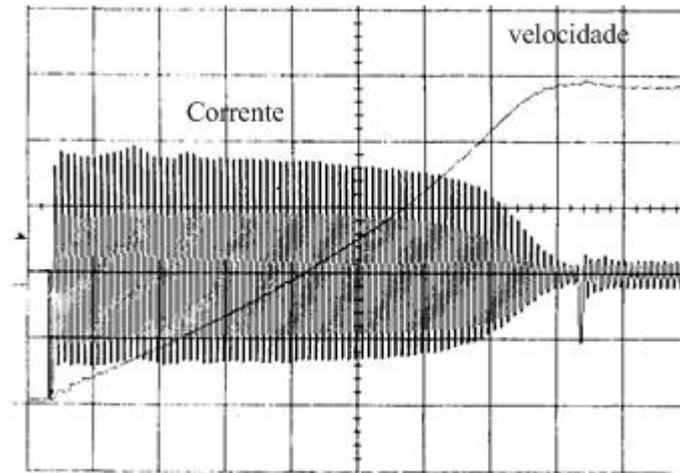


Figura 9.40. Transitório de arranque com uma indutância intercalada no circuito do estator (30A/div, 200ms/div).

5. Arranque usando arrancador suave com elementos de electrónica de potência

O desenvolvimento de dispositivos de electrónica de potência veio permitir a construção de sistemas que controlam a tensão que se aplica à máquina de forma progressiva. Surgiu o arrancador suave que aplica uma tensão crescente à máquina à medida que esta vai ganhando velocidade. Este dispositivo é hoje muito interessante pois é barato, ocupa pouco espaço nos quadros eléctricos, e permite um arranque sem transitórios violentos. A figura 9.41 apresenta o transitório de arranque de uma máquina de pequena potência (2.2kW) realizado com um arrancador suave.

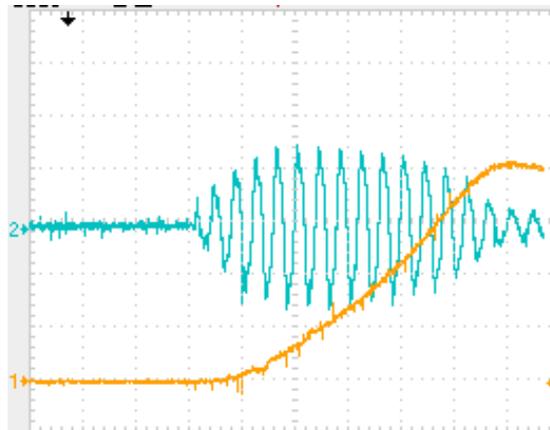


Figura 9.41. Transitório de arranque realizado com arrancador suave (20A/div,50ms/div).

9.7.5 Tipos de arranque para o motor de rotor bobinado

1. Arranque com resistências rotóricas

O motor de indução de rotor bobinado apresenta características de arranque muito favoráveis do ponto de vista da rede e da carga. Com efeito, este motor pode arrancar sem pontas de corrente elevadas e com binários consideráveis quando se colocar uma resistência exterior em série com os enrolamentos do rotor. Este processo está ilustrado na figura 9.42.

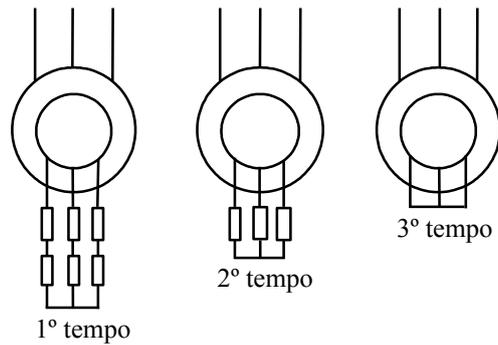


Figura 9.42. Arranque por resistências rotóricas.

O cálculo da resistência a inserir em cada fase permite determinar rigorosamente a curva velocidade-binário desejada.

A característica electromecânica virá alterada da forma que se indica na figura 9.32.

O arranque através de resistências rotóricas pode ser feito em dois tempos, ou seja, utilizando apenas um valor de resistência adicional, ou em vários tempos, utilizando vários valores que vão sendo alterados à medida que a máquina vai ganhando velocidade.

Para diminuir a resistência do circuito secundário durante o período normal de funcionamento e reduzir as perdas por atrito das escovas entre estas e os anéis de contacto, os motores são frequentemente dotados de um dispositivo para curto-circuitar os anéis do rotor em movimento e posterior levantamento das escovas.

Resumindo, pode considerar-se que este processo de arranque apresenta vantagens a 3 níveis:

- **Eléctrico.** O arranque pode ser feito reduzindo o pico de corrente de arranque até onde se quiser incluindo a corrente nominal.
- **Mecânico.** Pode calcular-se a resistência a adicionar de modo a que o arranque se faça a binário máximo caso se queira rápido, ou alternativamente, caso se queira um arranque suave, pode calcular-se a resistência de modo a que o binário seja mais baixo.
- **Energético ou térmico.** As perdas de calor no secundário verificam-se, na sua grande maioria, nas resistências adicionais que estão no exterior e portanto não vão contribuir para o aquecimento da máquina.

2. Arranque por Arrancador Centrífugo

Constitui um caso particular do arranque por resistências rotóricas. Neste caso estas vão sendo curto-circuitadas através de um dispositivo que actua em função da força centrífuga à medida que a velocidade vai aumentando.

9.8 Exercícios

9.1. Considere uma máquina assíncrona de rotor bobinado com as seguintes características:

Tensão nominal do estator – 400 V

Tensão nominal do rotor – 350 V

$f = 50$ Hz

$p=2$

$s_N = 1,4\%$

$r_1 = 20$ m Ω

$r'_2 = 17,6$ m Ω

$X_m = 4,4$ Ω

$X_1 = 90$ m Ω

$X'_2 = 100$ m Ω

9.1.1 Sabendo que as perdas em vazio são 1 kW, determine a resistência que representa estas perdas no circuito equivalente em T reduzido ao primário.

9.1.2 Qual o número complexo \bar{a} que transforma o circuito da questão anterior num circuito equivalente em ângulo reduzido ao primário.

9.1.3 Determine os parâmetros de circuito equivalente em ângulo.

9.1.4 Para o ponto de funcionamento nominal determine:

- a) Corrente I_2''
- b) Corrente I_1
- c) Factor de potência
- d) Binário electromagnético
- e) Potência electromagnética
- f) Rendimento

(Soluções: 9.1.1 $r_m=126 \text{ m}\Omega$

9.1.2 $\bar{a} = 1,02 - j0,004$

9.1.3 $R_1=20,4 \text{ m}\Omega$, $R_2=18,3 \text{ m}\Omega$, $X_{cc}=196 \text{ m}\Omega$)

9.1.4 a) $\bar{I}_2'' = 170 - j25 \text{ A}$ b) $\bar{I}_1 = 172 - j76,4 \text{ A}$ c) $FP=0,91$ d) $M_{em}=738 \text{ Nm}$ e) $P_{em}=114 \text{ kW}$ f) $\eta=96\%$)

9.2. Para a máquina de problema nº 9.1 determine as seguintes grandezas:

- a) Corrente de arranque em percentagem da corrente nominal
- b) Binário de arranque
- c) Escorregamento de binário máximo
- d) Binários máximos em funcionamento motor e gerador
- e) A capacidade de sobrecarga
- f) A multiplicidade de binário de arranque

(Solução: a) $I_{arr} = 6,42 I_N$ b) $M_{arr} = 468 \text{ Nm}$ c) $s_m=9,3\%$ d) $M_{maxM} = 2342 \text{ Nm}$

$M_{maxG} = -2883 \text{ Nm}$ e) $K_m = 3,17$ f) $k_{arr} = 0,63$)

9.3. Se aumentar a resistência R_2 da máquina do problema nº 1 para o dobro, em quanto vai aumentar o binário de arranque? Quais serão os novos valores dos binários máximo e mínimo.

(Solução: $M_{arr} = 896 \text{ Nm}$, $M_{maxM} = 2342 \text{ Nm}$, $M_{maxG} = -2883 \text{ Nm}$ Observação: o binário de arranque quase que duplica, mas os binários máximos em funcionamento motor e gerador ficarão constantes)

9.4. Para a situação nominal da máquina do problema N° 1 determine o valor das diversas perdas.

(Solução: $P_{j1}= 1,97 \text{ kW}$ $P_{j2}=1,623 \text{ kW}$ $P_0=1 \text{ kW}$)

9.5. Determine o ponto de rendimento máximo para a máquina do problema N° 1. Refira-se a:

- Carga em percentagem da carga nominal
- Corrente no secundário
- Binário
- Corrente no primário
- Escorregamento

(Sugestão: Para a resolução deste exercício pode considerar que o termo R_2/s é muito superior a X_{cc} e a R_1 na situação nominal)

(Solução: a) carga =54%, b) $I_2=93 \text{ A}$ c) $M_{em}=409 \text{ Nm}$ d) $I_1=106 \text{ A}$ e) $s_{\eta\max}= 0,74\%$)

9.6. Calcule as resistências rotóricas a introduzir na máquina do problema N° 1 nas seguintes situações:

- De modo a que o binário de arranque seja igual ao binário nominal.
- De modo a que o binário de arranque seja igual ao binário máximo.
- De modo a que a corrente de arranque seja igual a 150% da corrente nominal.

(Sugestão: Para a resolução deste exercício pode considerar que o termo R_2/s é muito superior a X_{cc} e a R_1 .)

(Solução: a) Resolvendo $M_N = \frac{3pU_1^2}{\omega} \frac{(R_2 + R'_{ext})}{(R_1 + R_2 + R'_{ext})^2 + X_{cc}^2}$ obtém-se: $R_{ext}=8,7 \text{ m}\Omega$ e $R_{ext}=0,99 \Omega$ b) De

$s_m=1 \rightarrow \frac{R_2 + R'_{ext}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = 1$ donde $R_{ext}=137 \text{ m}\Omega$ c) $R_{ext}=580 \text{ m}\Omega$)

9.7. Quais serão as características da máquina da questão N° 1 quando se curto-circuitarem os enrolamentos do estator e se aplicar um sistema trifásico de 350 V aos enrolamentos do rotor? Refira-se aos seguintes aspectos:

- Corrente em vazio.
- Característica electromecânica.
- Características de serviço normal à tensão e frequências nominais.

(Solução: As correntes deverão ser reduzidas aos 350V. As outras características são aproximadamente iguais às obtidas com a máquina ligada à rede do através do estator)

9.8. Uma máquina assíncrona trifásica tem as seguintes características:

$$P_N = 1 \text{ MW} \quad U_N = 6 \text{ kV}, \quad 50 \text{ Hz} \quad p = 3$$

Esta máquina encontra-se ligada em estrela. Quando alimentada em vazio, com uma fonte de tensão variável e frequência constante, os valores da potência absorvida são os seguintes:

Tensão de linha (V)	6000	5500	4500	3600	2700
Corrente de linha (A)	42	—	—	—	—
Potência absorvida total (kW)	16	14,2	11,2	9	7,22

Com o rotor bloqueado e em curto-circuito, obtêm-se os seguintes valores da tensão, corrente e potência:

$$923 \text{ V}, \quad 114 \text{ A}, \quad 20 \text{ kW}$$

Admita que, na zona de funcionamento normal, esta máquina pode ser representada pelo esquema equivalente em ângulo.

- a) Determine os parâmetros do circuito equivalente em ângulo desta máquina supondo que são iguais as resistências R_1 e R_2 .
- b) Qual o valor das perdas mecânicas?
- c) Para a situação nominal determine:
 1. O escorregamento
 2. A corrente do secundário I_2''
 3. As perdas em kilowatts e em percentagem da potência nominal
 4. O rendimento
 5. O factor de potência
 6. O binário e a velocidade

(Sugestão: Para a resolução deste exercício pode considerar que o termo R_2/s é muito superior a X_{cc} e a R_1 .)

(Solução: a) $R_1=R_2=283 \text{ m}\Omega$, $X_{cc}=4,92 \Omega$, $r_m=3 \Omega$, $X_0=82,5 \Omega$ b) $p_{mec}= 5 \text{ kW}$

c) 1. $s_N=0,79\%$, 2. $I_2''= 97 \text{ A}$, 3. $P_0=16 \text{ kW}$ ou $1,6\%$, $P_{js}=P_{jr}=7,977 \text{ kW}$ ou $0,8\%$, 4. $\eta=96,9\%$, 5. $\cos\phi=0,87$
6. $M_N=9625 \text{ Nm}$ $N=992 \text{ rpm}$)

Capítulo 10 Máquinas Síncronas

10.1 Descrição das Máquinas Síncronas

10.1.1 Descrição sumária

A constituição dos alternadores e motores síncronos é apresentada na figura 10.1. No rotor está montado o enrolamento indutor que é percorrido por corrente contínua e tem como função a criação de um campo magnético intenso. No estator estão montados os enrolamentos do induzido nos quais se efectua a conversão electromecânica de energia.

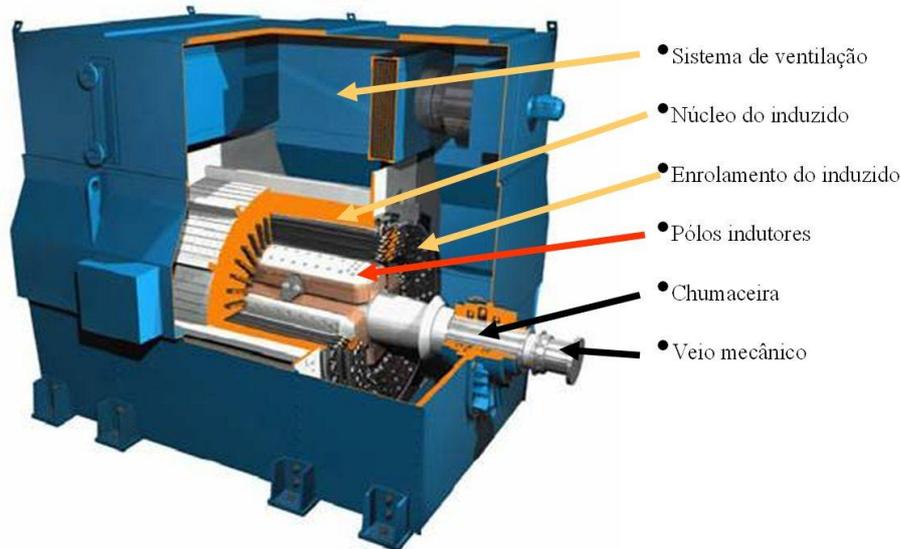


Figura 10.1. Constituição de uma máquina síncrona.

As correntes e tensões, em regime permanente, são alternadas no estator e contínuas no rotor.

A ligação eléctrica entre o circuito do indutor e o exterior pode fazer-se através de vários processos sendo um dos mais vulgares a utilização de anéis contínuos e escovas fixas.

O estator é constituído basicamente por uma "carcaça" com funções essencialmente mecânicas. Esta carcaça suporta um núcleo de material ferromagnético sob o qual, em cavas, se encontram distribuídos os enrolamentos do induzido.

O rotor pode ser de dois tipos consoante a existência ou não de saliência. O rotor de pólos salientes (figura 10.2a) é constituído por um número mais ou menos elevado de pólos sob os quais se encontra instalado o enrolamento indutor. Este enrolamento é normalmente do tipo concentrado. O rotor de pólos lisos contém um enrolamento indutor distribuído em cavas e realiza-se com um número reduzido de pólos. Este enrolamento indutor é designado também por enrolamento de campo ou por enrolamento de excitação.

10.1.2 Descrição detalhada das máquinas síncronas

1. Carcaça

A carcaça tem essencialmente uma função de suporte mecânico do estator. Normalmente não é atravessada por um fluxo magnético apreciável.

2. Núcleo do induzido

Tem por função permitir uma indução magnética intensa. Como é atravessado por um campo magnético variável no tempo é constituído por um material com pequenas perdas no ferro, ou seja, com pequena área do ciclo de histerese e com resistividade eléctrica elevada.

3. Enrolamentos do induzido

Os enrolamentos do induzido são constituídos por condutores isolados colocados em cavas.

Estes enrolamentos são do mesmo tipo dos enrolamentos do estator das máquinas assíncronas. São normalmente distribuídos ao longo da periferia podendo o número de cavas por pólo e por fase atingir um número elevado.

Nas máquinas trifásicas os três enrolamentos estão desfasados de um terço de período uns em relação aos outros.

4. Rotor

Os rotores são normalmente de dois tipos: rotores de pólos salientes e rotores de pólos lisos ou bobinados. Nas máquinas de pequena e média potência usam-se também rotores constituídos por ímanes permanentes.

Nos rotores de pólos salientes há um núcleo central montado no veio ao qual se ligam pólos onde são enrolados os enrolamentos do indutor. Esta solução é utilizada normalmente em máquinas de elevado número de pólos (baixa velocidade de rotação) sendo relativamente reduzida a força centrífuga a que estes estão sujeitos.

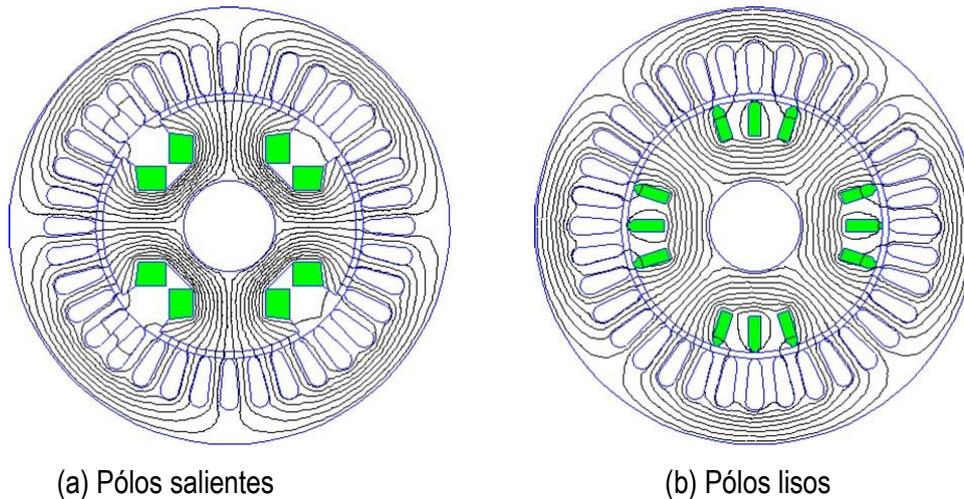


Figura 10.2. Máquinas de pólos salientes e pólos lisos (2 pares de pólos)

Nas máquinas de pólos lisos os condutores estão montados em cavas e são distribuídos ao longo da periferia. O número de pólos é reduzido (velocidade elevada) sendo o diâmetro destas máquinas relativamente pequeno ($D < 1,10m$). Apesar destas máquinas terem um comprimento bastante grande (5 a 6 m), o seu momento de inércia é muito menor do que o de uma máquina equivalente de pólos salientes, que é mais curta, mas tem um diâmetro muito maior.

Ao contrário das máquinas assíncronas, no rotor da máquina síncrona não há necessidade das precauções usuais no que respeita às perdas por correntes de Foucault pois em regime permanente o campo no rotor é constante. Assim este não tem que ser necessariamente constituído por chapas empilhadas podendo ser de aço maciço.

Por vezes há vantagem que o material do rotor tenha pequena resistividade eléctrica. Nesta situação, qualquer variação de campo no rotor origina correntes no núcleo relativamente intensas que têm como efeito atenuar as variações de campo. Com o mesmo fim montam-se condutores de cobre ou bronze no

rotor, paralelos ao eixo e que são ligados uns aos outros através de barras ou anéis tal como as gaiolas das máquinas de indução. Estes condutores constituem os enrolamentos amortecedores. Em regime permanente, as f.e.m. induzidas nestes enrolamentos são nulas e por consequência são nulas as correntes neles induzidas. Assim, os enrolamentos amortecedores funcionarão apenas em regimes desequilibrados ou em regimes transitórios.

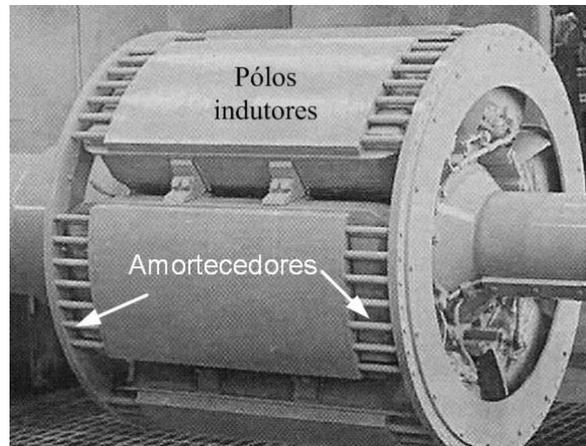


Figura 10.3. Enrolamentos amortecedores e pólos indutores.

5. Anéis e escovas e sistema "brushless"

Os anéis e escovas constituem o processo mais vulgar de fazer a ligação eléctrica com o rotor. Ao enrolamento de excitação é ligada uma fonte de tensão contínua exterior através dos anéis e escovas. A regulação da corrente de excitação pode ser feita variando o valor da tensão de alimentação.

Em vez de uma fonte de tensão contínua exterior ligada directamente ao enrolamento de excitação, usam-se também enrolamentos auxiliares que se deslocam num campo magnético. O movimento relativo destes enrolamentos em relação ao campo provoca uma f.e.m. induzida alternada. Por meio de rectificadores esta tensão alternada é transformada numa tensão contínua e aplicada directamente ao enrolamento de excitação. Estes rectificadores estão colocados no rotor. Com este dispositivo, normalmente designado por "Sistema Brushless", consegue-se impor uma corrente de excitação no rotor controlável sem a utilização de anéis e escovas ou seja sem ligação galvânica do rotor ao exterior.

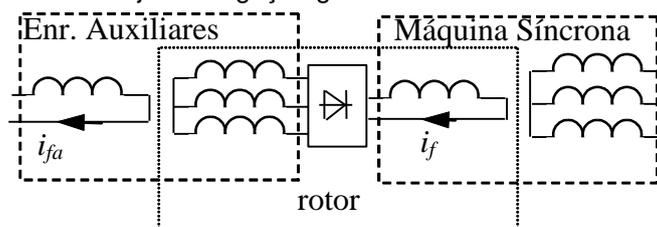


Figura 10.4. Sistema de excitação sem anéis e escovas. Sistema "Brushless".

6. Máquinas Síncronas com ímanes permanentes no rotor.

Em máquinas de pequena e média potência é possível substituir os enrolamentos de excitação por ímanes permanentes. Perde-se assim um grau de liberdade (a possibilidade de controlar a corrente de campo) mas ganha-se em simplicidade.

Este tipo de máquinas encontra-se hoje em fase de grande desenvolvimento devido aos contínuos melhoramentos que se têm verificado nos ímanes permanentes.

10.2 Circuito equivalente das máquinas síncronas

A figura 10.5 apresenta o desenho e distribuição de campo de uma máquina síncrona de pólos salientes, de

um par de pólos, onde se definem os ângulos no referencial do estator e no referencial do rotor. Assim, um determinado ponto genérico da periferia pode ser definido, no referencial do rotor, pela coordenada de posição θ_r , e no referencial do estator, pela coordenada de posição θ_s .

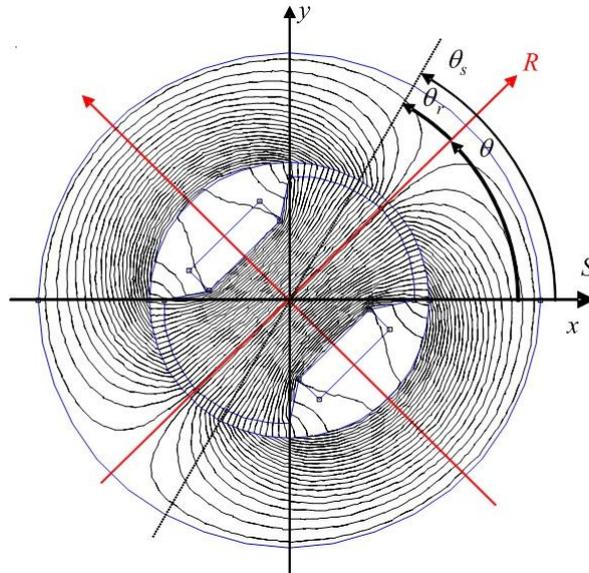


Figura 10.5. Definição de ângulos de posição no referencial do estator e no referencial do rotor.

Atendendo à figura 10.5, tem-se:

$$\theta_r = \theta_s - \theta \quad (10.1)$$

O campo de indução magnética B criado pelo indutor, é, por construção da máquina, sinusoidal em função do ângulo θ_r , podendo ser escrito na forma:

$$B(\theta_r) = B_{\max} \cos(\theta_r) \quad (10.2)$$

Ou alternativamente, tendo em conta a equação 10.1

$$B(\theta_s, \theta) = B_{\max} \cos(\theta_s - \theta) \quad (10.3)$$

Considere-se agora uma espira colocada no estator, como forma simplificada de representar um enrolamento de uma fase do indutor. A posição desta espira é definida por θ_a que determina a posição do seu eixo conforme se pode observar na figura 10.6.

Sendo R o raio da periferia interior do estator e L o comprimento do núcleo de ferro na direcção do veio, o fluxo ligado com a bobina a será dado por:

$$\Psi_a = \int_{\theta_a - \pi/2}^{\theta_a + \pi/2} B(\theta_s, \theta) R L d\theta_s \quad (10.4)$$

Tendo em conta a equação 10.3, tem-se:

$$\Psi_a = R L B_{\max} \int_{\theta_a - \pi/2}^{\theta_a + \pi/2} \cos(\theta_s - \theta) d\theta_s \quad (10.5)$$

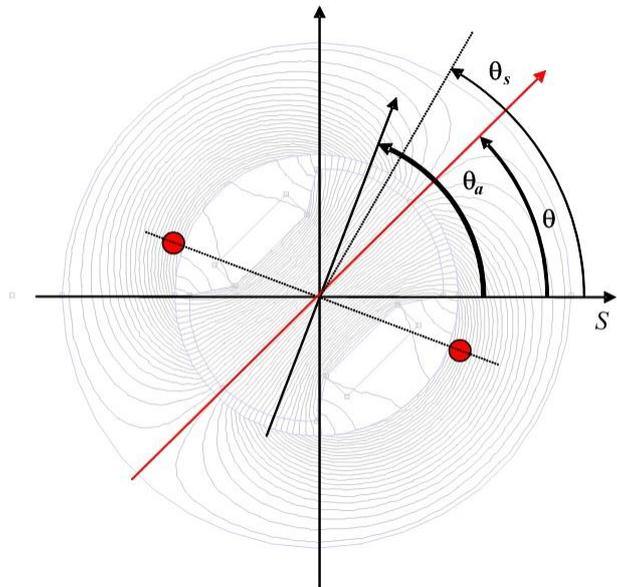


Figura 10.6. Definição da posição do campo e da espira para o cálculo do fluxo ligado.

Resolvendo o integral da equação 10.5, tem-se:

$$\psi_a = RLB_{\max} \left[\sin(\theta_s - \theta) \right]_{\theta_a - \pi/2}^{\theta_a + \pi/2} \quad (10.6)$$

$$\psi_a = 2RLB_{\max} \cos(\theta_a - \theta)$$

ou, atendendo que o coseno é uma função par,

$$\psi_a = 2RLB_{\max} \cos(\theta - \theta_a) \quad (10.7)$$

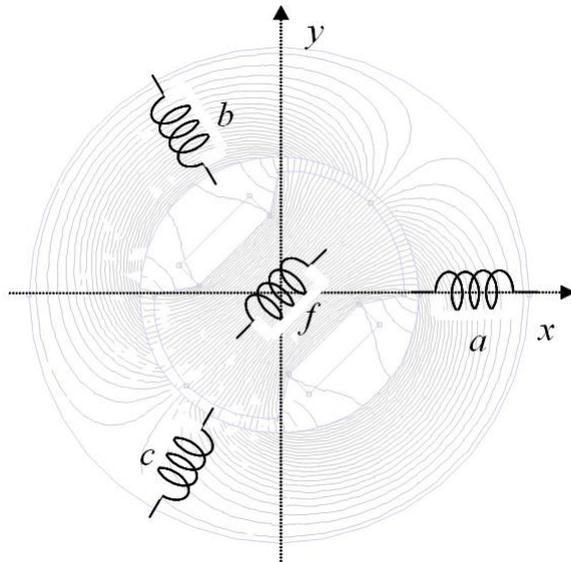


Figura 10.7. Definição da posição das 3 fases.

Tendo em conta que as três fases se encontram colocadas em $\theta_a=0$, $\theta_b=2\pi/3$ e $\theta_c=4\pi/3$, tem-se:

$$\begin{aligned}\psi_a &= 2RLB_{\max} \cos(\theta - \theta_a) \\ \theta_a &= 0 & \psi_{fa} &= 2RLB_{\max} \cos(\theta) \\ \theta_b &= \frac{2\pi}{3} & \psi_{fb} &= 2RLB_{\max} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \theta_c &= \frac{4\pi}{3} & \psi_{fc} &= 2RLB_{\max} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}\tag{10.8}$$

Para um enrolamento distribuído com N espiras ter-se-á:

$$\begin{aligned}\psi_{fa} &= N_{eq}\phi \cos(\theta) \\ \psi_{fb} &= N_{eq}\phi \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \psi_{fc} &= N_{eq}\phi \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}\tag{10.9}$$

onde

$$\phi = 2RLB_{\max}\tag{10.10}$$

As expressões 10.9 determinam os fluxos ligados com os enrolamentos do induzido devidos apenas ao fluxo criado pelo indutor. O fluxo total será dado pela soma do fluxo criado pelo indutor e do fluxo criado pelo induzido.

Assim, para a máquina de rotor cilíndrico (ou de pólos lisos):

$$\begin{aligned}\psi_a &= \psi_{fa} + Li_a + Mi_b + Mi_c \\ i_b + i_c &= -i_a \\ \psi_a &= \psi_{fa} + (L - M)i_a\end{aligned}\tag{10.11}$$

onde L é o coeficiente de indução própria de um dos enrolamentos do induzido e M é o coeficiente de indução mutua entre dois enrolamentos do induzido. Dada a simetria destes enrolamentos, os coeficientes de indução mútua entre eles são iguais. Definindo um coeficiente de indução cíclico por:

$$L_s = L - M\tag{10.12}$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned}\psi_a &= \psi_{fa} + L_s i_a \\ \psi_b &= \psi_{fb} + L_s i_b \\ \psi_c &= \psi_{fc} + L_s i_c\end{aligned}\tag{10.13}$$

O coeficiente de indução cíclico representa um coeficiente de indução equivalente quando as três fases estão alimentadas com um sistema trifásico de correntes.

Aplicando a lei geral de indução aos enrolamentos do induzido e tendo em conta as equações 10.13, tem-se, em convenção motor:

$$\begin{aligned} u_a &= r_1 i_a + L_s \frac{di_a}{dt} + \frac{d\psi_{fa}}{dt} \\ u_b &= r_1 i_b + L_s \frac{di_b}{dt} + \frac{d\psi_{fb}}{dt} \\ u_c &= r_1 i_c + L_s \frac{di_c}{dt} + \frac{d\psi_{fc}}{dt} \end{aligned} \quad (10.14)$$

Designando as derivadas dos fluxos devidos ao circuito de excitação por força electromotriz em vazio e notando a simetria das equações, obtém-se em regime alternado sinusoidal:

$$\bar{U} = r_1 \bar{I} + jX_s \bar{I} + \bar{E}_f \quad (10.15)$$

Onde

$$X_s = \omega L_s \quad (10.16)$$

é a reactância síncrona da máquina e

$$\bar{E}_f = j\omega \bar{\psi}_f \quad (10.17)$$

é a força electromotriz em vazio.

Note-se que o vector “força electromotriz em vazio” encontra-se em quadratura e avanço em relação ao vector que representa o fluxo criado pelo circuito de excitação. Estes dois vectores estão associados à posição instantânea do rotor da máquina. Assim, quando o rotor da máquina se deslocar de um determinado valor, também estes vectores irão deslocar-se do mesmo valor.

O circuito equivalente por fase da máquina síncrona, válido para a máquina de rotor cilíndrico, pode tomar a forma indicada na figura 10.8. A máquina de pólos salientes tem um modelo mais complexo e que está fora do âmbito deste curso. Os resultados que se irão obter serão válidos quantitativamente para a máquina de pólos lisos e qualitativamente para a máquina de pólos salientes.

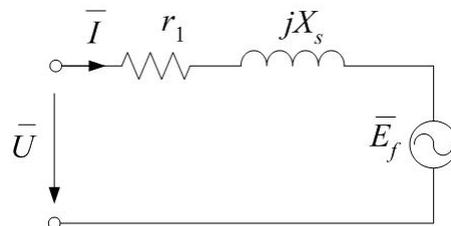


Figura 10.8. Circuito equivalente da máquina síncrona de rotor cilíndrico. (convenção motor)

Como a máquina síncrona funciona como gerador, nas suas aplicações mais importantes, vai adoptar-se a convenção gerador neste capítulo. A diferença entre a convenção motor e a convenção gerador encontra-se ilustrada na figura 10.9. Nos circuitos equivalentes representados nestas figuras estão incluídas as resistências dos enrolamentos do estator. Como se verá mais à frente, o desprezo destas resistências é válido em máquinas de média e de grande potência, quando se pretender calcular os valores das correntes e potências. Para a determinação do rendimento é sempre necessário entrar com as respectivas perdas.

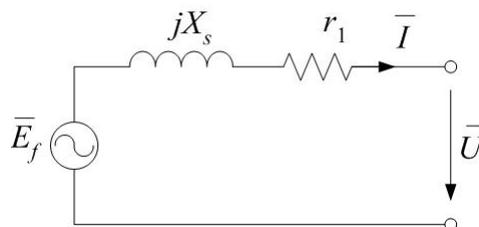


Figura 10.9. Circuito equivalente da máquina síncrona de rotor cilíndrico. (convenção gerador)

Em convenção gerador, tem-se:

$$\bar{E}_f = \bar{U} + (r_1 + jX_s)\bar{I} \quad (10.18)$$

As quedas de tensão $r_1 I$, e $X_s I$ têm os valores muito diferentes. Os valores da queda de tensão resistiva são normalmente inferiores a 1% da tensão nominal. Os valores da queda de tensão na reactância síncrona podem variar entre 80 a 200% da tensão nominal consoante o tipo de máquina. Dada a diferença de valores destas duas grandezas, usa-se frequentemente a simplificação que ignora o valor da resistência dos enrolamentos do estator.

10.3 Máquina síncrona isolada da rede.

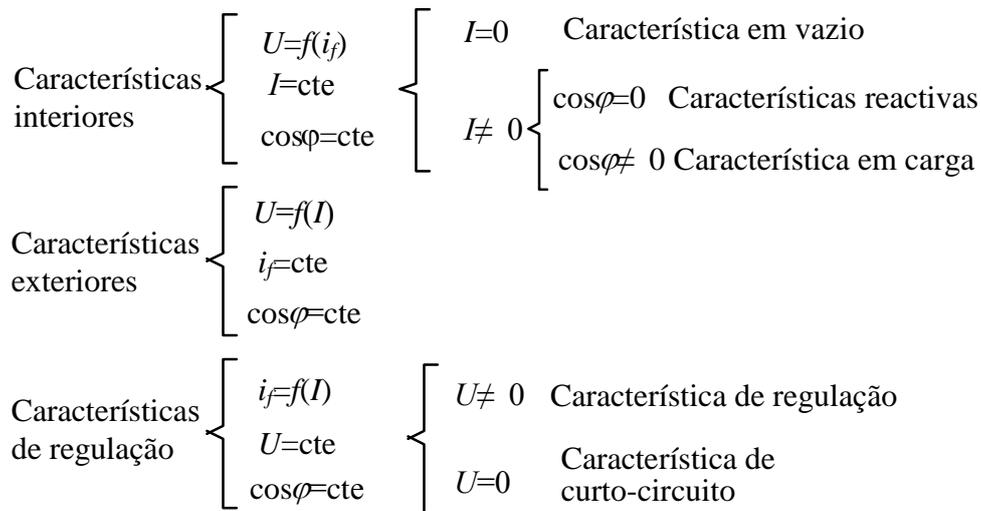
10.3.1 Introdução

As grandezas que caracterizam o funcionamento dos alternadores são: a f.e.m. em vazio E_f , a tensão aos terminais U , a intensidade de corrente de excitação i_f , a intensidade de corrente no induzido I e o número de rotações ou a frequência. Normalmente os alternadores são utilizados a velocidade constante para se obter uma frequência constante. Assim interessa especialmente as cinco grandezas:

$E_f, U, i_f, I, \cos \varphi$

em que o $\cos \varphi$ é o factor de potência da carga. Destas 5 grandezas só 4 são independentes, pois E_f, U e I estão relacionadas pela queda de tensão interna do alternador provocada pela passagem da corrente no enrolamento do induzido.

Normalmente, estudam-se as seguintes características:



Nas características em vazio, nas características reactivas e nas características em curto-circuito, a potência fornecida pelo alternador é nula, porque é expressa por:

$$P = 3UI \cos \varphi \quad (10.19)$$

Nestes ensaios são nulas as grandezas I , $\cos \varphi$ ou U respectivamente.

Nesta secção estudar-se-ão apenas algumas das características da máquina síncrona funcionando como gerador (alternador). Uma máquina eléctrica não pode funcionar como motor sem receber energia eléctrica (da rede ou de um outro gerador). Considerar-se-ão apenas grandezas eléctricas sem fazer qualquer referência à máquina de accionamento (turbina, motor etc). Supor-se-á que esta mantém a velocidade sempre constante qualquer que seja o regime de funcionamento.

10.3.1.1 Características em vazio

Nesta situação ($I=0$), e portanto, atendendo ao circuito equivalente da figura 10.9, tem-se:

$$E_f = U \quad (10.20)$$

e a característica em vazio será definida por

$$E_f = U(i_f) \quad (10.21)$$

Esta característica está directamente relacionada com a característica magnética. A força electromotriz em vazio E_f é proporcional ao fluxo, e portanto, a característica em vazio traduz, numa outra escala, a característica magnética. Devido à histerese do material que constitui o circuito magnético da máquina, não existe uma correspondência biunívoca entre i_f e ϕ ou E_f . Assim, sendo i_m um valor elevado da excitação, quando se fizer variar a corrente de excitação entre zero e i_m no sentido sempre crescente e depois de i_m a zero no sentido sempre decrescente, obtém-se a curva de magnetização representada na figura 10.10. Observa-se que a curva descendente está acima da curva ascendente.

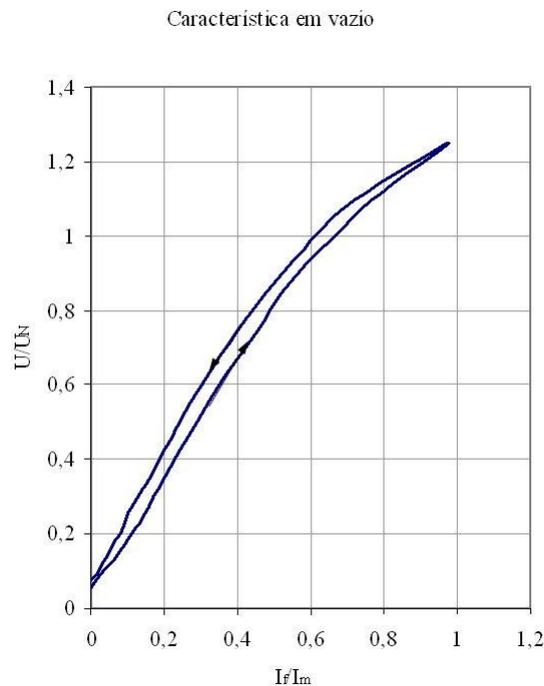


Figura 10.10. Característica em vazio.

Na realidade, as curvas limite das características em vazio estão próximas uma da outra. Usualmente considera-se uma única curva para a característica em vazio. Será naturalmente a curva que resulta da média entre a curva ascendente e a curva descendente.

10.3.1.2 Características de curto-circuito

A característica de curto circuito pode ser considerada um caso particular das características de regulação quando $U=0$. Contudo, no seu traçado é realizado com inversão de eixos. Assim em vez de $i_f = f(i_{CC})$ faz-se $i_{CC} = f(i_f)$.

A corrente que percorre o enrolamento é praticamente indutiva pois pode desprezar-se a resistência do enrolamento r_1 em face da sua reactância X_S . Assim, do circuito equivalente pode tirar-se:

$$E_f = X_S I_{CC} \quad (10.22)$$

Em regime de curto-circuito correspondem campos magnéticos de fraca intensidade. A máquina funciona na sua zona linear e por consequência a reactância síncrona X_S é constante. Como X_S é constante e E_f é proporcional à corrente de excitação i_f , tem-se que I_{CC} e i_f são proporcionais sendo a característica de curto-circuito uma recta.

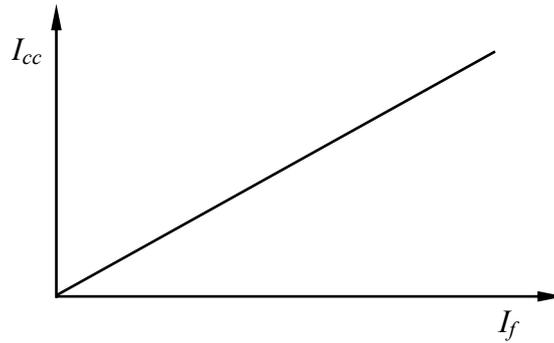


Figura 10.11. Característica de curto-circuito.

A corrente de curto-circuito é praticamente independente da velocidade do alternador. De facto, ao variar-se a velocidade varia-se simultaneamente a f.e.m. E_f e a reactância síncrona X_S . A figura 10.13 traduz a variação de I_{CC} com o número de rotação do rotor ou da frequência do alternador. Só para velocidades (frequências) muito pequenas é que a resistência toma um valor comparável com o da reactância X_S . Neste caso I_{CC} deixa de ser constante tendendo para zero com a velocidade, pois E_f tende igualmente para zero com N e a impedância síncrona Z_S tende para r_1 .

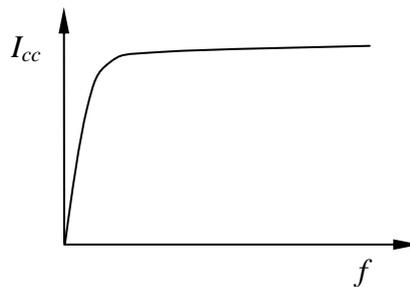


Figura 10.12. Corrente de curto-circuito em função da frequência.

Deve notar-se que as correntes de curto-circuito em **regime permanente**, para valores da corrente de excitação próximos dos valores nominais, são da ordem de grandeza das correntes nominais das máquinas a que se referem. Isto resulta da reactância síncrona tomar valores elevados pois depende essencialmente da indutância própria dos enrolamentos do induzido.

10.3.2 Determinação da reactância síncrona

A impedância síncrona pode ser determinada por

$$Z_s = \frac{E_f}{I_{CC}} \quad (10.23)$$

A partir da característica em vazio e da característica de curto-circuito traçadas no mesmo gráfico, como se representa na figura 10.13, traça-se a curva $Z_S = E_f / I_{CC}$

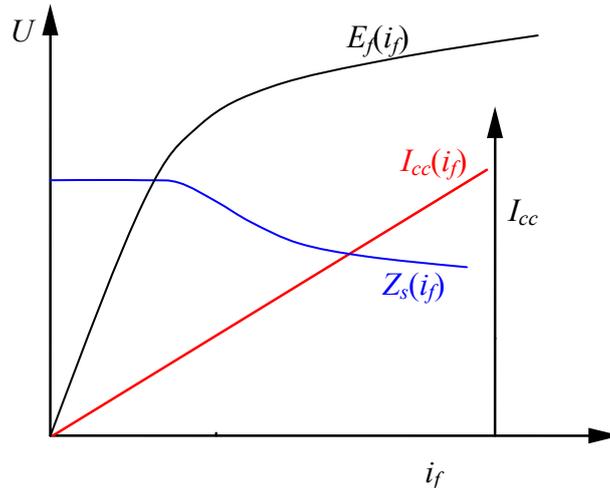


Figura 10.13. Determinação da impedância síncrona.

Em regime não saturado a reactância síncrona é constante e pode definir-se uma impedância síncrona não saturada. Já o mesmo não se pode dizer da impedância síncrona em regime saturado. A saturação praticamente só influi na característica de vazio e não interfere na característica de curto-circuito.

Convém notar que as duas grandezas E_f e I , que figuram nestas duas curvas, são valores não coerentes, por não corresponderem a estados de saturação magnética equivalentes. De facto, a f.e.m. é determinada com o circuito magnético saturado e I_{cc} é determinado sob um circuito magnético não saturado.

10.3.3 As características exteriores

Nas características exteriores determina-se a variação da tensão aos terminais com a corrente do induzido quando a corrente de excitação se mantém constante. Para a realização experimental é necessário que a velocidade seja mantida constante ao longo de todo o ensaio.

Considerando o circuito magnético linear, como a força electromotriz E_f é proporcional à corrente de excitação, pode afirmar-se que estas características são determinadas com uma força electromotriz E_f praticamente constante.

Analise-se os casos em que a carga é indutiva pura, capacitiva pura ou resistiva pura. Para simplificar o estudo considere-se as resistências dos enrolamentos do induzido nulas.

Os circuitos equivalentes, para os três casos considerados, estão representados na figura 10.14.

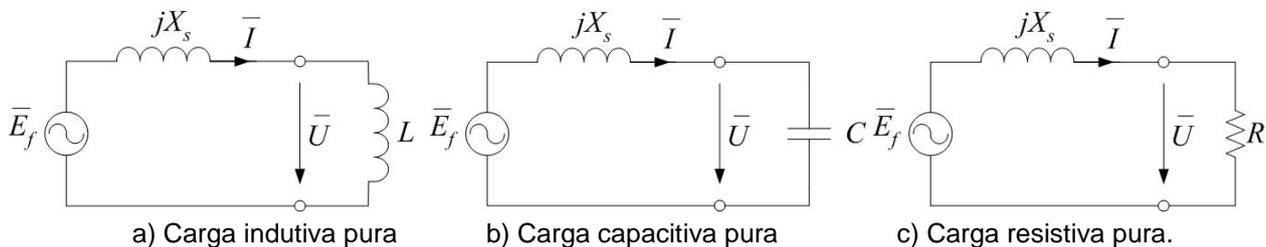


Figura 10.14. Circuitos equivalentes.

Aos circuitos equivalentes da figura 10.14 correspondem os diagramas vectoriais da figura 10.15.

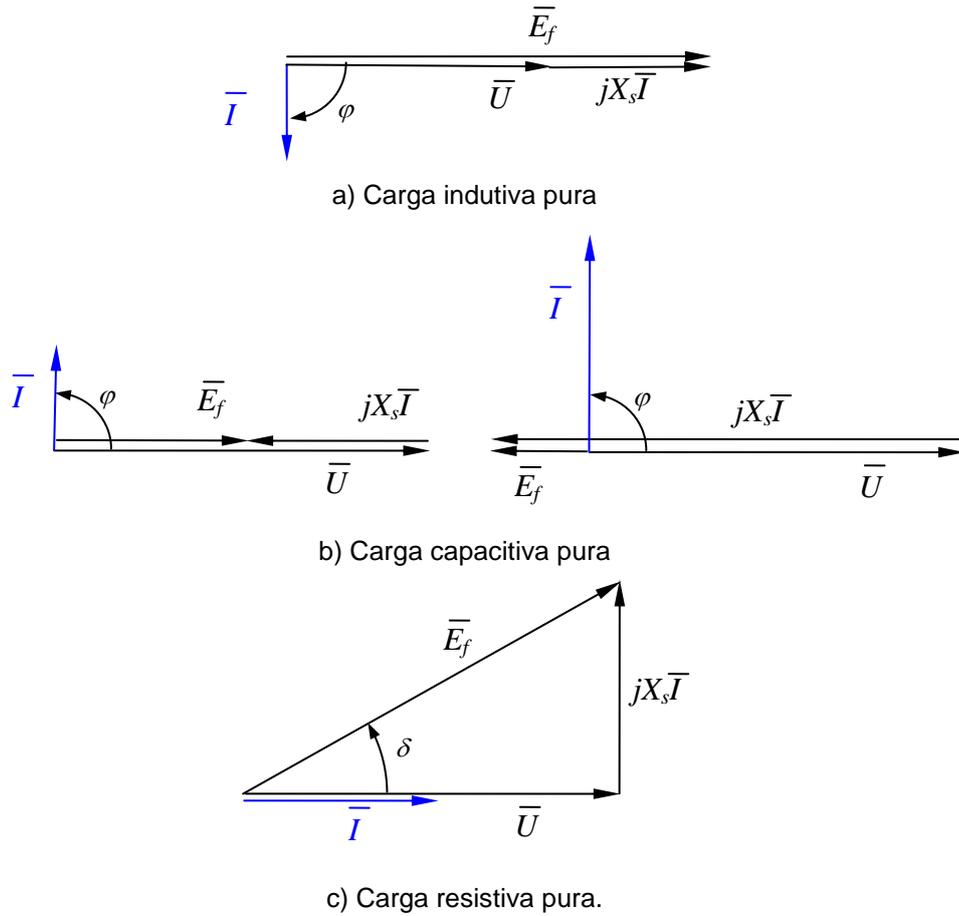


Figura 10.15. Diagramas vectoriais com cargas indutiva, capacitiva e resistiva puras.

A equação vectorial $\bar{E}_f = \bar{U} + jX_s \bar{I}$, válida para os três casos, toma as formas algébricas:

Carga indutiva
$$U = E_f - X_s I \tag{10.24}$$

Carga capacitiva
$$U = E_f + X_s I \quad \text{ou} \quad U = X_s I - E_f \tag{10.25}$$

Carga resistiva
$$U^2 = E_f^2 - (X_s I)^2 \tag{10.26}$$

Como $E_f = \text{cte}$ ($i_f = \text{cte}$), às equações 10.24, 10.25 e 10.26 correspondem as características exteriores representadas na figura 10.16.

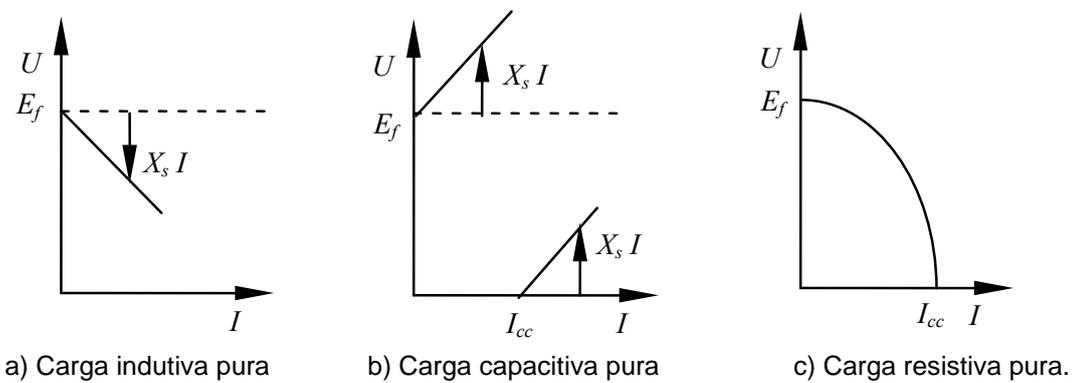


Figura 10.16. Características exteriores.

Para uma carga com factor de potência qualquer obter-se-iam as características representadas na figura

10.17 onde também se reproduzem as 3 características anteriores.

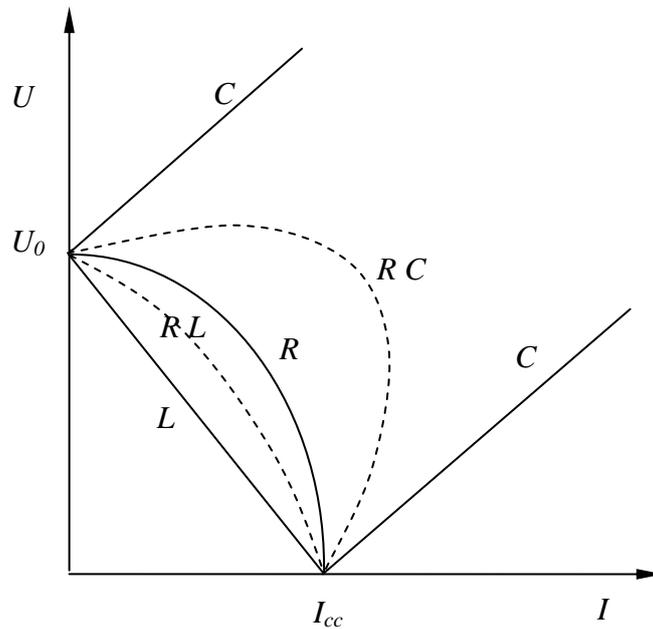


Figura 10.17. Características exteriores (elipses).

O ponto de funcionamento obtém-se pela intersecção da característica exterior com a recta de carga correspondente. Por exemplo, caso a carga seja resistiva pura, a relação entre a tensão e a corrente deverá ser dada por $U=RI$ que seria representada por uma linha recta na figura 10.17. A intersecção desta linha recta com a característica exterior correspondente à carga resistiva, determina o ponto de funcionamento.

10.4 Máquina síncrona ligada a uma rede de potência infinita

Um primeiro estudo das máquinas síncronas ligadas a uma rede eléctrica faz-se considerando que a potência da rede é muito superior à potência da máquina. No limite, diz-se que a rede é de potência infinita.

10.4.1 Equações gerais

Uma rede de potência infinita é caracterizada por frequência e tensão constantes. A máquina síncrona quando está ligada a uma rede de potência infinita tem velocidade constante e igual à sua velocidade de sincronismo nominal; a tensão de alimentação U é constante e independente da carga.

O esquema equivalente será o representado na figura 10.18.

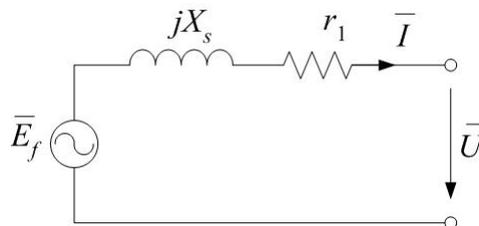


Figura 10.18. Circuito equivalente.

Na convenção gerador, tem-se

$$\bar{E}_f = (r_1 + jX_s)\bar{I} + \bar{U} \quad (10.27)$$

Como $X_s \gg r_1$, para o cálculo das correntes, é válido desprezar a resistência dos enrolamentos r_1 .

Contudo esta aproximação não é válida para o cálculo das perdas na máquina ou do rendimento. O circuito equivalente correspondente encontra-se na figura 10.19.

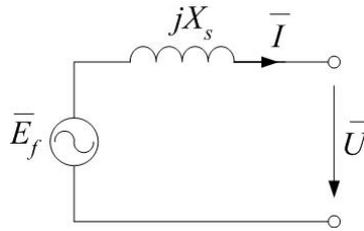


Figura 10.19. Circuito equivalente simplificado.

Assim, tem-se aproximadamente

$$\bar{E}_f = jX_s \bar{I} + \bar{U} \quad (10.28)$$

À equação 10.28 corresponde o diagrama vectorial por fase da figura 10.20.

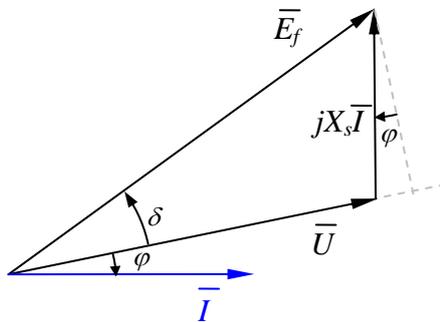


Figura 10.20. Diagrama vectorial.

Nesta figura estão definidos os ângulos φ e δ respectivamente como:

φ - ângulo entre \bar{U} e \bar{I}

δ - ângulo de potência ou de carga definido entre \bar{E}_f e \bar{U} .

Pode escrever-se

$$P = 3 UI \cos \varphi \quad (10.29)$$

$$Q = 3 UI \sin \varphi \quad (10.30)$$

Notando também que

$$X_s I \cos \varphi = E_f \sin \delta \quad (10.31)$$

e

$$X_s I \sin \varphi = E_f \cos \delta - U \quad (10.32)$$

tem-se

$$P = 3 \frac{E_f U}{X_s} \sin \delta \quad (10.33)$$

$$Q = 3 \frac{E_f U}{X_s} \cos \delta - \frac{3U^2}{X_s} \quad (10.34)$$

Admitindo desprezáveis as perdas na máquina, o binário fica:

$$M_{em} = \frac{P}{\omega_{syn}} = \frac{p}{\omega} P \quad (10.35)$$

Assim,

$$M_{em} = \frac{3p}{\omega} \frac{E_f U}{X_s} \sin \delta \quad (10.36)$$

Estando a máquina sob velocidade e excitação constantes, $E_f = cte$; a potência bem como o binário são funções sinusoidais do ângulo δ . Esta variação encontra-se representada na figura 10.21.

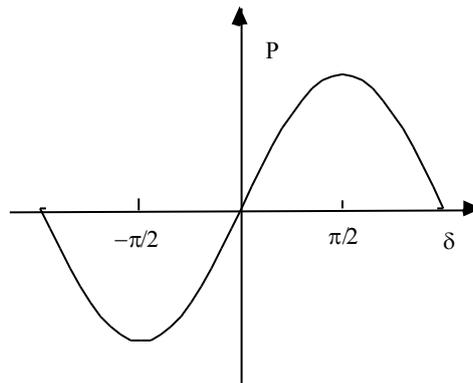


Figura 10.21. Potência activa em função de δ .

Para que a máquina tenha um funcionamento estável, deverá ter-se:

$$-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2} \quad (10.37)$$

Além disso pode concluir-se:

$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ Funcionamento gerador, pois $\sin \delta > 0 \quad P > 0$

$-\frac{\pi}{2} < \delta < 0$ Funcionamento motor, pois $\sin \delta < 0 \quad P < 0$

10.4.2 Balanço energético

O balanço de potência, em funcionamento gerador, encontra-se representado na figura 10.22.

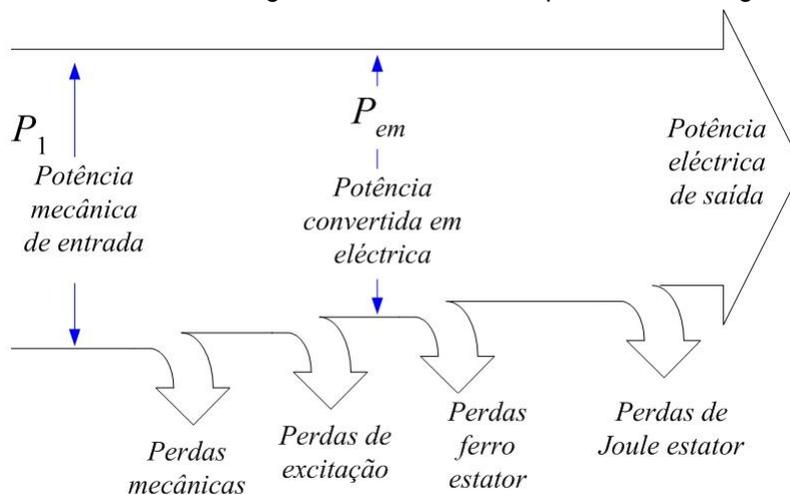


Figura 10.22. Balanço de potências em funcionamento gerador.

Em funcionamento motor, o diagrama de potência será o representado na figura 10.23.

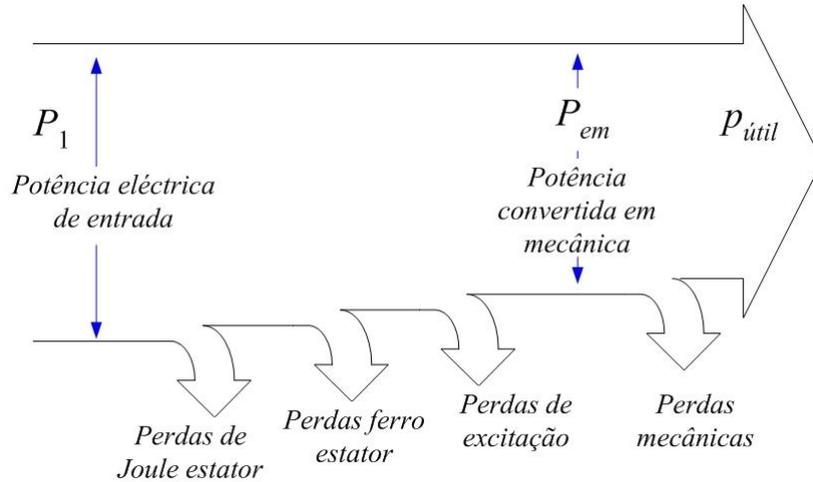


Figura 10.23. Balanço de potências em funcionamento motor.

10.4.3 Diagramas vectoriais em carga

As figuras 10.24 a 10.27 representam os diagramas vectoriais da máquina síncrona funcionando em paralelo com uma rede.

Estas figuras cobrem as 4 situações possíveis correspondentes aos 4 quadrantes do plano P, Q e das situações de funcionamento como compensador síncrono. Admite-se que a máquina se encontra em regime não saturado.

1. Gerador

A. Sobre-excitado

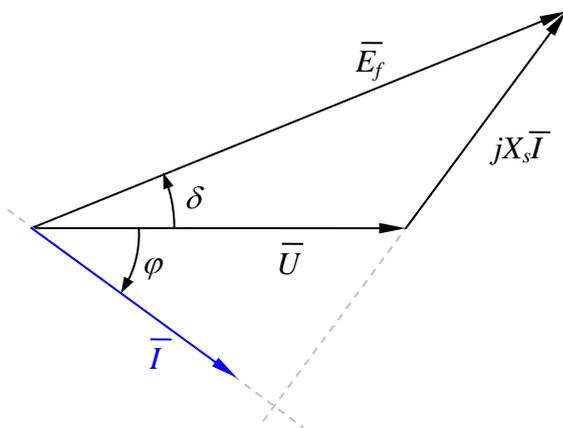


Figura 10.24. Diagrama vectorial ($P > 0$, $Q > 0$)

B. Sub-excitado

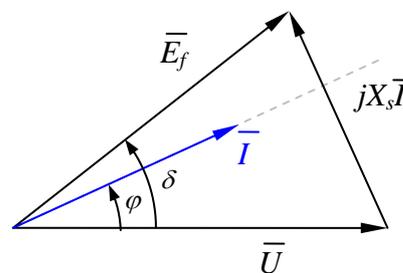


Figura 10.25. Diagrama vectorial ($P > 0$, $Q < 0$)

2. Motor

1. Sub-excitado

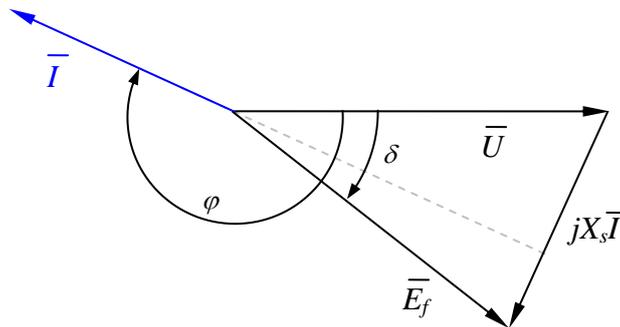


Figura 10.26. Diagrama vectorial ($P < 0$, $Q < 0$)

2. Sobre-excitado

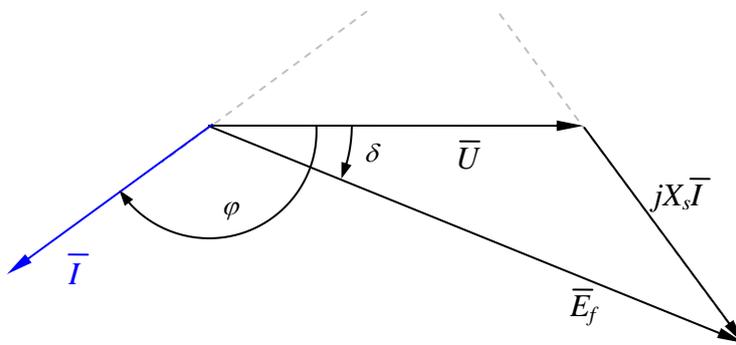
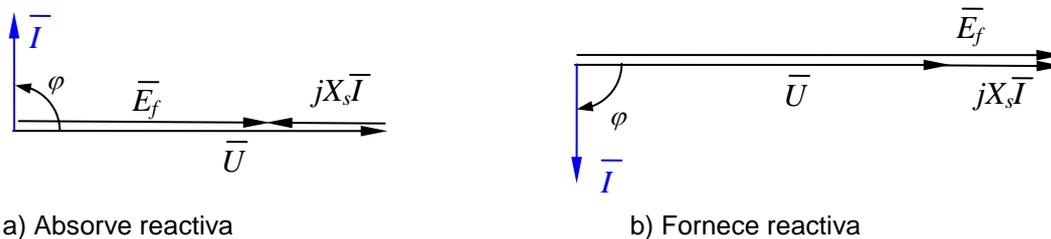


Figura 10.27. Diagrama vectorial ($P < 0$, $Q > 0$)

10.4.4 Funcionamento como compensador síncrono

Suponha-se que é nula a potência trocada entre a máquina e o exterior no veio, ou seja, é nula a potência mecânica útil em jogo. Nestas condições, a máquina recebe através da rede uma potência que equilibra as perdas mecânicas, magnéticas e por efeito de Joule no induzido. Actuando na corrente de excitação, pode regular-se a potência reactiva trocada com a rede, em funcionamento gerador ou motor. A máquina funcionará como compensador síncrono (figura 10.28).



a) Absorve reactiva

b) Fornece reactiva

Figura 10.28. Funcionamento como compensador síncrono.

EXEMPLO 10.1

Um alternador trifásico tem as seguintes características nominais:

$$S_N = 20.6 \text{ MVA}, \quad \cos\varphi_N = 0,9 \text{ (sobreexcitado)}, \quad U_N = 3,6 \text{ kV}$$

$$I_N = 3304 \text{ A}, \quad i_{fN} = 514 \text{ A}, \quad N = 3000 \text{ rpm}, \quad p = 1$$

Considere que esta máquina funciona sempre em regime não saturado.

Os ensaios em vazio e em curto-circuito conduziram aos gráficos da figura representada abaixo.

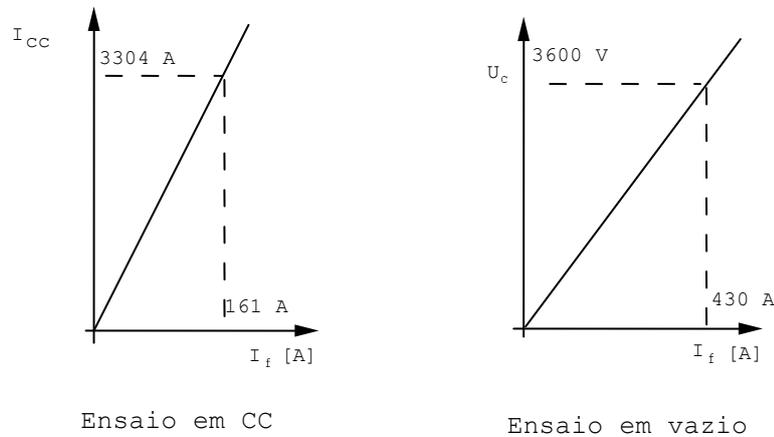


Figura 10.29. Resultados do ensaio em vazio e em curto-circuito.

- a) Calcule a reactância síncrona.
- b) Com a tensão nominal aos terminais e a corrente nominal nos enrolamentos do estator, calcule o valor da corrente de excitação de modo a que se tenha: $\cos\phi=0.9$ ind/ 1/ 0.9 cap
- c) Com a corrente de excitação igual a 500 A, calcule a tensão aos terminais da máquina quando alimenta:
 - c.1) Uma carga constituída por 3 impedâncias de valor óhmico igual a $0,63 \Omega$ e factor de potência $\cos\phi=0,8$ ind.
 - c.2) Uma carga tal que a corrente no estator seja de 3000 A com $\cos\phi=0,9$ ind.
 - c.3) Determine o regime para o qual $\Delta U=0$ quando a corrente do induzido e do circuito de excitação forem iguais aos valores nominais.

Resolução

a) As características em vazio e em curto-circuito podem ser escritas na forma:

$$U_{c0} = E_{cf} = \frac{3600}{430} i_f \quad I_{cc} = \frac{3304}{161} i_f$$

A impedância síncrona será calculada a partir das características em vazio e em curto-circuito. Assim, sendo U_s o valor da tensão simples, para o mesmo valor da corrente de excitação, tem-se:

$$Z_s = \frac{U_{s0}(I_f)}{I_{cc}(I_f)} = \frac{3600}{\sqrt{3}} \frac{161}{430 \cdot 3304} = 0,236 \Omega$$

Nota: A impedância síncrona nas máquinas de potência elevada é

aproximadamente igual à sua reactância síncrona visto que os valores das resistências dos enrolamentos são desprezáveis.

b) Para cada um dos 3 casos conhece-se o valor da tensão, da corrente e do ângulo entre os vectores correspondentes.

A equação vectorial será:

$$\bar{E}_f = \bar{U} + jX_s\bar{I} \quad \text{com} \quad X_s I = 0,236 \times 3304 = 780 \text{ V}$$

Para estes 3 casos, apenas o ângulo de desfasagem é diferente.

Obtém-se os seguintes diagramas vectoriais

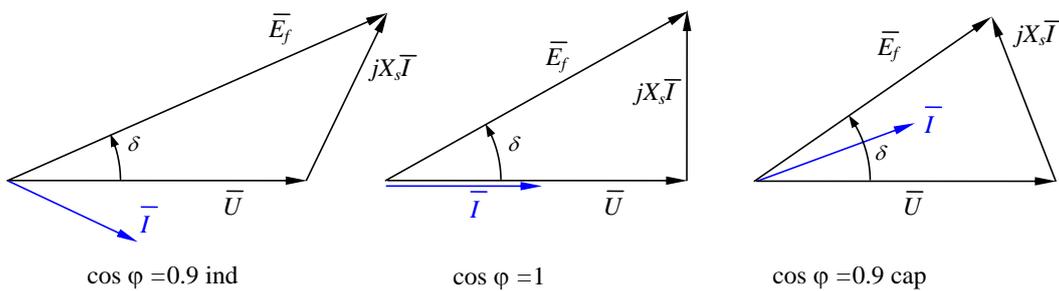


Figura 10.30. Diagramas vectoriais.

$$\cos \varphi = 0,9 \Rightarrow \varphi = 25.84^\circ$$

Substituindo na equação vectorial $\bar{E}_f = \bar{U} + jX_s\bar{I}$, tendo em atenção os ângulos da corrente, obtém-se:

$$\cos \varphi = 0,9 \text{ ind} \rightarrow \bar{E}_f = 2418 + j702 \rightarrow E_{fS} = 2518 \text{ V} \rightarrow E_{fC} = 4362 \text{ V}$$

$$\cos \varphi = 1 \rightarrow \bar{E}_f = 2079 + j780 \rightarrow E_{fS} = 2220 \text{ V} \rightarrow E_{fC} = 3845 \text{ V}$$

$$\cos \varphi = 0,9 \text{ cap} \rightarrow \bar{E}_f = 1739 + j702 \rightarrow E_{fS} = 1875 \text{ V} \rightarrow E_{fC} = 3247 \text{ V}$$

Da característica em vazio, conhecendo E_f , tiram-se os valores das correntes de excitação usando a característica em vazio.

$$\cos \varphi = 0,9 \text{ ind} \rightarrow E_{fC} = 4362 \text{ V} \rightarrow i_f = 516 \text{ A}$$

$$\cos \varphi = 1 \rightarrow E_{fC} = 3845 \text{ V} \rightarrow i_f = 458 \text{ A}$$

$$\cos \varphi = 0,9 \text{ cap} \rightarrow E_{fC} = 3247 \text{ V} \rightarrow i_f = 387 \text{ A}$$

c) Quando a corrente de excitação for 500 A, $E_{fC}=4176 \text{ V}$ ou $E_{fS}=2410 \text{ V}$

c.1) O circuito equivalente será:

$$\cos \varphi = 0,8 \Rightarrow \varphi = 36.87^\circ$$

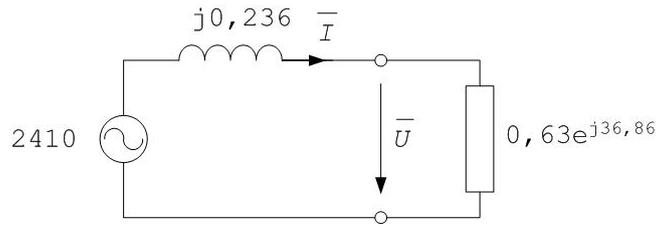


Figura 10.31. Circuito equivalente.

A impedância total será:

$$\bar{Z}_t = 0,63 \times (0,8 + j0,6) + j0,236 = 0,504 + j0,614 \Omega$$

A corrente será:

$$\bar{I} = \frac{2410}{0,504 + j0,614} = 1925 - j2345 \text{ A} = 3034e^{-j50,6^\circ}$$

o valor da tensão aos terminais será:

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I} = 0,63(0,8 + j0,6)(1925 - j2345) = 1857 - j454 \text{ V}$$

$$\rightarrow U_s = 1911 \text{ V} \quad \rightarrow U_c = 3,31 \text{ kV}$$

c.2) Neste caso $I=3000 \text{ A}$. A $\cos\varphi=0,9$ corresponde $\sin\varphi=0,436$. O diagrama vectorial será:

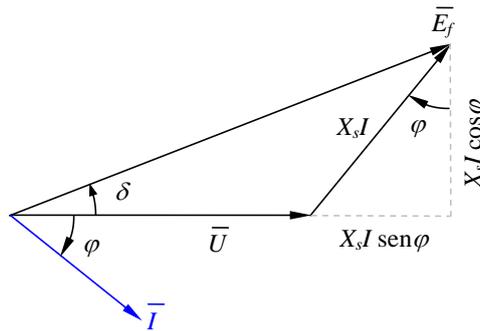


Figura 10.32. Diagrama vectorial.

Com base no triângulo representado na figura 10.32, tira-se a equação:

$$X_s I = 780 \text{ V}$$

$$(U + X_s I \sin \varphi)^2 + (X_s I \cos \varphi)^2 = E_f^2$$

$$(U + 780 \times 0,436)^2 + (780 \times 0,9)^2 = 2410^2$$

$$U = 2016 \text{ V} \quad \rightarrow \quad U_c = 3,5 \text{ kV}$$

c.3)

$$\text{Como } i_f = i_{fN} \quad \rightarrow \quad E_f = \frac{3600}{\sqrt{3} \cdot 430} 514 = 2485 \text{ V}$$

Como se impõe $\Delta U = 0$, tem-se $E_f = U = 2485 \text{ V}$.

Em funcionamento gerador obtém-se o diagrama vectorial.

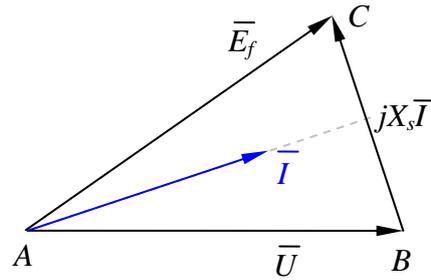


Figura 10.33. Diagrama vectorial.

Conhece-se o valor dos 3 lados do triângulo ABC. O ângulo δ será dado por:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{X_s I}{2E_f} \quad \rightarrow \quad \delta = 18^\circ$$

O ângulo φ será igual a $\delta/2$ ou seja 9° capacitivo.

10.4.5 Funcionamento como gerador (ou alternador)

Suponha-se a máquina síncrona em paralelo com uma rede de potência infinita numa condição tal que a máquina motriz forneça exactamente as perdas totais da máquina síncrona. Considere-se também que a corrente de excitação da máquina é tal que o vector que representa a força electromotriz em vazio tem o mesmo módulo que o vector que representa a tensão aos terminais da máquina. Atendendo a que a potência é nula, os dois vectores atrás referidos encontram-se em fase como se representa na figura 10.34.

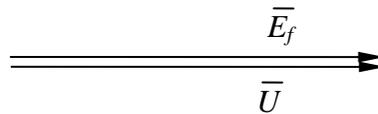


Figura 10.34. Diagrama vectorial com $I = 0$.

Nestas condições, a máquina não troca energia com o exterior através dos terminais do induzido. Dado o esquema equivalente da máquina, pode concluir-se que a corrente que atravessa os enrolamentos do induzido é nula.

Suponha-se que, muito lentamente, se aumenta a potência mecânica fornecida pela máquina motriz. Este “excesso” de potência traduz-se por um binário acelerador que vai fazer girar o rotor a uma velocidade ligeiramente superior fazendo avançar o vector E_f em relação a U e portanto, fazer aumentar o ângulo δ . Nestas condições circulará uma corrente no induzido cujo valor pode ser calculado pela expressão 10.38.

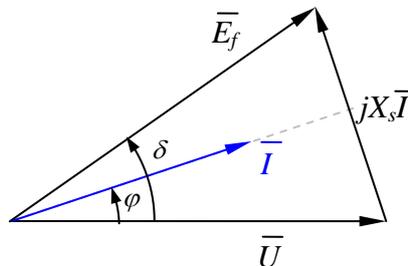


Figura 10.35. Diagrama vectorial.

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}_f - \bar{U}}{jX_s} \quad (10.38)$$

e a máquina entregará uma potência P à rede dada por:

$$P = \frac{3UE_f}{X_s} \sin \delta \quad (10.39)$$

Obtém-se um ângulo de equilíbrio tal que a potência mecânica que recebeu P seja igual à potência que entrega à rede.

Desde que as modificações sejam suficientemente lentas, o alternador poderá fornecer qualquer potência eléctrica à rede (excluindo as perdas) até ao limite correspondente a $\delta=90^\circ$, ou seja:

$$P_{\max} = \frac{3UE_f}{X_s} \quad (10.40)$$

Note-se que este valor máximo depende de E_f e portanto da corrente de excitação.

Do que ficou dito, pode concluir-se que, para regular a potência numa máquina síncrona em paralelo com uma rede infinita, basta actuar na máquina motriz que lhe fornece potência mecânica. Esta operação faz-se, nas centrais hidroeléctricas, abrindo ou fechando uma peça, o distribuidor, que vai fazer aumentar ou diminuir o caudal que atravessa a turbina e portanto o binário fornecido à máquina eléctrica.

Mantendo-se inalterada a característica da máquina motriz, ou seja, mantendo-se inalterada a potência recebida pelo alternador, à parte as perdas mecânicas, no ferro e no cobre, mantém-se inalterada a potência entregue à rede.

10.4.5.1 As curvas em V em funcionamento gerador

Estas curvas são traçadas mantendo constante a potência fornecida à rede e fazendo variar a corrente de excitação. A figura 10.36 ilustra a variação dos diagramas vectoriais quando se varia a força electromotriz E_f .

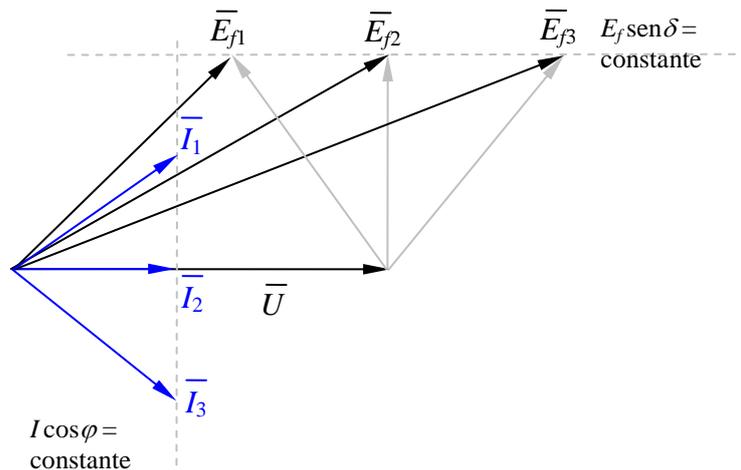


Figura 10.36. Diagramas vectoriais com P constante.

Para que a potência fornecida à rede seja constante, é necessário que para os 3 casos se tenha $E_f \sin \delta = cte$. Além disso, tem-se também $I \cos \varphi = cte$.

O facto da potência se manter constante tem como consequência que o vector E_f se vai encontrar sobre uma recta. Também a corrente se encontra sobre uma recta pois $I \cos \varphi = cte$.

Da figura 10.36, pode verificar-se que, à medida que se varia a corrente de excitação de um valor baixo até a um valor elevado, a corrente no induzido começa por ser elevada, vai baixando, atinge um mínimo e depois volta a subir. Descreverá a letra V. A figura 10.37 representa as curvas em V.

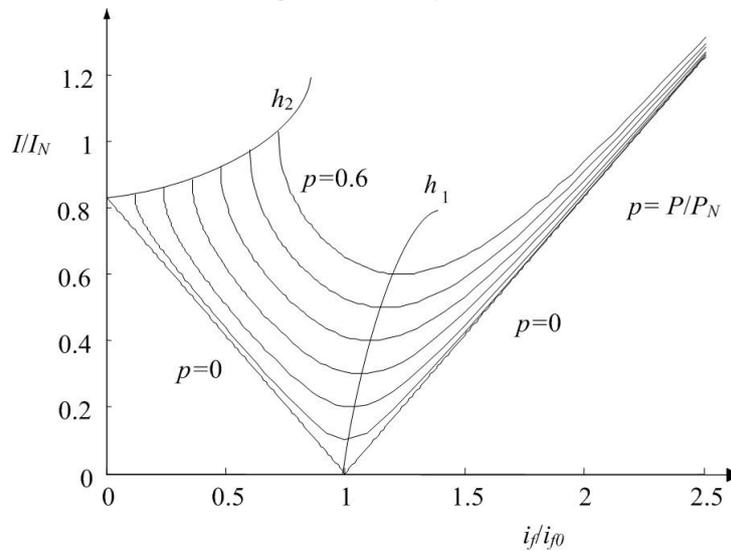


Figura 10.37. Curvas em V com P relativos à potência nominal.

A variação da corrente trocada com a rede traduz-se por uma variação de potência reactiva. Assim, actuando na excitação faz-se variar a força electromotriz em vazio e portanto a potência reactiva.

Conclusão:

- Para regular a potência activa — actua-se na potência fornecida no veio
- Para regular a potência reactiva — actua-se na corrente de excitação.

10.4.6 Funcionamento como motor

Suponha-se uma máquina síncrona de pólos lisos em paralelo com uma rede de potência infinita num estado semelhante ao estado de partida que se considerou no raciocínio da alínea anterior.

$$\bar{U} = \bar{E}_f$$

Nestas condições a corrente trocada com a rede é nula e portanto são nulas também a potência activa e reactiva. Por sua vez, a potência entregue à máquina pelo veio (potência mecânica) vai contrabalançar as perdas no ferro e as perdas mecânicas.

Suponha-se agora que se vai diminuindo a potência mecânica lentamente de modo o que esta se torne negativa: passa-se a pedir potência mecânica ao veio. A diminuição de potência entregue ao veio traduz-se por uma aceleração negativa e o rotor diminui ligeiramente de velocidade fazendo com que o vector \bar{E}_f se atrase ligeiramente em relação a \bar{U} . O facto do vector \bar{E}_f se atrasar em relação a \bar{U} traduz-se por uma diferença vectorial $\bar{U} - \bar{E}_f$ não nula e portanto vai aparecer uma corrente trocada com a rede. Esta situação está ilustrada na figura 10.38.

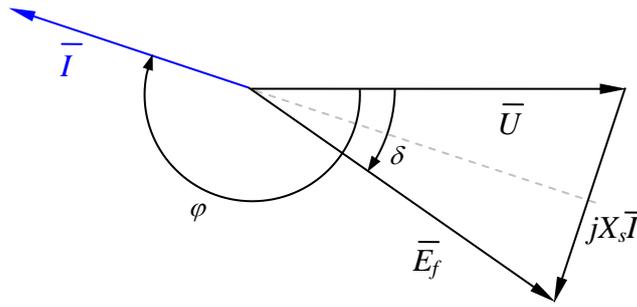


Figura 10.38. Diagrama vectorial em funcionamento como motor.

Ao ângulo δ negativo corresponde um a potência eléctrica pedida à rede (eq. 10.39) negativa.

O estado de equilíbrio é atingido quando a potência que a máquina pedir à rede for igual à potência mecânica no veio subtraídas as perdas que agora são mecânicas, magnéticas e por efeito de Joule no induzido. Quanto maior for a potência mecânica pedida, maior será o ângulo δ até um limite de $\delta = 90^\circ$ a que corresponde

$$P_{\max} = \frac{3UE_f}{X_s}$$

Também nesta situação a potência máxima depende da força electromotriz em vazio.

Tal como no funcionamento gerador, também no funcionamento motor a potência activa trocada com a rede não depende o estado de excitação da máquina. Assim, quando se pretender pedir mais energia à rede, é necessário actuar na carga. Isto resulta do funcionamento síncrono da máquina. Sendo a velocidade constante, para se actuar na potência mecânica tem-se, por força, que actuar no binário.

A variação da corrente de excitação vai traduzir-se apenas por uma variação de potência reactiva.

10.4.6.1 Curvas em V em funcionamento motor

Também é possível traçar as curvas em V em funcionamento motor. Quando um motor síncrono, alimentado sob uma tensão constante, funcionar a potência constante, isto é, sob binário de carga constante, é possível modificar a potência reactiva trocada com a rede actuando sobre a corrente de excitação i_f .

A figura 10.39 mostra, na convenção gerador, os vários diagramas vectoriais que se obtêm quando se varia a corrente de excitação e se mantêm a potência constante.

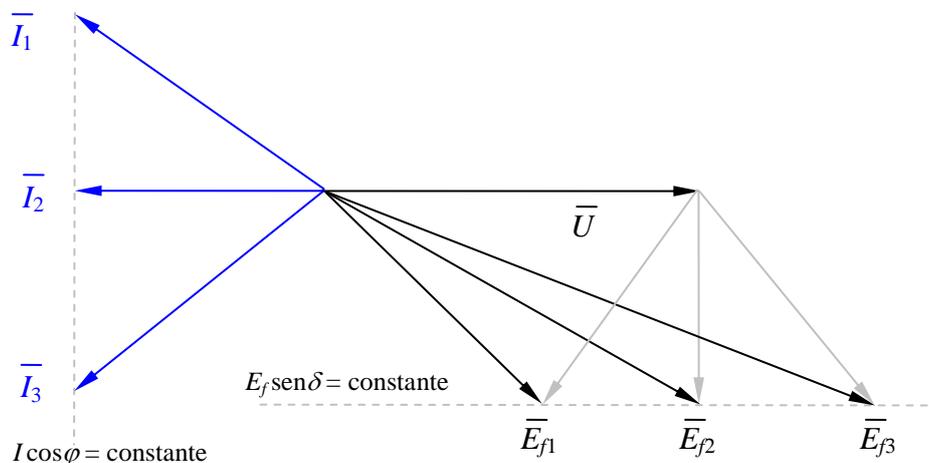


Figura 10.39. Diagrama vectorial em funcionamento como motor com P constante.

Como a potência P é constante, e sendo U e X_s constantes, $E \text{ sen} \delta$ é constante e por consequência o lugar das extremidades do vector \bar{E}_f é uma recta paralela a U .

Como a potência activa é constante, também a componente activa de corrente será constante. Assim, o lugar geométrico da corrente também será uma recta e neste caso é perpendicular ao vector \bar{U} .

Na situação 1 (figura 10.39) a corrente ($-I_1$) está em atraso em relação a U . A máquina absorve potência reactiva e encontra-se sub-excitada. Aumentando a excitação, E_f aumenta e a corrente começa a diminuir. No ponto 2 obtém-se o menor valor da corrente. A este valor corresponde um factor de potência unitário. A corrente está em fase com a tensão e a potência reactiva é nula. Continuando a aumentar a excitação, a força electromotriz E_f aumenta e obtém-se o ponto 3. A corrente ($-I_3$) está agora em avanço em relação a \bar{U} . Nesta situação, o motor fornece potência reactiva à rede apesar de continuar a absorver a mesma potência activa.

Representando-se num gráfico a corrente no induzido em função da corrente de excitação para vários valores de potência (constante) obtém-se curvas em V semelhantes às representadas na figura 10.37.

a) Em cada curva, um ponto situado à direita do mínimo corresponde a uma corrente em atraso em relação à tensão ($\text{sen} \varphi > 0$) e um ponto situado à esquerda do mínimo corresponde a uma corrente em avanço em relação à tensão ($\text{sen} \varphi < 0$) à tensão.

b) Os mínimos de cada curva ($\cos \varphi = 1$) estão colocados sob uma hipérbole que representa o lugar geométrico dos mínimos da corrente absorvida para diferentes valores de potência de carga P_0 .

Com efeito, quando o factor de potência for unitário, tem-se o diagrama vectorial representado na figura 10.40.

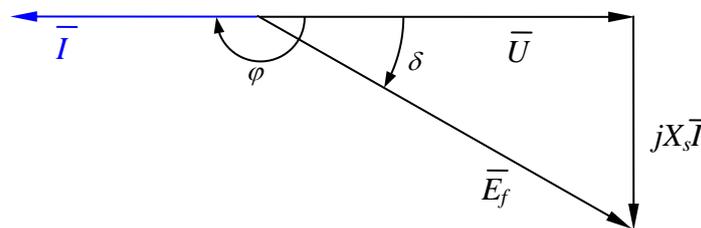


Figura 10.40. Diagrama vectorial com factor de potência unitário em funcionamento motor.

e tem-se:

$$E_f^2 = U^2 + (X_s I)^2 \quad (10.41)$$

o que é o mesmo que

$$\frac{E_f^2}{U^2} - \frac{(X_s I)^2}{U^2} = 1 \quad (\text{hipérbole } h_1) \quad (10.42)$$

c) Existe um limite de estabilidade do lado esquerdo das curvas devido ao facto do ângulo δ não poder ser superior a 90° . Este limite de estabilidade está representado pela hipérbole h_2 . Com efeito nesta situação tem-se o diagrama vectorial da figura 10.41.

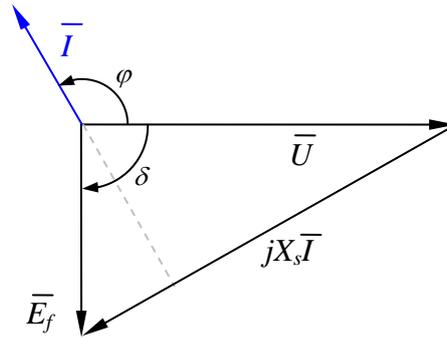


Figura 10.41. Diagrama vectorial no ponto crítico de estabilidade.

donde

$$E_f^2 + U^2 = (X_s I)^2 \quad (10.43)$$

ou

$$\frac{(X_s I)^2}{U^2} - \frac{E_f^2}{U^2} = 1 \quad (\text{hipérbole } h_2) \quad (10.44)$$

EXEMPLO 10.2

Um motor síncrono tem as seguintes características:

"1.6 MW - 3fases - Δ - 2300 V - 50 Hz - 20 pólos lisos"

Este motor tem uma resistência de induzido desprezável e uma "reactância síncrona" por fase $X_s = 4 \Omega$. Debita uma potência mecânica constante e igual sua potência nominal.

a) Ajusta-se a corrente de excitação i_f do indutor de modo que a corrente consumida pelo motor seja mínima. Calcular:

1. O valor desta corrente mínima I por fase.
2. O valor da f.e.m. E_f por fase.

b) Modifica-se a corrente de excitação i_f do indutor de modo que a corrente consumida esteja desfasada de 30° em avanço em relação à tensão U ($\cos\phi=0,866$). Calcular:

1. O novo valor I' da corrente consumida por fase.
2. O novo valor E'_f da f.e.m. por fase
3. A potência reactiva total Q que o motor fornece à rede.

Resolução:

a) Quando a corrente do induzido for mínima, o factor de potência será unitário. Assim:

$$1. \quad P = \sqrt{3}U_c I_L \rightarrow I_L = \frac{P}{\sqrt{3}U_c} = \frac{1,6 \times 10^6}{\sqrt{3}2300} = 400 \text{ A}$$

o enrolamento será percorrido por $I_L / \sqrt{3} = 230 \text{ A}$.

2. O diagrama vectorial das tensões toma a forma de um triângulo

rectângulo como se pode ver na figura.

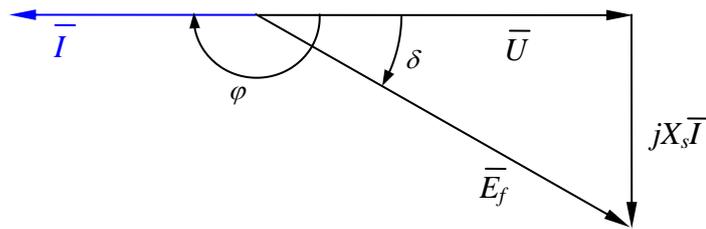


Figura 10.42. Diagrama vectorial.

Donde

$$E_f^2 = U^2 + (X_s I)^2$$

ou seja

$$E_f^2 = 2300^2 + (4 \times 230)^2 \text{ donde } E_f = 2479 \text{ V}$$

O valor da força electromotriz E_f por fase será 2479 V

b) O novo diagrama vectorial será agora:

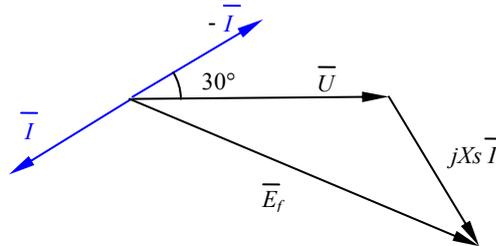


Figura 10.43. Diagrama vectorial.

1. O novo valor da corrente será:

$$P = \sqrt{3} U_c I \cos \varphi \quad \rightarrow \quad I = \frac{P}{\sqrt{3} U_c \cos \varphi}$$

$$I = 464 \text{ A} \quad I_{\text{fase}} = 268 \text{ A}$$

2. Atendendo ao diagrama vectorial acima, pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_f &= \bar{U} + jX_s \bar{I} = 2300 - j4 \times 268 e^{j30} = 2300 - j928 + 536 = 2836 - j928 \\ E_f &= 2984 \text{ V} \end{aligned}$$

3. A potência reactiva total fornecida pelo motor será:

$$Q = \sqrt{3} U_c I \sin \varphi = \sqrt{3} 2300 \times 464 \sin 30^\circ = 925 \text{ kvar}$$

10.4.7 Diagrama de Potências

Suponha-se que a máquina se encontra a funcionar em regime equilibrado e que se encontra não saturada. Suponha-se também que a resistência dos enrolamentos do induzido é desprezável e que a máquina se encontra em paralelo com uma rede de potência infinita. Nestas condições a frequência e a tensão aos terminais da máquina são mantidas constantes.

Como a potência activa P é proporcional a $I \cos \varphi$ e a potência reactiva a $I \sin \varphi$, obtêm-se na figura 10.44 dois segmentos proporcionais respectivamente à potência activa e reactiva. Tem-se:

$$AB = X_s I \cos \varphi = \frac{X_s}{3U} P \quad (10.45)$$

$$AC = X_s I \sin \varphi = \frac{X_s}{3U} Q \quad (10.46)$$

Como X_s e U são constantes, pode concluir-se que o segmento AB é proporcional à potência activa e que o segmento AC é proporcional à potência reactiva. A corrente I nos enrolamentos é proporcional ao segmento AD e o ângulo φ de defasagem entre a tensão e a corrente é igual ao ângulo entre os segmentos AD e AB.

O funcionamento da máquina pode ser representado por um diagrama do tipo do indicado na figura 10.44 que se refere a uma tensão igual à tensão nominal.

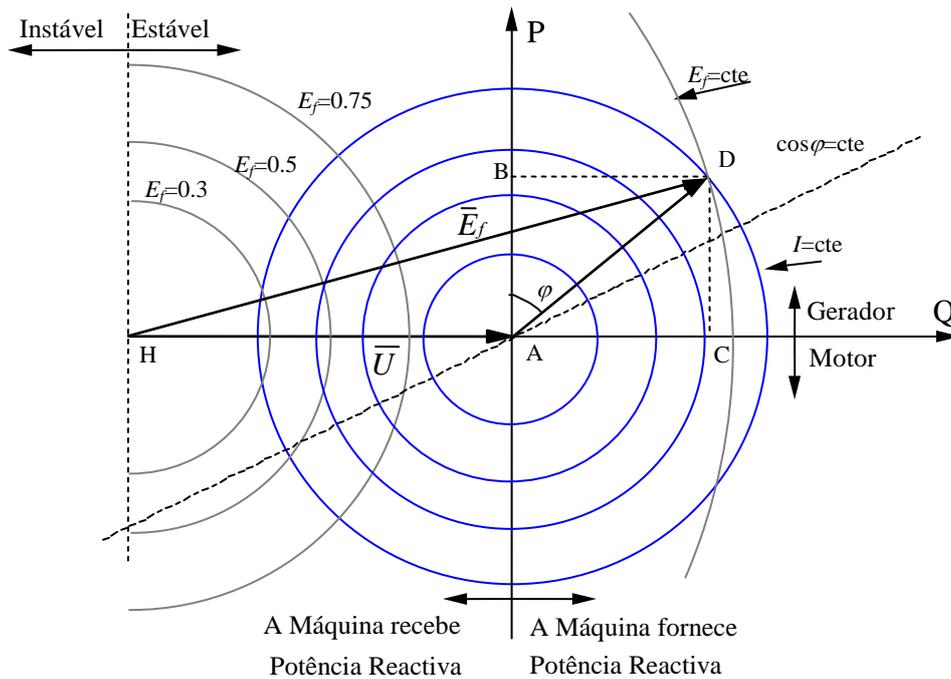


Figura 10.44. Diagrama de potências da máquina síncrona.

Tem-se:

- 1) O lugar geométrico dos pontos correspondentes a corrente de excitação constante (força electromotriz constante) é uma circunferência de centro em H. Estas estão representadas a cinzento na figura 10.44.
- 2) O lugar geométrico dos pontos correspondentes a corrente no induzido constante é uma circunferência de centro em A (representadas a azul na figura 10.44).
- 3) O lugar geométrico dos pontos correspondentes a factor de potência constante é uma recta passando por A.

Neste diagrama está ainda representado o domínio de funcionamento que corresponde a um funcionamento estável para pequenas perturbações, no caso de funcionamento em paralelo com uma rede de potência infinita.

10.4.8 As curvas limite da máquina síncrona.

Para regimes aproximadamente uniformes e de muito longa duração, o domínio de funcionamento da máquina, com frequência e tensão iguais aos valores nominais, é condicionado, em primeira aproximação, nos casos normais pelos seguintes factores:

- a) A corrente do induzido (responsável pelas perdas de Joule no estator) não deve exceder os valores nominais.
- b) A corrente no enrolamento indutor (responsável pelas perdas de Joule no rotor) não deve exceder o valor correspondente aos valores nominais.
- c) A máquina deve funcionar dentro do domínio de estabilidade.
- d) Não devem ser excedidas limitações de carácter mecânico quanto à potência mecânica no veio, por exemplo, no caso do alternador, não deve ser excedida a potência máxima que a máquina motriz pode fornecer.

Estas condições conduzem às curvas limite representadas na figura 10.45.

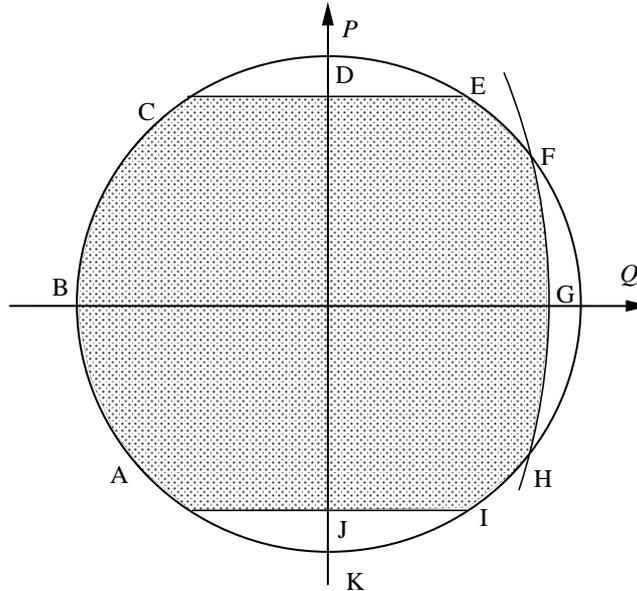


Figura 10.45. Curvas limite da Máquina Síncrona.

A limitação ABC, Ef e HI corresponde à condição de não ser excedida a corrente nominal do induzido.

A limitação CDE corresponde a não ser excedida a potência máxima que a máquina motriz pode fornecer. Está-se no caso em que a máquina síncrona funciona como gerador.

A limitação FGH corresponde a não ser excedida a corrente de excitação.

A limitação IJA corresponde ao máximo que a carga eventualmente poderá receber. Está-se no caso em que a máquina síncrona funciona como motor.

Nem sempre as curvas atrás referidas são limitativas. Por exemplo, na hipótese de não existir a limitação da potência da carga e de o veio do rotor estar para isso dimensionado, o domínio de funcionamento será ABCDEFGIA.

Deve notar-se que estas limitações não têm carácter absoluto. Por exemplo, as limitações correspondentes aos troços ABC e EFG correspondem a que as perdas por efeito de Joule em determinadas zonas da máquina não excedam as perdas em condições nominais. No entanto, se as condições de refrigeração forem mais favoráveis que as condições nominais, é possível exceder essas limitações sem que se excedam os limites convenientes de funcionamento. Por outro lado, dada a inércia térmica da máquina, não há inconveniente em que estas limitações sejam excedidas durante períodos não muito longos.

10.5 Exercícios

10.1. Para a realização de conversores de frequência rotativos usaram-se no passado duas máquinas

síncronas acopladas pelo veio. A primeira funciona como motor convertendo energia sob forma de corrente alternada de frequência 50Hz para energia mecânica. A segunda funcionando como gerador convertendo energia mecânica em energia eléctrica com a frequência que se pretender. A variação de frequência é obtida usando máquinas com número de pólos diferentes. Pretende obter-se uma fonte de 400Hz a partir de uma rede de 50Hz.

- Qual a relação de número de pólos entre ambas as máquinas.
- Será que este sistema pode ser reversível podendo inverter o sentido da potência.
- Refira-se ao controlo de potência reactiva em ambas as máquinas.

Solução: a) Relação = 8 b) É reversível c) A potência reactiva pode ser ajustada de ambos os lados independentemente um do outro.

10.2. Dois alternadores trifásicos idênticos de 60 MVA, 17,5 kV, 50 Hz, encontram-se ligados em paralelo e fornecem à rede uma potência total de 80 MW com $\cos\varphi=0.8$ e $\sin\varphi=0.6$. A sua reactância síncrona vale 5,26 Ω e a sua resistência estatórica é desprezável.

Determine a potência aparente, a corrente, a força electromotriz em vazio, o $\cos\varphi$ e o ângulo de carga δ de cada máquina, quando a potência activa se encontrar repartida igualmente entre estas duas máquinas. Sabe-se que uma das máquinas tem uma corrente de excitação a que corresponde uma força electromotriz em vazio igual a 17,68 kV (Tensão simples).

Solução:

$$(S_1 = 53,5 \text{ MVA} \quad I_1 = 1764,7 \text{ A} \quad E_{f1} = 30,63 \text{ kV (composta)} \quad \cos\varphi_1 = 0,748 \quad \delta_1 = 0,4 \text{ rad}$$

$$S_2 = 46,9 \text{ MVA} \quad I_2 = 1548 \text{ A} \quad E_{f2} = 27,62 \text{ kV (composta)} \quad \cos\varphi_2 = 0,85 \quad \delta_2 = 0,45 \text{ rad})$$

10.3. Um alternador trifásico, de reactância síncrona igual a 8 Ω , é percorrido por uma corrente de induzido de 200 A sob um factor de potência unitário e tensão de 11 kV.

- Mantendo constante a potência mecânica, aumenta-se de 30% a corrente de excitação. Determinar os novos valores de corrente e de factor de potência.
- Sem modificar a excitação aumenta-se gradualmente a potência mecânica até à perda de sincronismo. A que potência se efectuará a perda de sincronismo?
- Mantendo constante a potência mecânica da turbina, determine o valor máximo de potência reactiva que a máquina pode absorver da rede.

Solução:

$$\text{a) } I=353 \text{ A} \quad \cos\varphi=0,737 \quad \text{b) } P_{\max}=15,6 \text{ MW} \quad \text{c) } Q_{\max}= 15,13 \text{ MVAR}$$

Capítulo 11 Máquinas de Corrente Contínua

11.1 Introdução às máquinas de corrente contínua.

11.1.1 Definição

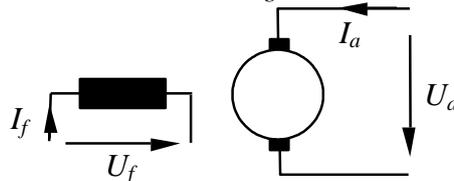
Diz-se que uma máquina eléctrica é de corrente contínua, quando são unidireccionais as grandezas que a caracterizam (tensões e correntes) em todos os seus terminais. Neste capítulo estuda-se a máquina de corrente contínua clássica, isto é, a máquina de corrente contínua de colectores mecânicos. O desenvolvimento da electrónica de potência tornou possível também a existência de outras máquinas da corrente contínua em que o colectores é realizado electronicamente.

11.1.2 Representação esquemática

Nos esquemas eléctricos, as máquinas de corrente contínua são representadas por símbolos normalizados. Na figura 11.1 apresentam-se os símbolos utilizados em esquemas unifilares. O símbolo mais utilizado, em esquemas com mais pormenor, é aquele que se apresenta na figura 11.1b.



a) Símbolos de um motor e de um gerador de corrente contínua.



b) Representação de uma máquina de corrente contínua (convenção motor).

Figura 11.1. Símbolos usados para representar a máquina de corrente contínua.

A máquina é constituída por dois enrolamentos essenciais: o enrolamento de excitação “f”, que se destina a criar um campo de indução magnética intenso, e o enrolamento do induzido “a”, onde a energia eléctrica é convertida em energia mecânica e vice-versa.

Na realidade, a máquina de corrente contínua é uma máquina de corrente alternada dotada de um conversor de "corrente contínua - corrente alternada" ou vice-versa. Este conversor é realizado por um sistema mecânico designado por colectores ou comutador sob o qual assentam escovas. O colectores e escovas fazem parte do circuito induzido e normalmente este conjunto é representado por dois pequenos rectângulos sobre uma circunferência como se indica na figura 11.1b.

11.2 Constituição das máquinas de corrente contínua.

Tal como as outras máquinas eléctricas rotativas, a máquina de corrente contínua é constituída por duas partes principais:

- uma parte fixa, o estator, com funções de suporte que contém os pólos e enrolamentos indutores destinados à criação do fluxo indutor;
- uma parte móvel, designada por rotor, que contém duas peças essenciais: o enrolamento do induzido onde se processa a conversão de energia mecânica em eléctrica e vice-versa, e o colectores que constitui um

conversor mecânico de “corrente alternada-corrente contínua” ou vice-versa.

Entre o estator e o rotor encontra-se uma parte de ar que os separa: o entreferro.

A figura 11.2 apresenta uma fotografia de um modelo pedagógico de uma máquina de corrente contínua. Um corte esquemático de uma máquina de corrente contínua é apresentado na figura 11.3.

Para facilitar a interpretação não se representam o colector e as escovas e cada secção do induzido é representada apenas por um condutor.

Assim, são peças constituintes do estator:

- A carcaça (1), que suporta a máquina e que também serve para a circulação do fluxo indutor
- Os pólos indutores (2), ou pólos principais, que juntamente com os enrolamentos de excitação (3) criam o fluxo magnético indutor principal (o seu número é designado por $2p$).
- Os pólos auxiliares ou de comutação (4).
- Os enrolamentos de comutação (5).
- Os enrolamentos de compensação (6), destinados a reduzir o campo magnético provocado pelos enrolamentos do rotor.

São peças constitutivas do rotor:

- O núcleo do rotor (7). Tem a forma cilíndrica e é ranhurado no sentido do eixo.
- Os enrolamentos do induzido (8). São colocados nas ranhuras do núcleo do rotor.
- O colector. É constituído por lâminas de cobre isoladas umas das outras e colocadas na direcção do veio.

São ainda partes constitutivas, os rolamentos, as escovas e porta escovas, os ventiladores etc. A figura 11.4 apresenta uma fotografia do rotor de uma máquina de corrente contínua de pequena potência (inferior a 1 kW).



Figura 11.2 Modelo pedagógico de uma máquina de corrente contínua.

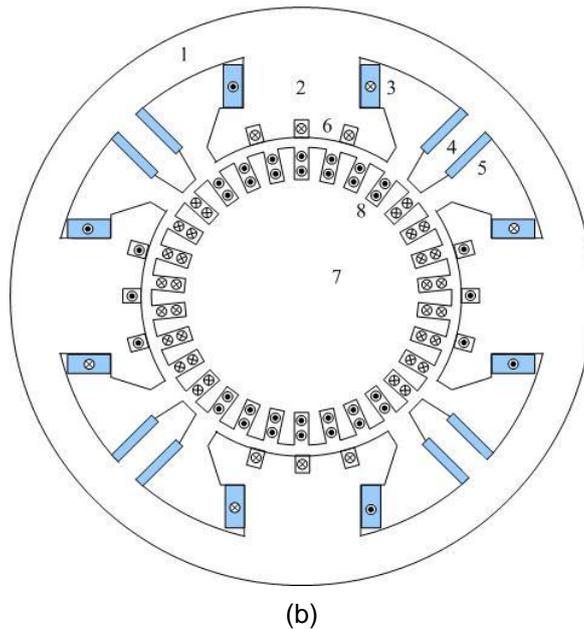


Figura 11.3. Corte transversal de uma máquina de corrente contínua.

Seguidamente far-se-á uma breve descrição das principais partes constitutivas das máquinas de corrente contínua.

Carcaça

A carcaça é a parte que sustenta os pólos da máquina e pela qual se faz a fixação. Dado que o fluxo magnético é constante, não é necessário que esta peça seja folheada para evitar as perdas por correntes de Foucault. Neste sentido pode ser fabricada em ferro fundido ou em aço.

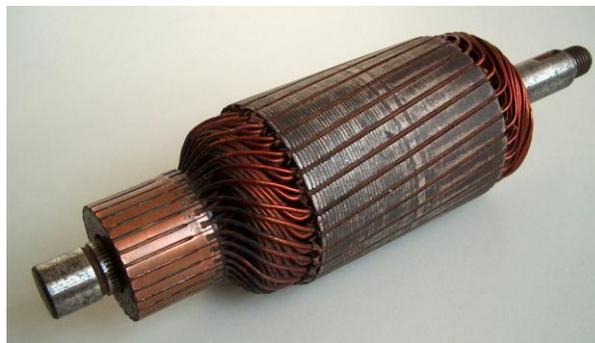


Figura 11.4. Rotor da máquina DC com coletor, enrolamentos do induzido e núcleo do induzido.

Pólos indutores

Os pólos indutores têm o aspecto que se pode ver na figura 11.4. A parte mais próxima do rotor designa-se por expansão polar. Estes pólos são construídos em chapa magnética empilhada para se reduzirem as correntes de Foucault pois estão sujeitos a campo de indução magnética variável.

Pólos auxiliares ou de comutação

Os pólos auxiliares são colocados entre os pólos principais. São constituídos por um núcleo em chapa magnética e por um enrolamento que se liga em série com o enrolamento do induzido.

Enrolamentos de compensação

Colocados em cavas nos pólos principais (figura 11.3), estes enrolamentos só existem nas máquinas de

potência elevada ($> 150 \text{ kW}$), pois encarecem a máquina de forma considerável. A sua acção será vista mais à frente.

Núcleo do induzido

O núcleo do induzido pode ser de dois tipos: em anel e em tambor. Os induzidos em anel já não são utilizados. Actualmente utilizam-se apenas induzidos em tambor feitos de chapa de aço magnético ranhurado (figura 11.4). Note-se que, visto do rotor, o campo de indução magnética tem uma frequência que poderá ser elevada. Esta frequência é proporcional à velocidade da máquina.

Enrolamentos do induzido

Os enrolamentos do induzido são constituídos por secções feitas em moldes e colocadas nas ranhuras do rotor. Estas secções são ligadas umas às outras e ao colectador.

Os enrolamentos em anel de Gramme (figura 11.5) foram os primeiros a serem inventados e hoje têm apenas interesse histórico ou pedagógico. Os enrolamentos em tambor ou Siemens substituíram os enrolamentos em anel devido ao facto de serem mais económicos. Pode demonstrar-se que um determinado enrolamento em tambor tem sempre um enrolamento em anel que lhe é equivalente. Assim, uma vez que é mais fácil de compreender, o enrolamento em anel será utilizado em algumas explicações que se seguirão mais à frente.

O enrolamento em anel executa-se sobre um anel de ferro colocando sobre ele um determinado número de espiras que se iniciam e terminam em lâminas adjacentes (figura 11.5) de forma que o enrolamento apresenta a forma de um circuito fechado.



Figura 11.5. Enrolamento em anel.

As espiras enroladas conforme a Figura 11.5 possuem um condutor interno e outro externo ao anel. Os condutores externos estão sujeitos ao campo de indução magnética B provocado pelo circuito indutor, e por isso, são sede de fenómenos de conversão electromecânica de energia. Estes condutores, quando forem percorridos por correntes, estão sujeitos à força de Laplace, e quando rodam a uma determinada velocidade, geram-se neles f.e.m. induzidas.

Os condutores internos do anel não participam nos fenómenos de conversão electromecânica de energia pois não estão sujeitos a nenhum campo magnético, a não ser o campo criado por eles próprios. Assim estes condutores são inactivos e têm a finalidade de ligar os condutores activos entre si.

Os condutores internos dos enrolamentos em anel, além de contribuírem para um aumento do peso e conseqüente aumento do volume e preço das máquinas, também aumentam a resistência eléctrica do induzido. Para evitar os inconvenientes mencionados recorre-se ao enrolamento induzido tipo tambor. Neste enrolamento os condutores externos encontram-se instalados em cavas, não existindo condutores internos.

O retorno da corrente de um condutor activo sob um determinado pólo é realizado por outro condutor activo noutra pólo de sinal contrário (figura 11.6).

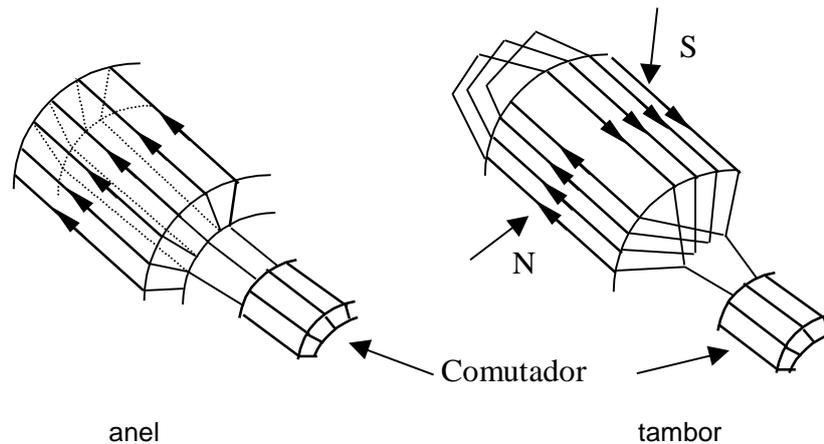


Figura 11.6. Princípio do enrolamento em tambor.

Colector

Geralmente o colector é realizado com lâminas de cobre isoladas. É torneado de modo a tomar uma forma rigorosamente cilíndrica permitindo que as escovas assentem perfeitamente.

A ligação aos condutores do enrolamento do induzido pode ser feita por soldadura ou por meio de ligadores apropriados.

O colector é realizado de forma diferente consoante a potência e a velocidade máxima admissível da máquina, e constitui a peça mais delicada e mais cara de toda a máquina.

Escovas e conjunto de suporte

A figura 11.7 mostra uma estrutura típica de escovas e seu conjunto de suporte. As escovas podem ser de diversos materiais (Carvão, Metal, etc.) e diversas tipos (macias, duras, etc.). A escova coloca-se no porta escovas, e é comprimida por meio de uma mola contra o colector. Esta compressão não deverá ser excessiva para evitar o desgaste rápido, bem como um aumento das perdas mecânicas da máquina (150 a 250 gf/cm²).

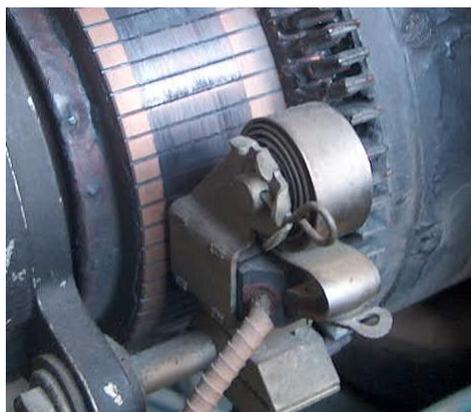


Figura 11. 7. Porta escovas e escovas.

Normalmente, os porta escovas podem deslocar-se em torno do colector de modo a permitir o ajuste da posição das escovas. Todas as escovas de igual polaridade são ligadas entre si por barras condutoras. Estas barras encontram-se ligadas aos terminais da máquina, ou vão directamente ligar-se aos enrolamentos dos pólos auxiliares, ou aos pólos de compensação, que são ligados em série com o induzido.

11.2.1 Classificação das máquinas de corrente contínua

Consoante o modo de alimentação do enrolamento indutor, as máquinas de corrente contínua clássicas são classificadas em:

1. Máquinas de excitação separada ou independente. Em funcionamento motor, a máquina é alimentada por duas fontes de energia separadas. Em funcionamento gerador, o indutor é alimentado por uma fonte de energia independente.

Normalmente o indutor é alimentado por uma fonte de tensão de potência relativamente baixa.

2. Máquinas de excitação derivação. Nesta situação os dois enrolamentos da máquina encontram-se ligados em paralelo (figura 11.9).

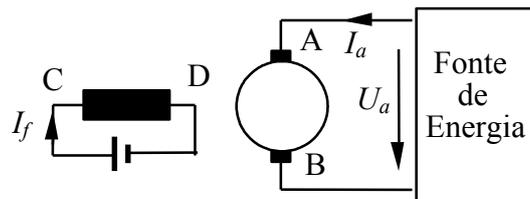


Figura 11.8. Máquina de excitação separada (motor).

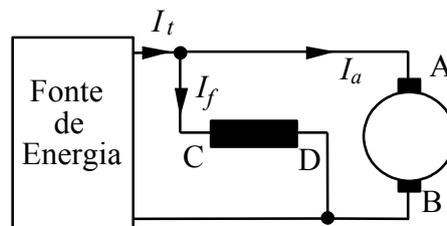


Figura 11.9. Máquina de excitação derivação (motor).

Em funcionamento motor só é necessária uma fonte de energia. Esta fonte de energia alimenta simultaneamente os enrolamentos do indutor e do induzido. Em funcionamento gerador parte da energia eléctrica gerada no induzido é gasta na produção de fluxo no circuito indutor.

A corrente I_t que a máquina pede à fonte, (motor) é a soma da corrente do induzido I_a e da corrente do indutor I_f . Normalmente a corrente I_f é muito menor do que a corrente I_a e frequentemente confunde-se I_t com I_a .

O enrolamento de excitação (C-D) deverá suportar uma tensão elevada e ser percorrido por uma corrente reduzida. Deverá ser caracterizado por uma resistência r_f elevada. É construído utilizando um condutor de secção baixa e com um número elevado de espiras.

3. Máquinas de excitação em série. Nas máquinas de excitação em série, o enrolamento de excitação é colocado em série com o enrolamento do induzido (Figura 11.10).

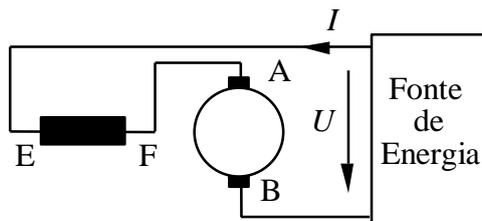


Figura 11.10. Máquina de excitação em série (motor).

Neste caso há apenas uma corrente que circula pelo induzido e pelo indutor. O enrolamento de excitação é agora caracterizado por um número de espiras reduzido, de condutores com secção elevada, percorridos por correntes consideráveis. Dado que este enrolamento é constituído por condutores de grande secção e com poucas espiras, a sua resistência eléctrica é baixa sendo também baixa a queda de tensão aos seus terminais. A tensão de alimentação da máquina é praticamente toda aplicada ao circuito do induzido.

A máquina de excitação em série é pouco utilizada como gerador, mas encontra largas aplicações em funcionamento como motor.

4. Máquinas de excitação composta. As máquinas de excitação composta dispõem de dois enrolamentos de excitação: um enrolamento série (E-F) e um enrolamento paralelo (C-D) (Figura 11.11).

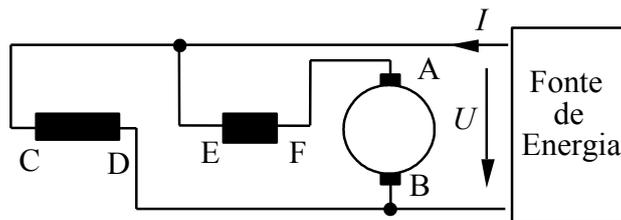


Figura 11.11. Máquina de excitação composta (motor).

Os dois enrolamentos de excitação podem ser ligados de modo a que as respectivas f.m.m. tenham o mesmo sentido (excitação composta adicional) ou sentidos contrários (excitação composta diferencial).

A máquina de excitação composta pode ser constituída com várias relações de enrolamentos derivação e série. Obtêm-se assim máquinas com características diferentes como se verá mais à frente.

A conjugação de diferentes enrolamentos série e paralelo, e as conseqüentes diferenças de características que daí resultam, constituíam, no passado, uma das grandes vantagens das máquinas de corrente contínua face às máquinas de corrente alternada.

Actualmente, com o desenvolvimento da electrónica de potência, esta vantagem está cada vez mais desvalorizada. A máquina de corrente contínua é hoje, em instalações novas, quase exclusivamente usada como motor.

Exemplo 11.1 Máquinas de excitação em derivação e em série

Neste exemplo são comparadas as características nominais e os valores das resistências dos enrolamentos de duas máquinas de corrente contínua de potências e velocidades nominais relativamente próximas, uma de excitação em derivação e a outra de excitação em série, ambas para o funcionamento como motores.

Máquina de Excitação derivação	Máquina de Excitação Série
$U_N = 200 \text{ V}$	$U_N = 200 \text{ V}$
$N_N = 1000 \text{ rpm}$	$N_N = 1000 \text{ rpm}$
$I_N = 100 \text{ A}$	$I_N = 100 \text{ A}$
$I_{fN} = 1\text{A} \text{ (1\% de } I_N)$	$I_f = I_N = 100 \text{ A}$
$r_f = 100 \ \Omega$	$r_f = 0,01 \ \Omega$
$U_{fN} = 200 \text{ V}$	$U_{fN} = 1\text{V} \text{ -(0,5\% de } U_N)$
$r_a = 0,14 \ \Omega$	$r_a = 0,14 \ \Omega$

Pode concluir-se:

1. No motor derivação a corrente de excitação (1 A) é desprezável face à corrente total absorvida (100 A).
2. No motor série a queda de tensão no enrolamento de excitação (1 V) é desprezável face à tensão de alimentação da máquina (200 V).
3. As resistências dos enrolamentos de excitação série e paralelo são muito diferentes (0,01 Ω e 100 Ω).

11.3 Princípio de funcionamento das máquinas de corrente contínua. O funcionamento do colectador

11.3.1 Campo eléctrico induzido num condutor sujeito a um campo de indução magnética

Para iniciar este estudo, considere-se apenas um condutor da periferia do rotor, de comprimento L , que se desloca à velocidade linear \vec{v} , sob um pólo do indutor que determina um campo de indução magnética \vec{B} , suposto uniforme e constante no tempo. O campo eléctrico induzido em cada ponto desse condutor será:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \quad (11.1)$$

e será máximo quando \vec{v} e \vec{B} forem perpendiculares (figura 11.12).

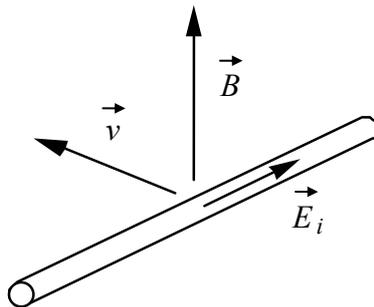


Figura 11.12. Campo eléctrico induzido num condutor.

A força electromotriz induzida no condutor, será, neste caso:

$$e = BLv \quad (11.2)$$

A f.e.m. será positiva ou negativa consoante os sentidos de \vec{v} , \vec{B} e o sentido considerado positivo para a força electromotriz. Esta força electromotriz depende da geometria (de L e do ângulo entre \vec{v} e \vec{B}), do valor do campo de indução magnética \vec{B} e da velocidade \vec{v} . É independente de outros factores, como por exemplo, se o condutor é percorrido ou não por corrente. No caso em que o condutor seja percorrido por uma corrente de intensidade i , para o cálculo da f.e.m. induzida, deve entrar-se com o campo total existente em cada ponto.

11.3.2 Expressão da força mecânica sobre um condutor

Se o condutor da figura 11.13 for percorrido por uma corrente de intensidade i , a força de origem electromagnética que actua sobre ele pode ser calculada pela lei de Laplace:

$$d\vec{f} = i(d\vec{s} \times \vec{B}) \quad (11.3)$$

Se o condutor for perpendicular a \vec{B} , e se deslocar transversalmente numa direcção perpendicular a \vec{B} , (figura 11.13), então a força que se exercerá sobre ele será:

$$f = BLi \quad (11.4)$$

Será negativa ou positiva consoante os sentidos de \vec{v} , \vec{B} e \vec{f} .

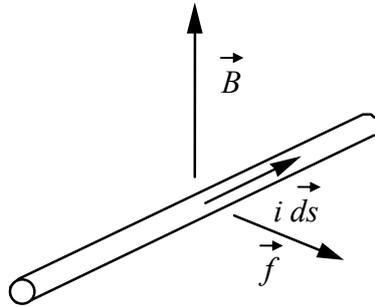


Figura 11.13. Força exercida sobre um condutor.

Deve notar-se que a força é independente da velocidade do condutor. Para uma dada geometria, só depende do campo de indução magnética \vec{B} e da corrente que o atravessa, i .

11.3.3 Potência mecânica num condutor em movimento.

Considere-se ainda o mesmo condutor da alínea anterior. A figura 11.14 ilustra os casos em que a corrente tem os dois sentidos possíveis.

Como se referiu atrás, o campo eléctrico induzido tem o mesmo valor, direcção e sentido nos dois casos. Como o sentido da corrente é diferente, apenas a força mecânica \vec{f} se altera. No caso da figura 11.14a, a força tem a mesma direcção, mas sentido contrário ao movimento. A potência mecânica é negativa e pode ser dada por:

$$p = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (11.5)$$

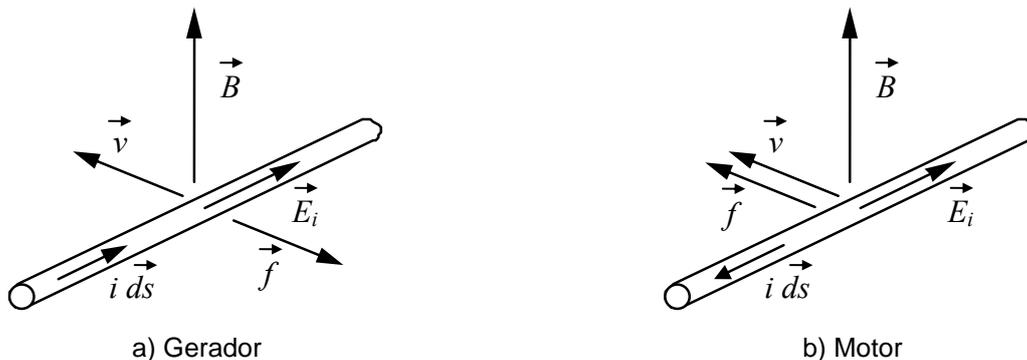


Figura 11.14. Funcionamento motor e gerador.

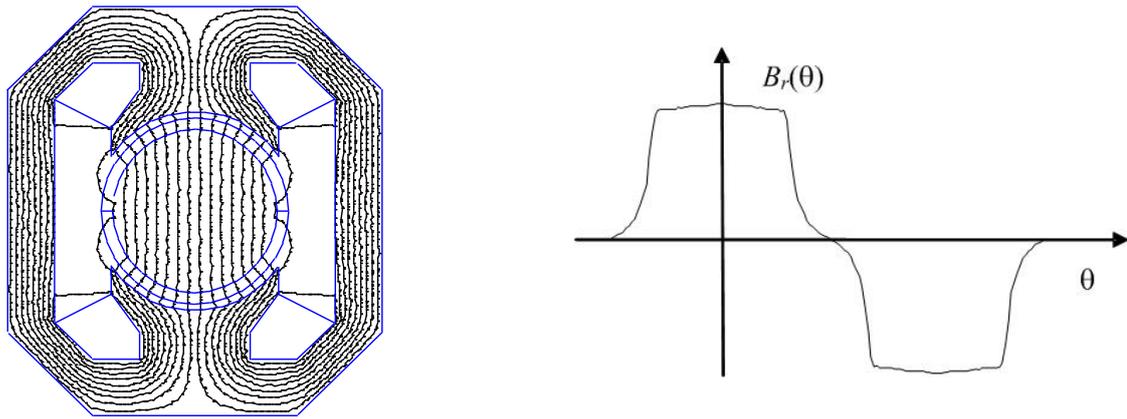
A força electromagnética \vec{f} actua no sentido contrário ao movimento tendendo a travá-lo. Por outro lado, deve notar-se que o sentido da corrente e o sentido do campo induzido são idênticos; a corrente i pode ser criada pelo próprio campo eléctrico induzido (note-se que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$). Este condutor recebe energia mecânica e fornece energia eléctrica ao exterior, isto é, o sistema funciona como gerador.

No caso da figura 11.14b, a força e a velocidade têm o mesmo sentido sendo a potência mecânica positiva. A corrente i e o campo eléctrico induzido \vec{E}_i têm agora sentidos opostos; é necessário fornecer potência eléctrica ao condutor. Esta potência eléctrica é transformada em potência mecânica — o sistema funciona como motor.

11.3.4 Princípio de funcionamento de uma máquina de corrente contínua

Na figura 11.15a representa-se um esquema de corte transversal de uma máquina de corrente contínua com um par de pólos. Nesta figura não se representam os condutores do induzido e mostram-se as linhas de força do campo criado pelo enrolamento do indutor.

Os pólos norte e sul são alternados para máquinas com mais do que um par de pólos. Convencionou-se chamar pólo norte aos locais onde o campo B atravessa o entreferro no sentido do pólo indutor para o entreferro. O campo de indução magnética \vec{B} tem, devido à simetria da máquina, um andamento periódico de período igual ao espaço correspondente a dois pólos (um Norte e outro Sul).



a) Linhas de força

b) Campo radial num período

Figura 11.15. Campo de excitação da máquina de corrente contínua.

Desprezando os efeitos das cavas e dentes, e considerando que a máquina é suficientemente longa de modo que o campo segundo o eixo seja nulo, tem-se em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{B}_{(\theta)} = B_{r(\theta)}\vec{e}_r + B_{\theta(\theta)}\vec{e}_\theta + 0\vec{e}_z \quad (11.6)$$

Tanto B_r como B_θ são funções periódicas de igual período da variável de posição θ . A figura 11.15b representa o andamento típico do campo $B_r(\theta)$. Nesta figura admite-se que a linha de simetria de um pólo norte é a origem da coordenada de posição θ .

Rodando a máquina a uma determinada velocidade, todos os condutores se deslocarão a velocidades de igual módulo. Tem-se:

$$\vec{v} = v\vec{e}_\theta \quad (11.7)$$

O campo eléctrico induzido em cada condutor será:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = -vB_r\vec{e}_z \quad (11.8)$$

Donde se pode concluir:

1. A componente B_θ não entra no cálculo do campo eléctrico induzido. Apenas interessa a componente radial.
2. Sendo a velocidade v constante, o sentido e o valor do campo induzido tem a ver com o valor do campo de indução magnética B_r . Assim, os condutores que se encontrarem sob um pólo norte estão sujeitos a forças electromotrizes induzidas de sinal contrário aos condutores que se encontrarem sob um pólo sul.
3. Para que a máquina funcione como motor ou gerador de uma forma optimizada, é necessário que os binários correspondentes às forças exercidas sob todos os condutores se adicionem:

3.1. No sentido do movimento em funcionamento motor.

3.2. No sentido contrário ao movimento em funcionamento gerador.

Para que tal seja possível é necessário que a corrente que circula nos condutores:

A. Tenha sentido contrário ao campo eléctrico induzido em funcionamento motor em todos os condutores simultaneamente.

B. Tenha o mesmo sentido do campo induzido em funcionamento gerador em todos os condutores simultaneamente.

Assim, a representação do campo eléctrico induzido numa determinada figura que represente uma máquina de corrente contínua será também a representação da corrente (gerador), ou o seu contrário (motor).

4. Pelo que ficou dito, pode concluir-se que terá de haver um dispositivo que troque o sentido da corrente quando os condutores ultrapassem as linhas onde o campo B_r se inverte. Estas linhas são designadas por linhas neutras e o dispositivo é designado por colectores ou comutador.

Concluindo, pode afirmar-se que o colectores deverá realizar as seguintes tarefas:

T1. Impor o mesmo sentido de correntes a todos os condutores que se encontrem sob pólos norte e sentidos contrários aos condutores que se encontrem sob a influência de pólos sul. Como consequência, os binários correspondentes são somados com o mesmo sentido não havendo anulação de forças nuns condutores por forças de sentidos contrários noutros condutores.

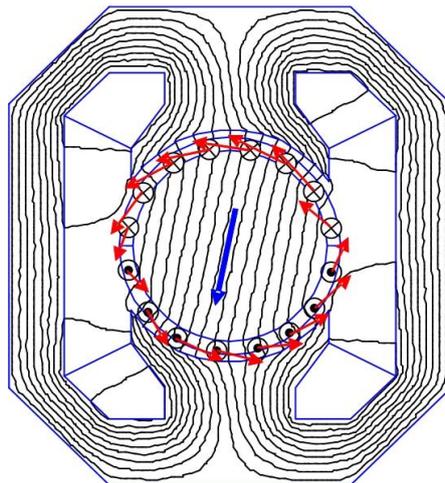


Figura 11.16. Binários provocados pelas correntes nos condutores do induzido.

A posição das correntes é independente dos condutores que as conduzem. Assim, todos os condutores que se encontrem sob um pólo norte conduzirão a corrente num sentido, e os condutores que se encontrem sob um pólo sul conduzirão a corrente no sentido contrário, ver figura 11.3 e 11.16. Nesta última figura a seta quase vertical representa o sentido do campo de indução magnética e as setas a vermelho representam as forças que se exercem sobre os condutores periféricos.

T2. Trocar o sentido das correntes aos condutores que passam numa zona neutra, ou seja, aos condutores que passem numa zona onde o campo B_r se inverte.

T3. Para que a força electromotriz aos terminais da máquina seja elevada, o colectores deve somar todas as forças electromotrices induzidas em cada condutor. Esta tarefa é realizada colocando condutores do induzido em série de modo que as suas forças electromotrices se somem, ou seja, o colectores não deverá colocar em série condutores com forças electromotrices de sentido contrário.

11.3.5 O Funcionamento do colector

Para simplificar a análise, vai considerar-se uma máquina de induzido em anel. O estudo para um enrolamento em tambor seria mais complexo. A distribuição de campo criado pelo indutor encontra-se representada na figura 11.17. Nesta figura não se representam os condutores do induzido. Sob os pólos o campo é aproximadamente radial e de intensidade quase constante. No interior do anel o campo é nulo. Apenas os condutores que se encontram entre o núcleo do induzido e os pólos de excitação estão sujeitos a forças electromotrizes e dão origem a forças mecânicas.

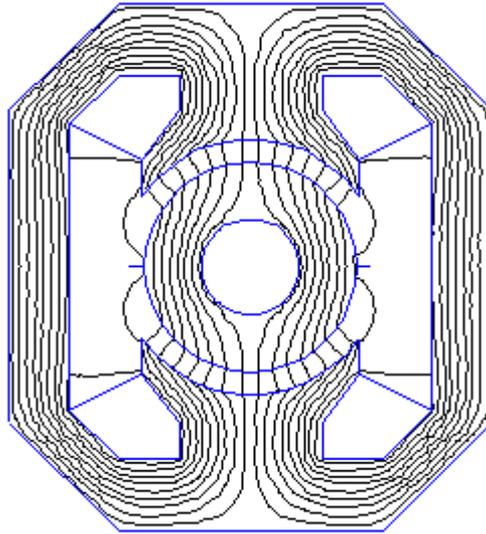


Figura 11.17. Campo criado pelo indutor numa máquina de enrolamento em anel.

Considere-se então a mesma máquina representada na figura 11.18. Esta figura representa a mesma máquina em 2 instantes consecutivos e ilustra o funcionamento do colector. Nesta figura não se mostra a distribuição do campo do indutor que se apresenta na figura 11.17. Cada uma das 16 bobinas, com uma espira, que se encontram enroladas no anel são designadas por secções. Estas bobinas têm, em geral, mais do que uma espira. Nesta figura optou-se por utilizar secções de uma espira para simplificar o desenho. Pela mesma razão se representam as escovas na parte interior do colector. As lâminas do colector e as secções encontram-se numeradas para facilitar a descrição que se segue.

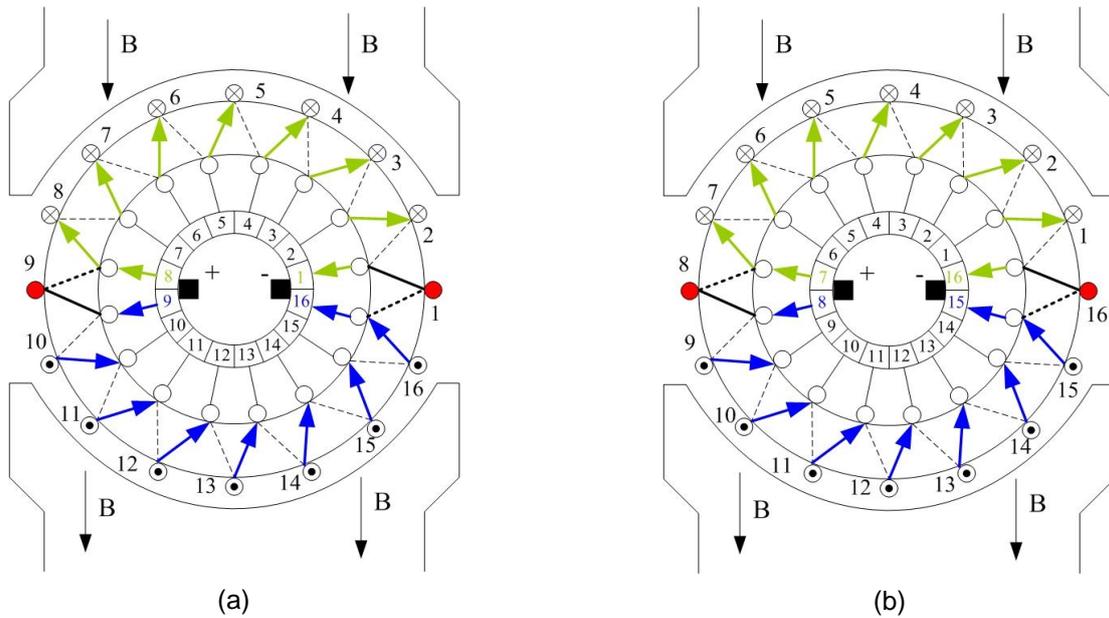


Figura 11.18. Funcionamento do colector. Posição em instantes consecutivos.

Assim, neste caso, as secções são constituídas por um condutor activo (no exterior do anel) e por um condutor passivo (no interior do anel). Os dois terminais de cada uma destas secções encontram-se ligados a duas lâminas contíguas do colector.

Considere-se a situação da alínea a). Analisando a figura, pode concluir-se:

1. As secções 1 e 9, que se encontram na linha neutra ($B_r(\theta)=0$), encontram-se curto-circuitadas. Note-se que a f.e.m. induzida nestas secções é nula ($e=BLv$ e $B=0$) e por isso, apesar de se encontrarem curto-circuitadas, não são percorridas por correntes de circulação. O caminho destas correntes de circulação para o caso da secção 1 seria: “lâmina 1, secção 1, lâmina 16, escova de terminal – (menos), lâmina 1”.

Estas secções seriam percorridas por correntes de circulação, na situação de comutação, se não se encontrassem em posições onde $B \neq 0$.

2. Existem dois caminhos de circulação da corrente, um sob o pólo Norte representado a verde, e o outro sob o pólo Sul representado a azul. A figura 11.19 representa a linearização da máquina da figura 11.18 quando esta se encontrar na posição da alínea a).

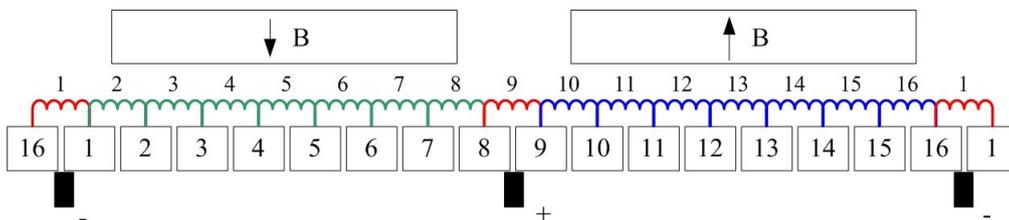


Figura 11.19. Representação linearizada da máquina.

Concretizando, tem-se:

Caminho 1: T+, L8, S8, ... S2, L1, T- (a verde)

Caminho 2: T+,L9, S10, L10... S16, L16, T- (a azul)

onde

T = Terminal; L = Lâmina; S = Secção

Note-se que:

- Cada um destes dois caminhos coloca sete secções com a f.e.m. do mesmo sinal em série.
- Estes dois caminhos são ligados às escovas de modo a que se encontrem em paralelo.
- As duas somas das f.e.m. são ligadas de modo a respeitar as polaridades. A figura 11.20 ilustra esta afirmação onde as secções 1 e 9 estão em comutação.

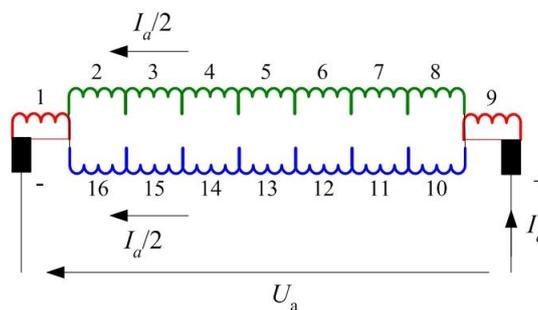


Figura 11.20. Circuito equivalente do induzido na posição da figura 11.18a.

- A força electromotriz aos terminais do induzido pode ser calculada circulando por qualquer um destes 2 caminhos. Estes designam-se por circuitos derivados e encontram-se sempre em número par.
- A corrente aos terminais do induzido será a soma das 2 correntes que circularão em cada um destes caminhos. Dado que existe simetria, e sendo $2a$ o número de circuitos derivados, tem-se:

$$I_a = 2ai_{\text{secção}} \quad (11.9)$$

Considere-se agora a figura 11.18b. Esta figura representa um instante seguinte ao da figura 11.18.a). Neste caso, as secções 1 e 9 saíram de curto-circuito ou de comutação. A análise das forças electromotrizas e correntes que se pode fazer agora é idêntica à da alínea a).

A situação seguinte à da figura 11.18b é perfeitamente idêntica à da figura 11.18.a. A localização das correntes é rigorosamente a mesma, mas os condutores que as conduzem são diferentes. Assim, onde se encontrava a secção 2 vai encontrar-se agora a secção 1 e assim sucessivamente. O cálculo da f.e.m. e dos binários será rigorosamente idêntico ao caso da figura 11.18.a.

11.3.6 Força electromotriz e corrente numa secção

Como se viu atrás, a f.e.m. induzida numa secção depende do campo $B_r(\theta)$ e da velocidade. No referencial do rotor em movimento, a f.e.m. em cada secção tem a mesma forma do campo $B_r(\theta)$. É portanto uma função alternada no tempo. A sua frequência é proporcional à velocidade de rotação e ao número de pares de pólos. Esta f.e.m. está inteiramente relacionada com a posição que o seu condutor activo vai ocupando.

O sentido da corrente numa secção também vai sendo trocado à medida que esta vai passando por uma zona neutra. É portanto também uma grandeza alternada e da mesma frequência que a f.e.m.. Estas duas grandezas estão representadas na figura 11.21.

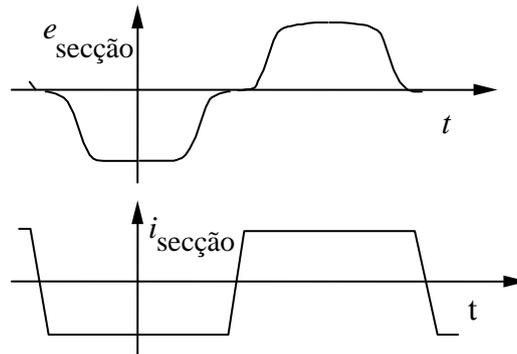


Figura 11.21. F.e.m. e corrente numa secção de induzido.

Nesta figura considera-se a comutação da corrente linear. Isto quer dizer, que a passagem da corrente, de uma polaridade para a outra, se faz segundo uma linha recta. Este conceito constitui uma aproximação à realidade.

Exemplo 11.2

Calcular a frequência das correntes do rotor da máquina da figura 11.3 quando rodar à velocidade de 1200 rpm.

Resolução

A máquina tem 2 pares de pólos. Por cada rotação, cada secção sofre variações de campo de $p=2$ períodos. Sendo n a velocidade em rotações por segundo e f a frequência, tem-se:

$$f = p n = p N/60 = 2 \times 1200/60 = 40 \text{ Hz.}$$

11.4 O modelo matemático das máquinas de corrente contínua

11.4.1 Expressão da força electromotriz

Considere-se uma máquina de corrente contínua. Para simplificar a análise, admita-se que o seu enrolamento do induzido é em anel e que esta máquina tem $2p$ pólos e $2a$ circuitos derivados. O número total de condutores activos é designado pela letra Z . Tendo em conta as considerações feitas na secção anterior, o cálculo de força electromotriz aos terminais do circuito do induzido pode ser feito somando todas as forças electromotrizes induzidas nos condutores que constituem um circuito derivado. Seja, por exemplo, o representado na figura 11.22.

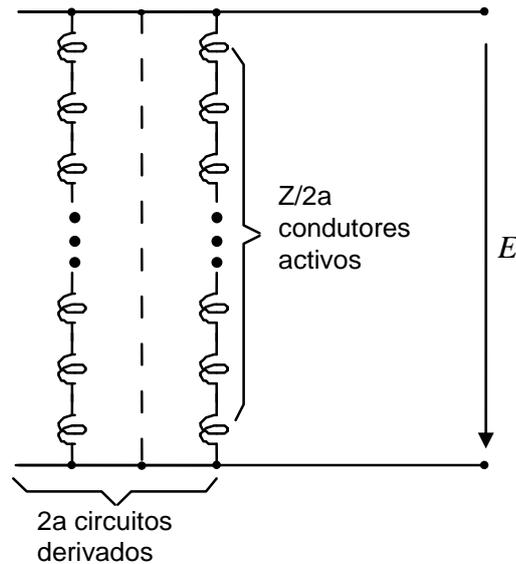


Figura 11.22. Caminho de circulação para o cálculo da força electromotriz.

Assim, para os $Z/2a$ condutores que constituem o circuito derivado, ter-se-á:

$$E = e_1 + e_2 + \dots + e_{Z/2a} = \sum_{k=1}^{Z/2a} e_k = Lv \sum_{k=1}^{Z/2a} B_r(x_k) \quad (11.10)$$

Onde x_k são as coordenadas das posições de cada um dos $Z/2a$ condutores, e $B_r(x_k)$ o valor da componente radial do respectivo campo de indução magnética.

Quando o número total de condutores Z e o número de lâminas do colector forem elevados, a expressão 11.10 toma a forma simplificada:

$$E = Lv \frac{Z}{2a} B_{av} \quad \text{onde} \quad B_{av} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} B(x) dx \quad (11.11)$$

em que τ é o passo polar, isto é, o comprimento da periferia do rotor correspondente a um pólo. O integral é efectuado sob um pólo magnético indutor. Definindo o fluxo útil por pólo ϕ :

$$\phi = L\tau B_{av} \quad (11.12)$$

e como a velocidade tangencial pode ser dada por:

$$v = 2p\tau n$$

em que n é o número de rotações por segundo, a expressão 11.11 toma a forma:

$$E = L \frac{Z}{2a} \frac{\phi}{L\tau} 2p\tau n = \frac{2p}{2a} Z\phi n \quad (11.13)$$

ou

$$E = \frac{2p}{2a} Z\phi n \quad (11.14)$$

Este resultado constitui a expressão clássica da força electromotriz numa máquina de corrente contínua. Está escrita em termos dos parâmetros construtivos (p , a e Z), do estado magnético (ϕ) e do estado mecânico (n) da máquina. Constitui uma integração da equação 11.2.

11.4.2 Modelo matemático da máquina de corrente contínua.

Depois de obtida a expressão da força electromotriz da máquina de corrente contínua, o seu modelo matemático fica imediatamente determinado. Assim, para o enrolamento de excitação, e em regime permanente, tem-se:

$$U_f = r_f I_f \quad (11.15)$$

Para o enrolamento do induzido, em regime permanente, e segundo a convenção motor, tem-se:

$$U_a = r_a I_a + E \quad (11.16)$$

em que E depende dos parâmetros da máquina e do seu estado conforme a equação 11.14.

As equações 11.15 e 11.16, e a lei fundamental da mecânica (segunda lei de Newton) que traduz o equilíbrio mecânico, constituem o modelo matemático em regime permanente da máquina de corrente contínua.

Às equações 11.15 e 11.16 corresponde o circuito equivalente da figura 11.23.

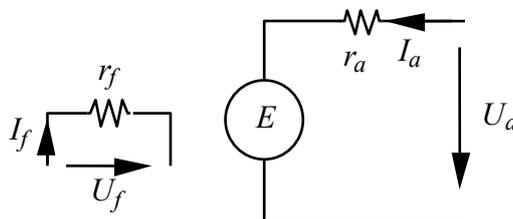


Figura 11.23. Circuito equivalente em regime permanente da máquina de corrente contínua.

Deste circuito equivalente, pode concluir-se:

1. Quando a máquina funcionar como motor, a corrente I_a é positiva na convenção adoptada. Então $U_a > E$.
2. Quando a máquina funcionar como gerador, a corrente I_a é negativa, e portanto, $U_a < E$.

Além das equações 11.15 e 11.16 há que considerar a equação de equilíbrio mecânico no veio. Em regime permanente, tem-se:

$$M_{em} = M_c \quad (11.17)$$

onde M_{em} é o binário electromagnético desenvolvido pela máquina de corrente contínua e M_c o binário de carga que se impõe no exterior da máquina.

11.4.3 Balanço energético.

Considere-se uma máquina de corrente contínua em funcionamento motor. A partir das equações 11.15 e 11.16, após operações algébricas simples, obtém-se:

$$P_f = U_f I_f = r_f I_f^2 \quad (11.18)$$

$$P_a = U_a I_a = r_a I_a^2 + E I_a \quad (11.19)$$

As expressões 11.18 e 11.19 traduzem o balanço energético nesta máquina. Assim, toda a energia fornecida ao circuito de excitação é dissipada nos seus enrolamentos. Neste circuito não há conversão electromecânica de energia. A sua função é a de criar um campo de indução magnética que possibilita a conversão electromecânica de energia noutro circuito, o circuito do induzido. O circuito do indutor pode ser substituído por ímanes permanentes. Hoje em dia, com o desenvolvimento da tecnologia, esta solução é cada vez mais frequente. Tem a vantagem de reduzir as perdas na máquina, mas tem o inconveniente de não permitir a regulação do nível do fluxo. Como se verá mais à frente, esta regulação pode desempenhar

um papel muito importante no controlo da máquina tanto em funcionamento motor como em funcionamento gerador.

A expressão 11.19 traduz o balanço energético no circuito do induzido. Parte da potência eléctrica entregue ao induzido ($U_a I_a$) é dissipada nos seus enrolamentos ($r_a I_a^2$) e a outra parte ($E I_a$) é transformada em potência mecânica.

Da potência transformada em potência mecânica, nem toda pode ser utilizada. Além das perdas mecânicas, há que considerar também as perdas no ferro do induzido e nas peças polares do estator.

As perdas mecânicas são de dois tipos:

- perdas de atrito que se verificam nos rolamentos e nos contactos escova colectora;
- perdas de ventilação que são devidas aos sistemas utilizados na remoção do calor do interior da máquina.

As perdas no ferro no induzido resultam do campo magnético no rotor ser variável no tempo. Assim, existirão perdas de histerese que são proporcionais à velocidade de rotação e perdas por correntes de Foucault que são proporcionais ao quadrado da mesma velocidade. Uma vez que se produzem no rotor, estas perdas traduzem-se por um binário que se vai opor ao movimento. Têm o mesmo comportamento das perdas mecânicas.

Em funcionamento motor, o balanço energético pode ser representado pelo esquema da figura 11.24.

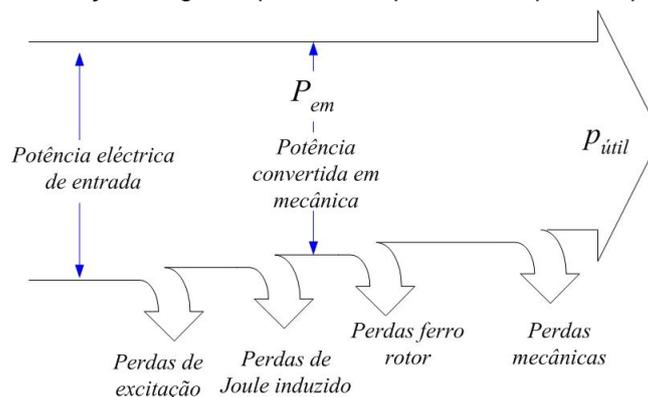


Figura 11.24. Diagrama energético em funcionamento motor.

Em funcionamento gerador, tal como nos outros tipos de máquinas eléctricas, a máquina recebe potência mecânica no veio. A maior parte desta potência (à excepção das perdas mecânicas e no ferro) é transformada em potência eléctrica, que é fornecida aos circuitos eléctricos aos quais se encontra ligada, depois de descontadas as perdas eléctricas no seu interior.

11.4.4 Obtenção da expressão do binário electromagnético.

A expressão do binário pode ser obtida de uma forma análoga à utilizada para a obtenção da expressão da força electromotriz. Em vez de se somarem todas as forças electromotrizas induzidas nos condutores ao longo de um circuito derivado, devem-se somar agora todos os binários criados em todos os condutores activos. Para simplificar o cálculo, vai utilizar-se alguns critérios de simetria e fazer o cálculo sobre um pólo do indutor. Assim, sendo R o valor do raio do rotor onde se encontram os condutores, e sabendo que cada condutor activo é percorrido por uma corrente igual a $I_a/2a$, considerando a expressão 11.4, tem-se:

$$M_{em} = R \sum_{k=1}^Z f(k) = R 2p \sum_{k=1}^{Z/2p} L \frac{I_a}{2a} B_r(x_k) \quad (11.20)$$

$$M_{em} = RL \frac{2p}{2a} I_a \sum_{k=1}^{Z/2p} B_r(x_k) = \frac{2p}{2a} L R I_a \frac{Z}{2p} B_{av}$$

como $\phi = L \tau B_{av} = L \frac{2\pi R}{2p} B_{av}$, obtém-se:

$$M_{em} = \frac{1}{2\pi} \frac{2p}{2a} Z \phi I_a \quad (11.21)$$

que é a expressão clássica do binário electromagnético de uma máquina de corrente contínua.

Pode verificar-se que estes resultados são consistentes, ou seja, as expressões 11.14, 11.19 e 11.21 não violam o princípio da conservação da energia. Com efeito, a potência electromagnética pode ser dada por:

$$P_{em} = E I_a = \frac{p}{a} Z \phi n I_a \quad (11.21)$$

ou pela conhecida expressão:

$$P_{em} = M_{em} \omega_m = M_{em} 2\pi n \quad (11.22)$$

Donde

$$P_{em} = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{a} Z \phi I_a 2\pi n \quad (11.23)$$

que é idêntica à expressão 11.21.

Exemplo 11.3

O induzido de uma máquina de corrente contínua de 8 pólos tem as seguintes características:

Número de condutores activos - 300

Superfície de entreferro sob um pólo - 250 cm²

Indução magnética média no entreferro - 1 T

Admitindo um enrolamento imbricado simples ($p=a$), qual a f.e.m. e o binário quando a máquina rodar a 1200 rpm e circular em cada um dos seus condutores uma corrente de 50 A. Determine também o valor da corrente do induzido.

Resolva o mesmo problema admitindo que o enrolamento é ondulado simples ($a=1$).

Resolução.

O fluxo por pólo é:

$$\phi = B S = 1 \times 250 \times 10^{-4} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

A. Enrolamento imbricado

Neste caso $p=a=4$

$$E = \frac{p}{a} Z \phi n = 1 \times 300 \times 2,5 \times 10^{-2} \times 1200 / 60 = 150 \text{ V}$$

A corrente no induzido será: $I_a = 2a I_{\text{condutor}} = 400 \text{ A}$

O binário:

$$M_{em} = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{a} Z\phi I_a = \frac{1}{2\pi} \times 1 \times 300 \times 2,5 \times 10^{-2} \times 400 = 477,4 \text{ Nm}$$

B. Enrolamento ondulado

Neste caso $p=4$ $a=1$, donde

$$E = 4 \times 150 = 600 \text{ V}, \quad I_a = 100 \text{ A}$$

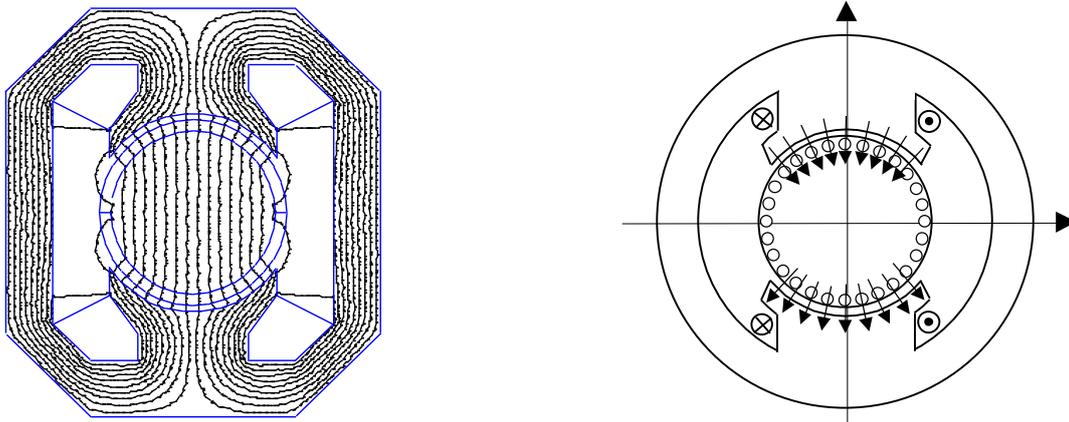
Como a corrente agora é 4 vezes menor, e a relação p/a é 4 vezes maior, resulta um binário idêntico ao caso anterior.

OBSERVAÇÃO:

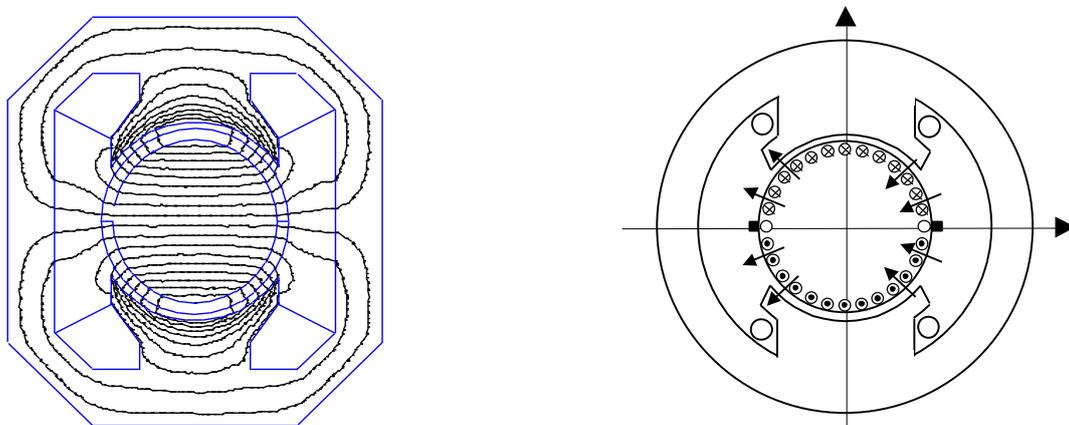
Deste exercício pode concluir-se que para os dois enrolamentos a máquina tem a mesma potência. Os valores da potência mecânica são idênticos pois a velocidade e o binário são iguais. Por outro lado, os valores da potência do induzido são também idênticos pois os produtos de $E I_a$ são iguais. Aos terminais de uma máquina com enrolamentos ondulados existe, em geral, uma tensão mais elevada e uma corrente mais baixa do que aos terminais de uma máquina equivalente de enrolamentos imbricados.

11.4.5 A reacção magnética do induzido

Até aqui considerou-se que o campo no entreferro é devido apenas ao circuito indutor, isto é, o fluxo por pólo, ou o campo B em cada ponto, são devidos apenas ao circuito de excitação. Esta hipótese só é exacta quando não circular nenhuma corrente no induzido. Com efeito, quando circular uma corrente no induzido, ela também criará um campo de indução magnética. O campo resultante será criado pela soma das duas distribuições de f.m.m..



a) Campo do indutor ou campo principal.



b) Campo do induzido.

Figura 11.25. Decomposição do campo de uma máquina de corrente contínua.

As figuras 11.25.a e 11.25.b representam as distribuições de campo, numa máquina bipolar, respectivamente do campo criado pelo indutor quando $I_a=0$, e do campo criado pelo induzido quando $I_f=0$. Pode verificar-se que os eixos de simetria destes dois campos são perpendiculares.

A figura 11.26 mostra a distribuição de campo total criado numa situação normal de funcionamento.

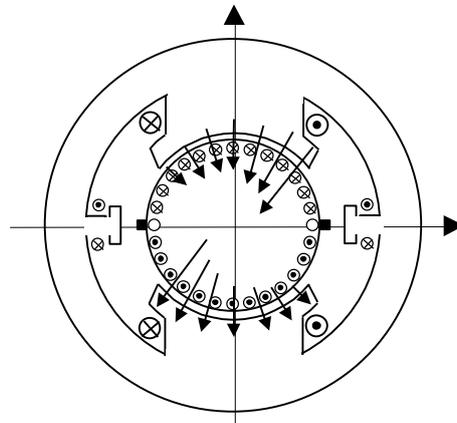


Figura 11.26. Campo total devido ao induzido e ao indutor.

Pode observar-se que a linha neutra em carga, isto é, a linha onde a f.e.m. nos condutores se inverte, está na realidade desfasada em relação à linha neutra em vazio, que corresponde à linha neutra geométrica. O ângulo de desfasagem α depende da relação entre a intensidade das f.m.m. do indutor e do induzido. Quando a corrente do indutor for constante, este ângulo aumenta com o aumento da corrente do induzido.

Para se obter a f.e.m. máxima é assim necessário deslocar a linha das escovas de um certo ângulo α' . Note-se que $\alpha' \neq \alpha$ pois ao deslocar-se a linha das escovas, a distribuição da f.m.m. do induzido é alterada e a distribuição de campo apresentada na figura 11.26 deixa de ser válida. Em carga E' terá um valor mais baixo do que a f.e.m. em vazio E , e a diferença entre estes dois valores é a queda de tensão devida à “reação magnética do induzido”.

$$\varepsilon = E' - E = f(I_f, I_a) \tag{11.24}$$

A não colocação das escovas na linha neutra magnética tem como consequência a má comutação do colector. Com efeito, as escovas põem em curto-circuito secções onde a f.e.m. não é nula por se encontrarem em zonas de campo B não nulo. A comutação faz-se de forma deficiente pois sobre as secções em curto-circuito circularão correntes que poderão ser elevadas.

Para melhorar a comutação pode utilizar-se um dos dois processos seguintes:

- fazer uma decalagem das escovas como já se falou anteriormente;
- utilizar um sistema de pólos e enrolamentos auxiliares designados por pólos e enrolamentos de comutação.

Os efeitos da reacção magnética do induzido podem ser compensados por outro enrolamento auxiliar designado por enrolamento de compensação. Nas secções seguintes analisam-se estes dois casos.

11.4.6 Máquina de corrente contínua com pólos auxiliares de comutação.

Nas figuras 11.27 e 11.28 retoma-se as distribuições de linhas de força para os casos tratados na figura 11.25. Agora representa-se também a distribuição do campo e da f.m.m. ao longo da periferia e faz-se uma linearização da máquina para uma melhor compreensão.

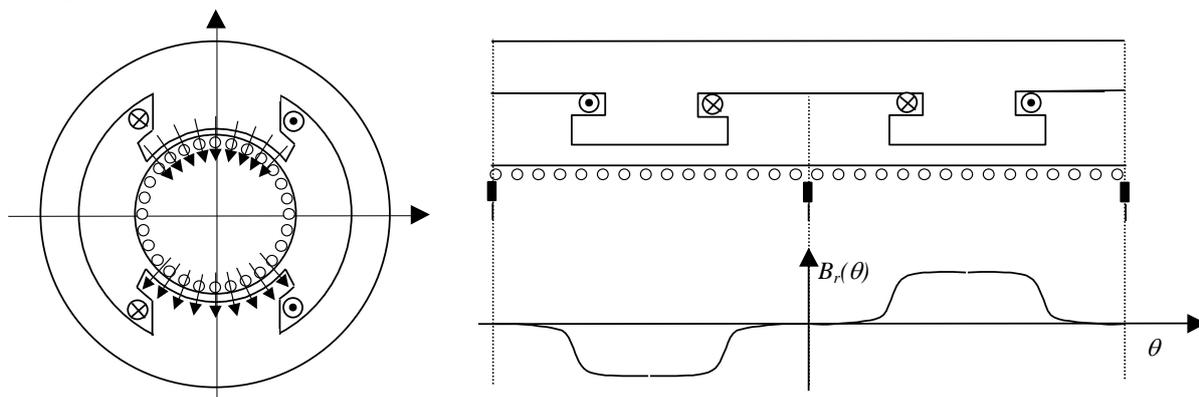


Figura 11.27. Distribuição do campo indutor.

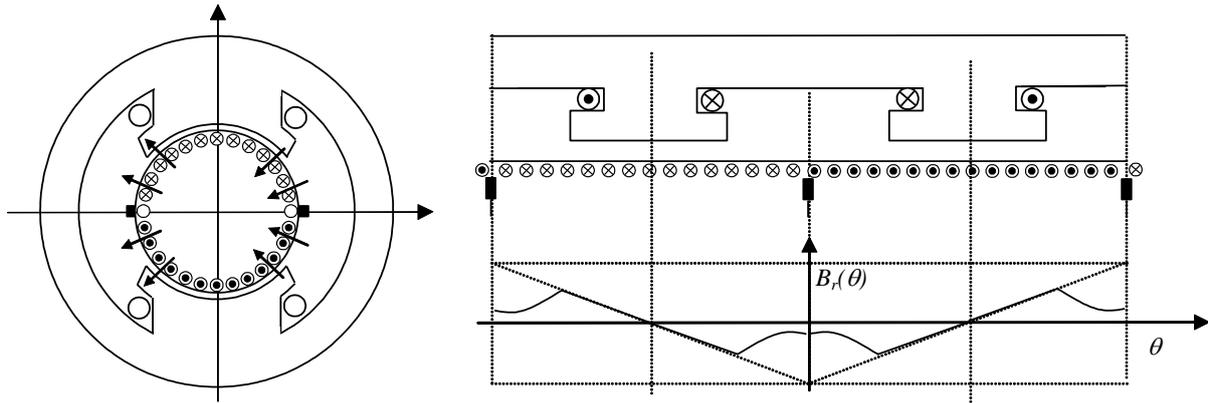


Figura 11.28. Distribuição do campo do induzido.

A distribuição de f.m.m. do indutor é rectangular pois é criada por um enrolamento concentrado. A distribuição de f.m.m. do induzido é triangular pois os condutores encontram-se uniformemente distribuídos ao longo da periferia do induzido.

A figura 11.29 representa a distribuição de correntes no espaço numa máquina com enrolamentos e pólos de comutação. Junto à linha neutra geométrica, os enrolamentos de comutação vão criar uma f.m.m. F_c localizada de modo a anular a f.m.m. do induzido (Figura 11.30) F_a , $F_{res}=F_a+F_c$ e por consequência anular o campo B nas secções que se encontrarem em comutação. Obtém-se assim uma boa comutação à custa do anulamento da f.e.m. nas secções em comutação.

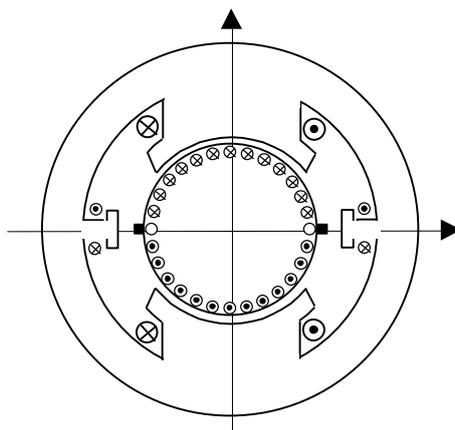


Figura 11.29. Polaridade dos pólos de comutação.

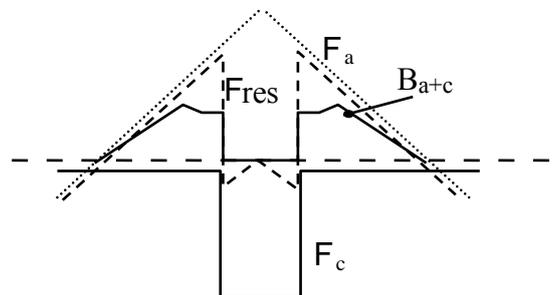


Figura 11.30. F.m.m e campo B resultante junto da linha neutra geométrica.

Na figura 11.31 representa-se a distribuição total de f.m.m. e a forma de onda do campo resultante admitindo não saturação do circuito magnético. Note-se que, sob a peça polar, o campo B deixa de ser uniforme diminuindo num dos lados e aumentando no outro.

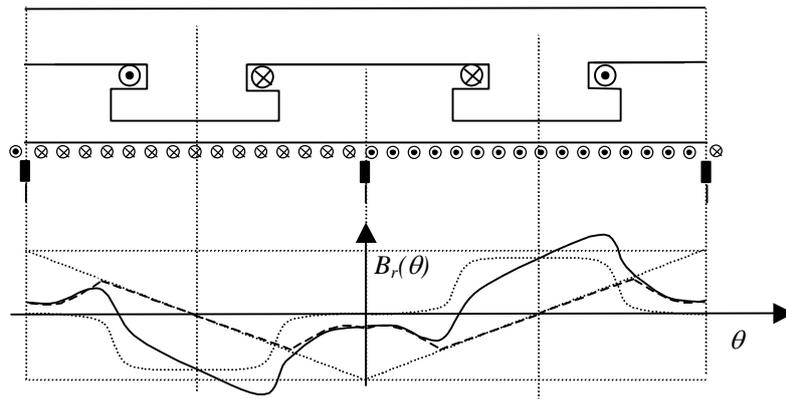


Figura 11.31. Distorção do campo resultante em carga devido à reacção magnética do induzido.

A figura 11.32 representa a distribuição de campo ao longo da periferia numa máquina com pólos e enrolamentos de comutação. Para que este processo de melhoria de comutação funcione independentemente do valor da corrente do induzido, é necessário que a corrente que percorra o enrolamento auxiliar seja proporcional à corrente que percorra o induzido.

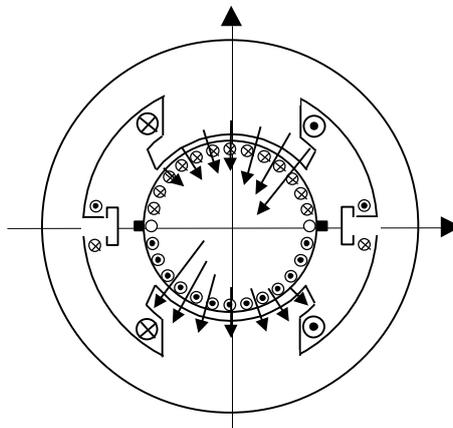


Figura 11.32. Campo resultante em carga de uma máquina com pólos de comutação.

11.4.7 Máquina de corrente contínua com enrolamentos de compensação.

Numa máquina real, onde a saturação magnética se faz sentir, a distribuição do campo no entreferro traduz-se por uma saturação apreciável de um dos lados polares e dos dentes rotóricos nas redondezas. Se não houvesse saturação, a diminuição do campo de um dos lados (figuras 11.31 e 11.32) seria compensada por um aumento de igual amplitude no lado oposto. Assim, neste caso, o fluxo útil por pólo manter-se-ia constante e a reacção magnética do induzido não se traduziria por nenhuma diminuição da força electromotriz.

Na realidade, quando houver saturação, uma variação igual para cima ou para baixo na f.m.m. não se traduz em igual variação do campo de indução magnética (figura 11.33).

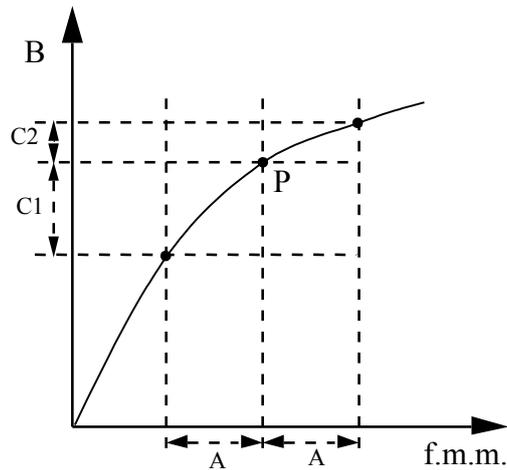


Figura 11.33. Efeito da saturação.

Sendo P (figura 11.33) o ponto de funcionamento de uma determinada localização da periferia por debaixo de um pólo magnético, e sendo A a variação para cima e para baixo da força magnetomotriz nessa posição da periferia, pode verificar-se que a diminuição de A dá origem a uma diminuição de C1 superior ao aumento C2 provocado pelo mesmo aumento de A da força magnetomotriz.

Assim, na presença de saturação, o aumento do campo B de um dos lados não compensa a diminuição do lado oposto, e por consequência, há uma diminuição do fluxo e da f.e.m. em carga.

O efeito desfavorável da distorção do campo nos dois lados da peça polar pode ser compensado pelo enrolamento de compensação. Este é colocado nas sapatas polares e é percorrido por correntes cujo efeito magnético é antagónico ao das do induzido que lhes estão mais próximas (figura 11.34). Este enrolamento age portanto segundo o eixo interpolar e compensa uma parte da f.m.m. do induzido.

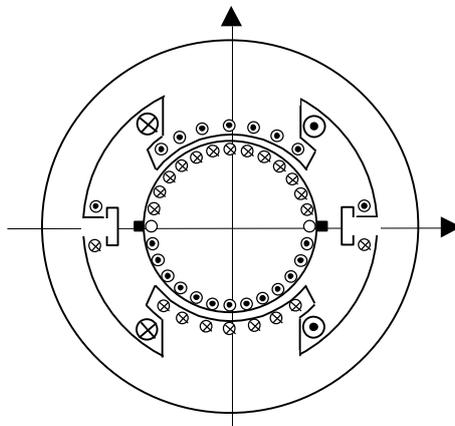


Figura 11.34. Enrolamento de compensação.

O enrolamento de compensação elimina o efeito de distorção provocada pela reacção do induzido (figura 11.31 e 11.32).

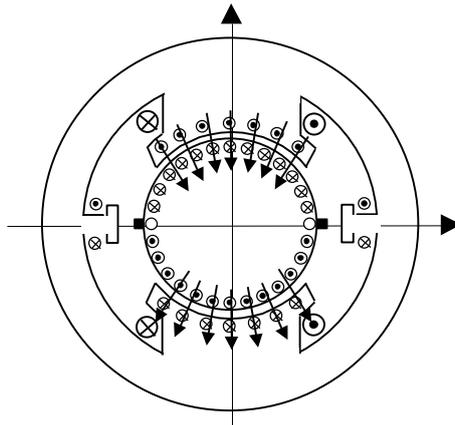


Figura 11.35. Campo de indução magnética resultante numa máquina em carga e compensada.

A distribuição de campo total numa máquina compensada (figura 11.35) é semelhante à distribuição de campo da mesma máquina em vazio (figura 11.27). Assim, tudo se passa como se o enrolamentos do induzido, ao ser percorrido por corrente eléctrica, não produzisse campo magnético. Isto acontece assim, pois junto às correntes do induzido são colocados outras correntes no estator de sinal contrário que lhes anulam o efeito magnético.

Das considerações que se acabam de expor pode concluir-se que o modelo matemático traduzido pelas equações 11.14, 11.15 e 11.16 é válido com ou sem reacção magnética do induzido. Note-se que ele foi obtido a partir de uma distribuição qualquer de campo de indução magnética ao longo da periferia. Assim o cálculo da f.e.m. da expressão 11.10 que deu origem à expressão 11.14 é válido também para um caso mais complexo como é o caso das figuras 11.32 ou 11.35. Nas máquinas não compensadas, o fluxo útil por pólo ϕ é o fluxo total do indutor e induzido e, naturalmente, varia com a corrente do induzido. Nas máquinas compensadas, o mesmo fluxo ϕ é também o fluxo resultante de todos os enrolamentos. Como os enrolamentos de compensação anulam os efeitos dos enrolamentos do induzido, pode concluir-se que, nos casos de compensação perfeita, este fluxo ϕ depende apenas do circuito de excitação.

11.5 Características dos motores de corrente contínua

11.5.1 Motores de excitação em derivação

A figura 11.36 apresenta o esquema de ligações de um motor de excitação em derivação.

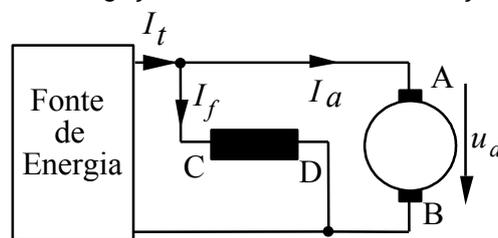


Figura 11.36. Esquema de ligações do motor de excitação em derivação.

A corrente total consumida I_t , vai dividir-se na corrente do indutor I_f , que vai criar o fluxo ϕ , e na corrente I_a que circula no induzido e vai produzir o binário. Tem-se:

$$I_t = I_a + I_f \tag{11.25}$$

Fazendo $K_T = \frac{p Z}{a 2\pi}$, a expressão do binário escreve-se:

$$M_{em} = K_T \phi I_a \quad (11.26)$$

Em regime permanente, a equação do equilíbrio das tensões, escreve-se:

$$U = U_a = E + r_a I_a \quad (11.27)$$

Quando o motor rodar em vazio, isto é sem carga mecânica, a corrente I_a é muito pequena (a potência fornecida corresponde apenas às perdas mecânicas e no ferro). À medida que se vai pedindo carga mecânica, aumentando o binário resistente, a corrente I_a toma um valor de modo a que o binário electromagnético que lhe corresponda iguale o binário resistente pedido. O aumento da potência electromagnética vai compensar o aumento da potência mecânica pedida e o correspondente aumento de perdas.

Quando a tensão de alimentação for imposta num determinado valor constante, o motor é caracterizado por 3 variáveis: a corrente I_a , o binário M_{em} e a velocidade de rotação N .

Geralmente define-se o funcionamento de um motor por meio de duas características que mostram como variam o binário e a velocidade em função da corrente I_a .

a) Binário M_{em}

O fluxo ϕ é constante (pois U é constante o que implica que I_f seja constante). Da relação 11.26 pode concluir-se que o binário varia linearmente em função da corrente I_a .

b) Velocidade N

Da equação 11.27, fazendo $K_E = \frac{p Z}{a 60}$, e sendo N a velocidade em rotações por minuto, tira-se:

$$N = \frac{U - r_a I_a}{K_E \phi} \quad (11.28)$$

A velocidade é portanto ($\phi = \text{cte}$) ligeiramente decrescente com a corrente I_a .

Estas duas características encontram-se representadas na figura 11.37.

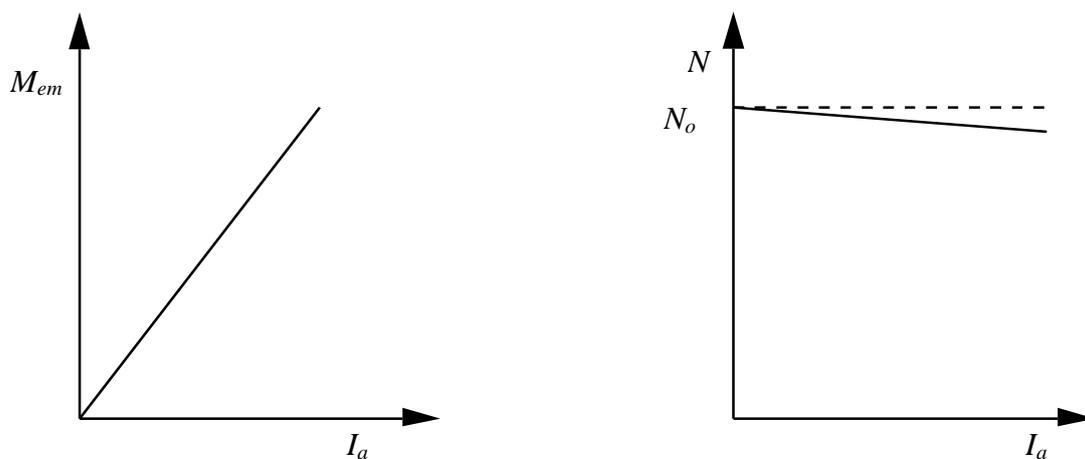


Figura 11.37. Características de um motor de excitação em derivação.

A característica electromecânica pode ser obtida por eliminação da corrente I_a nas equações 11.26 e 11.28.

Obtém-se:

$$N = \frac{U}{K_E \phi} - \frac{r_a}{K_E K_T \phi^2} M_{em} \quad (11.29)$$

Verifica-se que a velocidade varia pouco com o binário. Assim esta é uma máquina de velocidade quase constante. A característica electromecânica encontra-se representada na figura 11.38. Nesta figura representa-se também a mesma característica no quarto quadrante. Neste quadrante a máquina funciona como gerador.

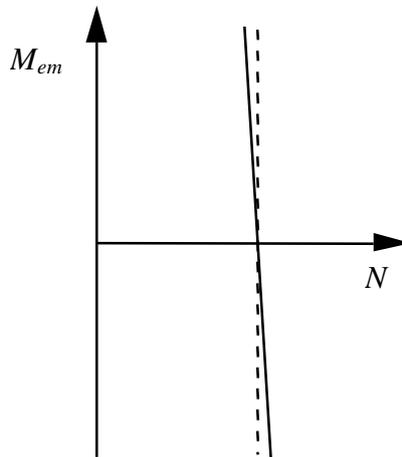


Figura 11.38. Característica electromecânica do motor derivação.

Nota: O anulamento ocasional da corrente de excitação, e por consequência do fluxo de excitação, traz problemas graves. Com efeito, a partir da equação 11.28 pode verificar-se que a velocidade tende para infinito. Diz-se que o motor embala. Na realidade, o embalamento do motor nesta situação depende da carga mecânica pedida e só se verifica se o binário pedido for pequeno. Quando este binário for grande a máquina não desenvolve o binário correspondente para a aceleração e acaba por parar. Como a força electromotriz é nula, as correntes do induzido tomam valores muito elevados que, a manterem-se por tempos consideráveis, podem danificar seriamente o induzido. Por esta razão não se devem colocar fusíveis no circuito de excitação das máquinas de excitação derivação. O mesmo se passa com as máquinas de excitação independente.

11.5.2 Motores de excitação independente.

As características de um motor de excitação independente são análogas às de um motor de excitação derivação quando as tensões de alimentação U_a e U_f se mantiverem constantes. As características destes dois tipos de motores são diferentes quando se pretender variar as duas tensões de alimentação independentemente uma da outra.

No motor derivação a alteração da tensão de alimentação faz variar simultaneamente o fluxo de excitação e a tensão do induzido. O motor de excitação separada tem mais um grau de liberdade, e permite variar independentemente o fluxo de excitação mantendo a tensão do induzido constante e vice-versa.

O motor derivação tem a vantagem de necessitar apenas de uma fonte de energia, enquanto que o motor de excitação independente necessita de duas fontes de alimentação. Tem contudo um grau de liberdade de controlo suplementar.

11.5.3 Motores de excitação em série.

Nas máquinas de excitação em série colocam-se os enrolamentos do indutor e do induzido em série. Assim, ambos os enrolamentos são percorridos pela mesma corrente.

$$I_a = I_f = I \quad \text{e} \quad U = U_f + U_a \quad (11.30)$$

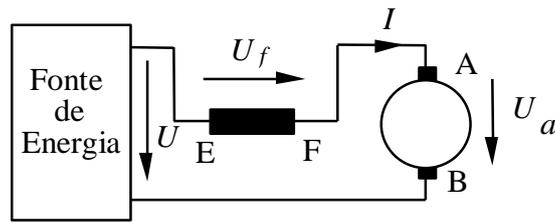


Figura 11.39. Motor série.

Em regime permanente a equação do equilíbrio das tensões escreve-se:

$$U = E + (r_a + r_f)I \quad (11.31)$$

O binário electromagnético é proporcional à corrente que passa no induzido $I_a=I$ e ao fluxo indutor ϕ . Como o fluxo ϕ é proporcional à corrente ($I_f=I$), deduz-se facilmente que (desprezando a saturação) se tem:

$$M_{em} = K_1 I^2 \quad (11.32)$$

A característica de binário $M_{em}=f(I)$, figura 11.40, apresenta um andamento crescente, aproximadamente parabólico em função da corrente.

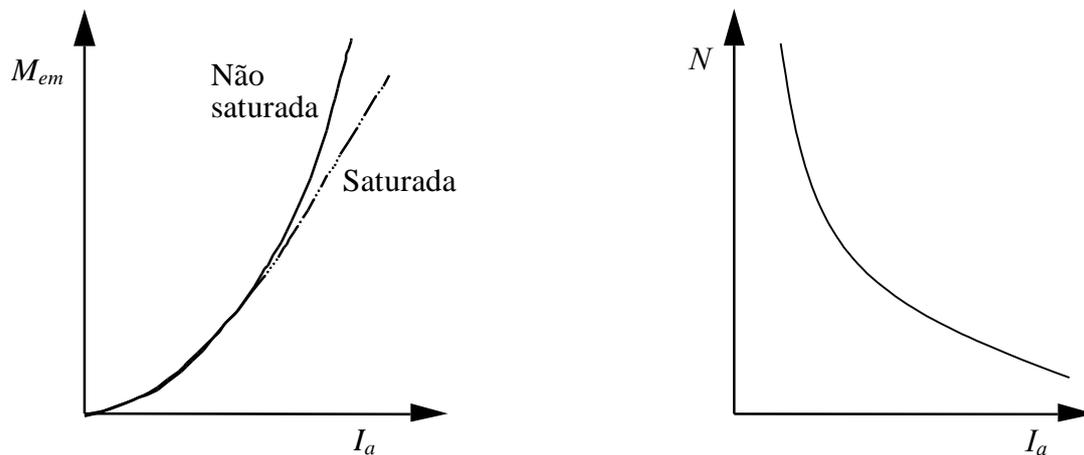


Figura 11.40. Características do motor série.

De facto, quando a corrente for muito elevada, a característica fica aproximadamente linear devido à saturação magnética.

A característica de velocidade $N=f(I)$, pode obter-se da equação 11.31:

$$N = \frac{U - (r_a + r_f)I}{K_2 I} \quad (11.33)$$

Para uma tensão dada, N varia segundo uma lei hiperbólica em função de I (figura 11.40)

A característica electromecânica pode obter-se pela combinação destas duas curvas. Obtém-se o gráfico da figura 11.41.

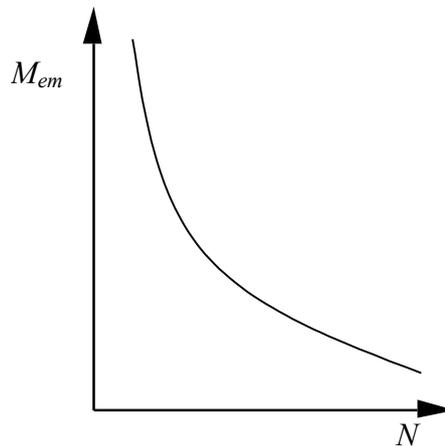


Figura11.41. Característica electromecânica do motor série.

Quando o binário de carga diminuir, a velocidade torna-se muito elevada e o motor corre o risco de embalar. O emprego de um motor série é desaconselhado em casos onde a carga se possa anular. É utilizado tradicionalmente em situações de tracção eléctrica, devido ao seu binário de arranque e devido ao facto de ser um motor “auto-regulador em potência”. Isto significa que, na vizinhança do funcionamento nominal, o binário varia em função da velocidade N , de tal modo que a potência fornecida é aproximadamente constante.

11.5.4 Máquinas de excitação composta.

Na prática, as máquinas de corrente contínua são frequentemente utilizadas em excitação composta, isto é, a excitação é criada por um enrolamento derivação CD e por um enrolamento série EF. Isto pode ser realizado de duas maneiras:

- Quando o enrolamento de excitação em derivação é ligado aos bornes do induzido e o enrolamento série é ligado em série com os bornes da saída. Designa-se este modo por “curta derivação” (figura 11.42).
- Quando o enrolamento de excitação em derivação se liga aos bornes da fonte. O enrolamento série está ligado entre um terminal de saída e um terminal do induzido. Designa-se este modo por “longa derivação” (figura 11.43).

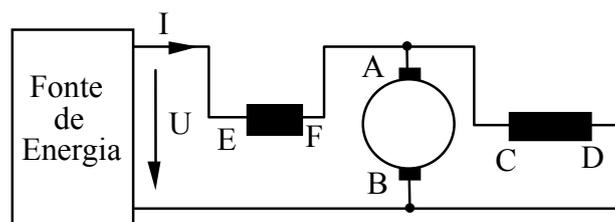


Figura11.42. Excitação composta. Curta derivação.

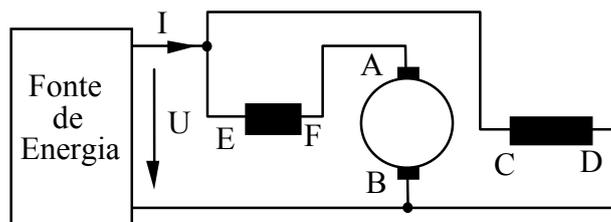


Figura11.43. Excitação composta. Longa derivação.

A máquina diz-se de “fluxo adicional” quando as duas excitações CD e EF agem no mesmo sentido, isto é,

as forças magnetomotrizes criadas por estes dois enrolamentos têm o mesmo sinal.

Diz-se que a máquina é de “fluxo diferencial” quando as duas excitações CD e EF agem em sentidos contrários.

A "razão de equivalência" r_α é a razão do número de espiras dos dois enrolamentos série e paralelo.

$$r_\alpha = \frac{n_s}{n_p} \quad (11.34)$$

As máquinas de excitação composta permitem obter características eléctricas ou mecânicas diferentes das máquinas série ou paralelo e bem adaptadas a um determinado tipo de aplicação desejado.

A figura 11.44 mostra o andamento das variações de binário fornecidas por quatro tipos de motores, supostos da mesma potência à carga nominal.

A figura 11.45 mostra o andamento das variações de velocidade destes mesmos quatro motores.

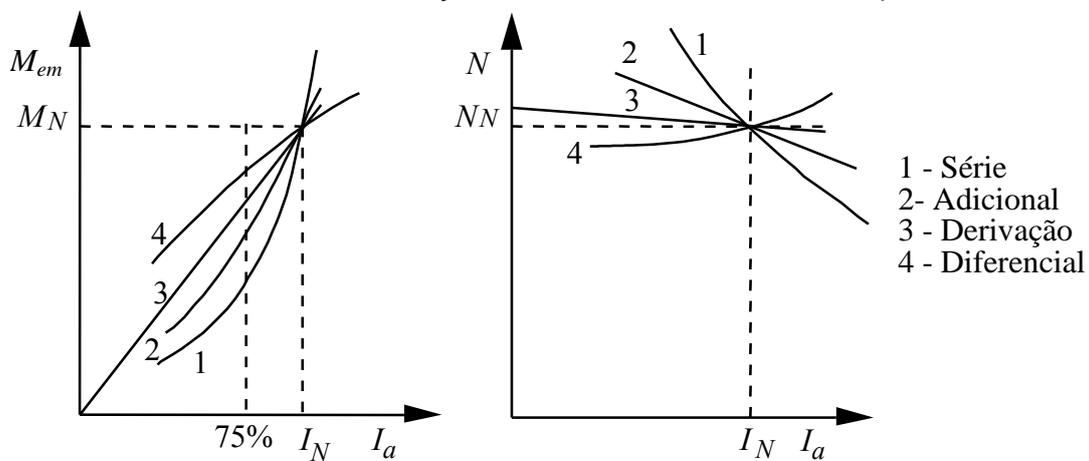


Figura 11.44. Características de binário. Figura 11.45. Características de velocidade.

Exemplo 11.4

Um motor série, com uma resistência do induzido de $r_a=0,2 \Omega$, e com uma resistência do indutor série de $r_f=0,1 \Omega$, encontra-se alimentado sob uma tensão constante de 220 V. A reacção do induzido é desprezável e o circuito magnético não se encontra saturado. À velocidade de 1000 rpm consome uma corrente de 50 A.

- a) Qual o binário electromagnético desenvolvido?
- b) Qual será a velocidade desta máquina N_2 se a corrente consumida passar para metade ($I_2=25$ A)?
- c) Na situação da alínea b) determine qual o novo valor do binário desenvolvido.

Resolução.

a) O binário electromagnético pode ser determinado pela relação:

$$EI_a = M_{em}\omega_m$$

Assim:

$$E = U - (r_a + r_f)I_a = 220 - (0,2 + 0,1) \times 50 = 205 \text{ V}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{60} 1000 = 104,72 \text{ rad/s} \text{ donde}$$

$$M_{em} = \frac{EI_a}{\omega_m} = \frac{205 \times 50}{104,72} = 97,88 \text{ Nm}$$

b) Para um motor série não saturado, a f.e.m. é proporcional ao produto da corrente pela velocidade. Assim:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{I_2 N_2}{I_1 N_1}$$

como

$$E_2 = 220 - 0,3 \times 25 = 212,5 \text{ V}$$

tem-se

$$N_2 = N_1 \frac{I_1 E_2}{I_2 E_1} = 1000 \frac{50 \cdot 212,5}{25 \cdot 205} = 2073 \text{ rpm}$$

Nota: A velocidade passou a ser um pouco superior ao dobro da velocidade inicial.

c) Como o binário é proporcional ao quadrado da corrente, tem-se:

$$M_2 = M_1 \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^2 = \frac{M_1}{4} = 24,47 \text{ Nm}$$

Nota: Como a corrente passou para metade e se manteve a tensão de alimentação constante, então a potência pedida à fonte de energia passou para metade. Por outro lado, como a velocidade passou para o dobro e o binário foi reduzido para um quarto do valor inicial, a potência mecânica fornecida ($P_m = M_{em} \omega_m$) passou também para metade.

11.5.5 Ajuste de velocidade dos motores de corrente contínua

Em aplicações industriais é muito importante a possibilidade de regular a velocidade de rotação de um motor.

Partindo da equação que relaciona a velocidade com as outras grandezas da máquina. Tem-se:

$$N = \frac{U_a - r_a I_a}{K_E \phi} \quad (11.28)$$

Para uma dada corrente I_a , isto é, para uma dada carga mecânica, e uma dada excitação ϕ , a velocidade de rotação N depende de U_a , de r_a e de ϕ .

Daqui resultam três processos de regular a velocidade de um motor de corrente contínua.

a) Actuando em r_a

Este processo é designado por controlo reostático e consiste em aumentar a resistência do induzido introduzindo um reóstato em série com ele. A velocidade diminui proporcionalmente à queda de tensão $r_a I_a$. É caracterizado por um grande desperdício de energia resultante das perdas do reóstato e pelo correspondente aumento da temperatura. Normalmente é difícil introduzir processos de automação. É contudo um método simples e ainda utilizado.

b) Actuando em ϕ

Com um reóstato em série com o enrolamento de excitação, um aumento de r_f traduz-se (para U_a constante) por uma diminuição da corrente indutora e por consequência uma redução do fluxo de excitação. Uma diminuição do fluxo traduz-se segundo a expressão 11.28 por um aumento da velocidade. Este método é utilizado essencialmente a velocidades elevadas como se verá mais à frente.

c) Actuando em U_a

Motor de excitação em derivação

Se se diminuir a tensão de alimentação, a corrente indutora I_f diminui e portanto o fluxo ϕ diminui também. A velocidade não irá sofrer grande variação em condições de linearidade do circuito magnético.

Motor de excitação separada

Se o fluxo se mantiver constante, desprezando o termo $r_a I_a$ em face de U_a , pode concluir-se que a velocidade é, em primeira aproximação, proporcional à tensão de alimentação U_a . Assim, pode aumentar-se ou diminuir a velocidade actuando directamente na tensão de alimentação. Este processo requer uma fonte de tensão contínua de amplitude variável o que é facilmente realizável, hoje em dia, recorrendo a montagens com dispositivos de electrónica de potência.

11.5.5.1 O sistema Ward-Leonard estático

O sistema Ward-Leonard estático é hoje largamente utilizado na indústria. É constituído por uma máquina de corrente contínua de excitação independente controlada por dispositivos de electrónica de potência. Normalmente estes dispositivos são pontes rectificadoras controladas. Obtém-se uma fonte de tensão contínua regulável electronicamente o que facilita a introdução de sistemas de controlo.

A versão mais completa, consiste em utilizar dois rectificadores de quatro quadrantes, e controlar a tensão do induzido U_a e a tensão do indutor U_f simultaneamente. A execução básica encontra-se representada na figura 11.46.

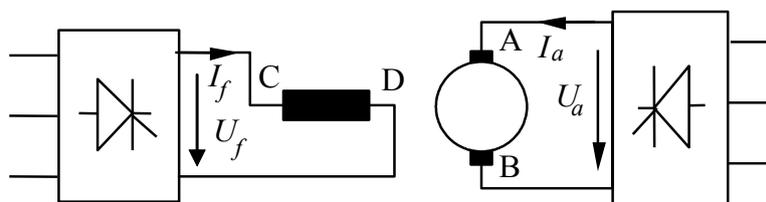


Figura 11.46. Sistema Ward-Leonard estático.

A utilização dos dois rectificadores não é feita de uma forma arbitrária. Com efeito, existem duas zonas distintas de controlo de velocidade.

a) Zona de binário máximo utilizável.

Nesta zona o fluxo de excitação é mantido constante e no valor máximo. A velocidade é controlada actuando na tensão U_a e por conseguinte na ponte de rectificação que alimenta o induzido. Como foi visto atrás, a velocidade é aproximadamente proporcional à tensão U_a .

Como o fluxo é máximo e a corrente do induzido (que depende da carga mecânica) pode atingir o valor máximo (normalmente o seu valor nominal), o binário máximo está disponível. Este depende do produto do fluxo ϕ e da corrente do induzido I_a . Por sua vez, a potência da máquina está limitada e depende da velocidade que se desejar.

b) Zona de potência máxima utilizável.

Quando a tensão do induzido atingir o valor máximo admissível, a velocidade não poderá continuar a ser aumentada pelo processo descrito na alínea a). A tensão do induzido teria de ultrapassar o valor máximo para o qual a máquina foi construída. Neste caso mantém-se a tensão no induzido constante e no seu valor máximo e diminui-se o fluxo de excitação. A potência da máquina está disponível, pois a corrente pode atingir o valor máximo e a tensão de alimentação é sempre igual ao valor máximo. O binário disponível está agora limitado pela limitação do fluxo de excitação.

A figura 11. 47 ilustra a utilização destas duas zonas.

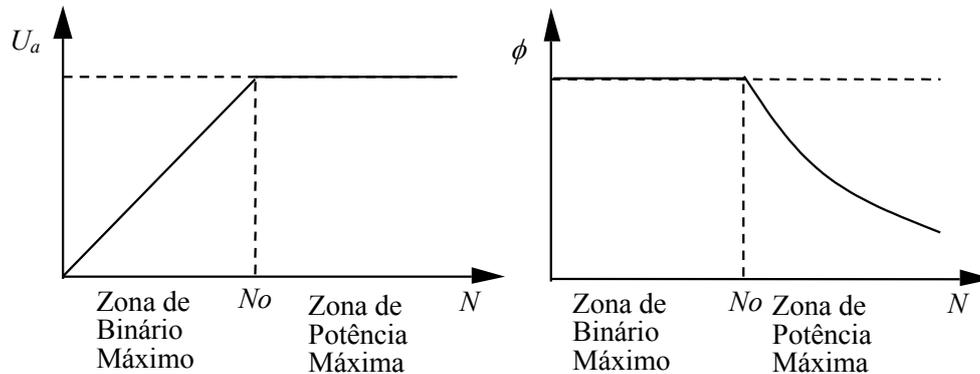


Figura11.47. Zonas de regulação de velocidade no sistema Ward-Leonard estático.

Existe ainda uma terceira zona a velocidades elevadas. Nesta zona, designada por zona de funcionamento série, é necessário reduzir também o valor máximo da corrente do induzido, pois o fluxo é já muito baixo, e o colecter perde capacidade de comutação.

Resumindo tem-se:

Na zona de binário máximo o fluxo é constante e a velocidade é regulada actuando na tensão de alimentação. A variação da tensão que se deverá impor é uma recta pois a tensão e a velocidade são proporcionais. A potência da máquina fica reduzida proporcionalmente ao valor de que se reduziu a tensão.

Na zona de potência máxima a tensão do induzido é mantida no seu valor máximo e a velocidade é regulada actuando no fluxo de excitação ϕ . Obtém-se um andamento hiperbólico pois a velocidade é inversamente proporcional ao fluxo de excitação.

11.5.6 Arranque dos motores de corrente contínua.

O arranque dos motores de corrente contínua não deve ser feito aplicando directamente toda a tensão aos bornes do induzido. Se tal fosse realizado, a corrente instantânea consumida seria muito elevada, (5 a 12 vezes a corrente nominal) o que seria prejudicial e poderia deteriorar o colecter ou a fonte de alimentação da máquina.

Existem três possibilidades práticas de reduzir a corrente de arranque de um motor de corrente contínua:

- a) Sob tensão reduzida. É necessário dispor de uma fonte de tensão regulável. Vai-se subindo a tensão da máquina à medida que esta for aumentando a velocidade.
- b) Utilizando um reóstato de arranque. Consiste em inserir resistências em série no circuito do induzido. Estas resistências serão sucessivamente curto-circuitadas manualmente à medida que o motor for aumentando a sua velocidade.
- c) Por processos automáticos. Podem ser baseados nos princípios descritos na alínea a) ou na alínea b). Podem utilizar elementos de electrónica ou ser baseados em relés electromecânicos.

11.5.6.1 Arranque reostático do motor série.

O esquema de ligações encontra-se representado na figura 11.48. Quando o cursor se encontrar na posição 1 a resistência total do circuito vale $R_1+R_2+R_3+R_4+rf+r_a$. A corrente inicialmente é reduzida a valores aceitáveis e o motor começa a aumentar a sua velocidade.

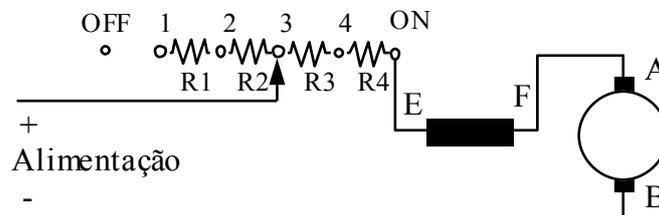


Figura 11.48. Arranque reostático de um motor série.

Se se representarem as características de velocidade correspondentes a cada valor de resistência (figura 11.49), a corrente varia segundo A1B1; Quando a corrente atingir o seu valor nominal I_N , no ponto B1, muda-se de ponto. Passa-se então ao ponto A2, que se encontra sob uma outra característica de velocidade a que corresponde uma resistência de menor valor. Continua-se o mesmo processo até à característica de velocidade correspondente ao ponto (ON figura 11.48 e M figura 11.49).

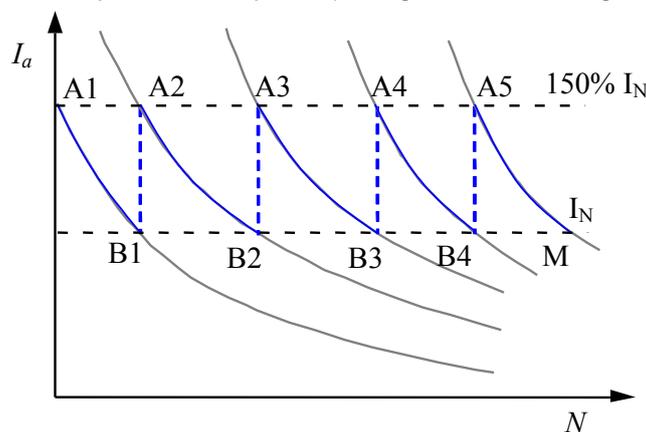


Figura 11.49. Variação de corrente consumida em função da velocidade durante um arranque reostático do motor série.

Habitualmente, calculam-se as resistências R_1 , R_2 , R_3 , e R_4 de tal modo que a corrente máxima consumida (pontos A1, A2, A3, A4, A5) seja uma percentagem razoável da corrente nominal (150 a 200%).

11.5.6.2 Arranque reostático do motor de excitação derivação.

No motor de excitação derivação o processo de arranque segue um princípio semelhante ao do motor série. O reóstato de arranque é em geral montado de modo que sirva de interruptor e que garanta que o circuito de campo nunca seja aberto (figura 11.50). Com efeito, como se viu atrás, se a máquina se encontrar com uma carga mecânica pequena quando o circuito de campo for interrompido a velocidade pode atingir valores muito elevados podendo deteriorar-se. Nesta situação diz-se que o motor embala. Este fenómeno é semelhante ao do motor série quando não tiver carga mecânica.

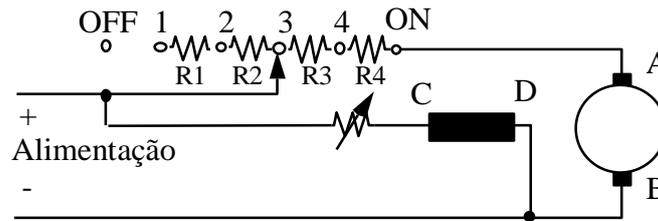


Figura 11.50. Arranque reostático de um motor de excitação derivação.

As curvas correspondentes a este caso encontram-se representadas na figura 11.51.

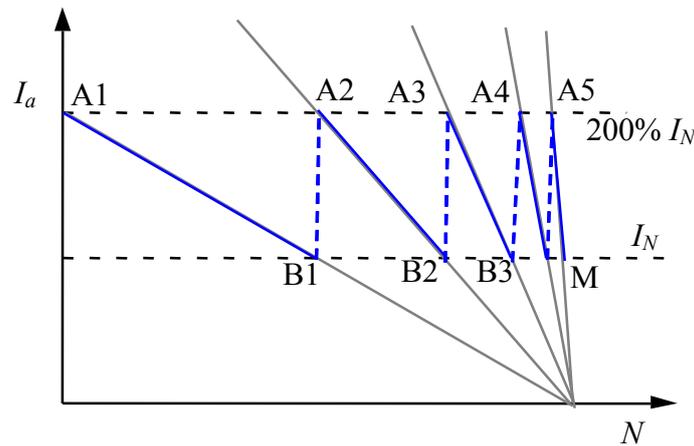


Figura 11.51. Variação de corrente do induzido em função da velocidade durante o arranque de um motor de excitação derivação.

O princípio de funcionamento e o método de cálculo das resistências são análogos aos do motor série.

11.5.7 Inversão do sentido de marcha

A inversão do sentido de marcha, ou a troca do sentido de rotação do rotor faz-se de forma diferente consoante o tipo de motor.

Motor de excitação independente

Para inverter o sentido de marcha de um motor de excitação independente pode agir-se de um dos dois modos:

- a) Trocar a polaridade da tensão de alimentação do induzido.
- b) Trocar a polaridade da corrente de excitação.

Motor de excitação em derivação

Neste caso, a inversão da tensão de alimentação alteraria simultaneamente o sentido do fluxo de excitação e da tensão do induzido, e por consequência a velocidade manteria o mesmo sentido. Assim é necessário dispor de um dispositivo mecânico ou electrónico que permita trocar apenas uma destas duas grandezas.

Motor de excitação em série

Tal como no caso do motor derivação, a inversão da tensão de alimentação irá inverter simultaneamente o sentido do fluxo e da tensão do induzido. A inversão do sentido de marcha é realizada neste caso também recorrendo a dispositivos mecânicos ou electrónicos que invertem apenas o sentido da corrente no circuito de excitação.

11.6 Motor série universal

Como o binário no motor série é proporcional ao quadrado da corrente, este será sempre positivo independentemente do sentido desta. Assim, esta máquina poderá ser alimentada em corrente alternada estando o seu funcionamento ilustrado na figura 11.52. O dimensionamento da máquina deverá ser apropriado para tal efeito. Neste caso a máquina designa-se por motor série universal. Distinguem-se duas aplicações:

a) Em tracção eléctrica. Nesta situação os motores têm potências elevadas. A frequência de alimentação é a frequência industrial. A catenária é alimentada a uma tensão elevada (por exemplo 25 kV) reduzindo-se a tensão aplicada à máquina através de um transformador instalado na locomotiva. Para melhorar a comutação utilizou-se no passado (e nalguns casos ainda se encontram instalações em funcionamento) uma frequência de alimentação de $(16+2/3)$ Hz o que corresponde a $50/3$ Hz.

b) Em máquinas de pequena potência aplicadas em electrodomésticos, máquinas ferramentas, etc.

O andamento do binário no tempo é composto por um valor constante, igual ao valor médio, que depende do valor eficaz da corrente, e um termo oscilatório de frequência dupla da frequência da corrente de alimentação, isto é 100 Hz.

Supondo que o momento de inércia é suficientemente elevado para que a velocidade não sofra variação significativa num período, a força electromotriz, que é proporcional à velocidade e ao fluxo, será agora uma grandeza alternada com a forma de onda igual à forma de onda do fluxo. Como o fluxo é criado pela corrente alternada, a força electromotriz será também alternada e estará em fase com a corrente.

O diagrama vectorial correspondente encontra-se na figura 11.53. Note-se que a tensão estará sempre em avanço em relação à corrente. O motor série universal tem sempre um carácter indutivo.

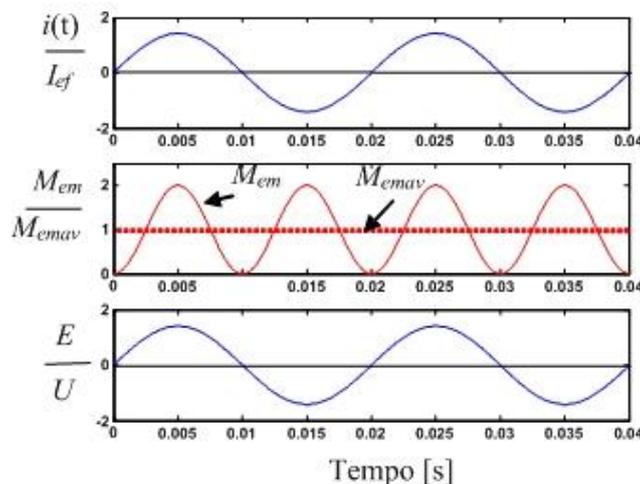


Figura 11.52. Princípio do motor série universal.

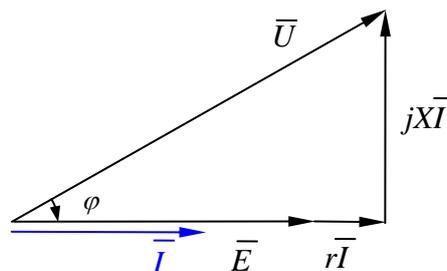


Figura 11.53. Diagrama vectorial do funcionamento do motor série universal.

Tendo em conta o diagrama vectorial da figura 11.53 pode escrever-se:

$$\begin{aligned}
 E &= k\phi\omega_m = k_T I \omega_m \\
 M_{em} &= k_T I^2 \\
 U^2 &= (k_T I \omega_m + rI)^2 + X^2 I^2 \\
 Z &= \frac{U}{I} = \sqrt{(k_T \omega_m + r)^2 + X^2} \\
 \omega_m &= \sqrt{\frac{U^2}{k_T M_{em}} - \frac{X^2}{k_T^2}} - \frac{r}{k_T}
 \end{aligned}
 \tag{11.41}$$

Para uma pequena máquina de cerca de 300 W de potência nominal, obtêm-se as características apresentadas na figura 11.54.

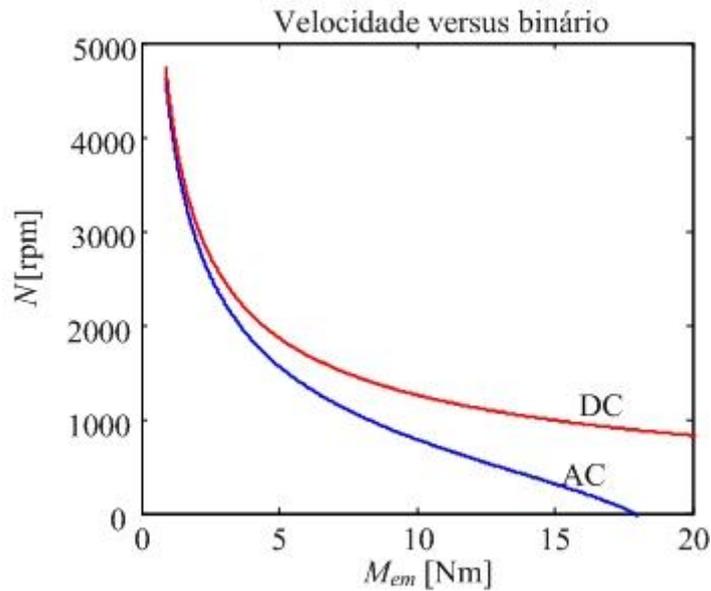


Figura 11.54. Características electromecânicas de um motor série universal.

Note-se que, quando este motor é alimentado com corrente alternada, a velocidade varia mais acentuadamente com o binário. Este facto deve-se à queda de tensão indutiva que se verifica no primeiro caso.

11.7 Exercícios

11.1. Sob um pólo de excitação de uma máquina de corrente contínua, o campo médio de indução magnética é de 0,8 T. Sabe-se que o diâmetro do rotor é 20 cm e que os condutores do induzido estão colocados a uma profundidade de 1 cm tendo um comprimento útil de 15 cm.

- Calcular a força electromotriz induzida num condutor quando rodar a 1000 rpm.
- O condutor vai ser percorrido por uma corrente eléctrica de 1 A. Qual o valor da força que se exerce sobre ele?
- Calcule a potência eléctrica e a potência mecânica em jogo.

(Solução: a) $E = 1,13 \text{ V}$ b) $f = 0,12 \text{ N}$ c) $P_{mec} = 1,13 \text{ W}$ $P_{ele} = 1,13 \text{ W}$)

11.2. Um dínamo de 4 pólos tem um induzido com 260 condutores activos. O enrolamento do induzido é do tipo imbricado ($p=a$). Quando a máquina rodar a 1500 rpm, a sua tensão em vazio vale 100 V.

- Qual é o “fluxo por pólo”
- Qual será o binário electromagnético quando circular uma corrente no induzido de 50 A?

(Solução: a) $\phi = 15,4 \text{ mWb}$, b) $M_{em} = 31,85 \text{ Nm}$)

11.3. Um dínamo de excitação derivação de 10 kW - 220 V tem uma resistência do circuito do induzido $r_a = 0,3 \Omega$ e uma resistência do circuito de campo $r_f = 1500 \Omega$. A reacção magnética do induzido é desprezável. Qual é a f.e.m. deste dínamo quando debitar a sua potência nominal sob tensão nominal ?

(Solução: $E = 233,7 \text{ V}$)

11.4. Um motor de corrente contínua de excitação em derivação, quando alimentado a 300 V, roda em vazio a 3500 rpm e absorve 2 A da fonte que o alimenta. Quando se aplica uma determinada carga mecânica, a corrente do induzido sobe de 0,5 para 50 A e a velocidade desce para 3300 rpm.

- Determine o valor da resistência do induzido.
- Qual o valor das perdas mecânicas e no ferro?
- Qual o rendimento deste motor com a carga especificada?

(Solução: a) $r_a = 0,3428 \Omega$ b) $p_{mec} = 150 \text{ W}$ c) $\eta = 90,56\%$)

11.5. Um motor série, de resistência total (induzido + indutor) igual a $0,4 \Omega$, consome 75 A e roda a 400 rpm quando alimentado à tensão de 500 V. Qual será a sua velocidade de rotação, quando se variar a tensão para 600 V, sem modificar a carga (binário resistente constante) ?

(Solução: $N = 485 \text{ rpm}$)

11.6. Um motor de excitação derivação encontra-se alimentado com uma tensão de 280 V, e fornece uma potência mecânica de 20 kW. A resistência do induzido vale $r_a = 0,2 \Omega$ e a reacção magnética é desprezável. A corrente total consumida na linha de alimentação é de 80 A e a corrente do indutor é 3 A.

- a) Quais são as perdas mecânicas?
 b) O binário electromagnético foi reduzido para metade.
 b1. Qual o novo valor de corrente do induzido
 b2. Qual será a variação da velocidade em percentagem.

(Solução: a) $p_{mec} = 374,2 \text{ W}$ b1) $I_a = 38,5 \text{ A}$ b2) $(N_2 - N_1)/N_1 = 2,9\%$)

11.7. Uma máquina de corrente contínua de excitação independente vai ser usada, funcionando como carga mecânica, para ensaiar um motor assíncrono alimentado com conversor de frequência. Para isso irá funcionar como gerador debitando a energia gerada sobre uma resistência eléctrica. A 1500 rpm, ao fluxo nominal, corresponde uma tensão em vazio de 240 V. A resistência interna do induzido é 1 Ω .

- a) Calcular a resistência exterior de modo a exigir um binário de 15 Nm ao veio. Admita a situação de fluxo nominal.
 b) Considere que a velocidade de rotação vai ser variada actuando na frequência de alimentação da máquina de indução. Determine a relação entre o binário e a velocidade imposta pela máquina de corrente contínua.

(Solução: a) $R_{ext} = 23,5 \Omega$ b) $M_c = 15(N/1500)$)

11.8. Um motor série é utilizado para elevar uma massa de 500 kg à velocidade de 1 m/s. A massa é suspensa por um cabo de aço que se enrola num tambor de 30 cm de diâmetro. Este tambor encontra-se ligado ao motor série através de uma caixa de engrenagens de relação 1:10 (a velocidade mais elevada encontra-se do lado do motor). Desprezando as perdas de atrito, calcule:

- a) A velocidade de rotação do motor em rpm.
 b) O binário necessário para elevar a carga.
 c) A potência do motor eléctrico.
 d) Supondo que o motor é alimentado por uma fonte de tensão contínua de 300 V e que o seu rendimento é 85%, calcule a corrente absorvida.
 e) Sabendo que a corrente de arranque é cerca de 9 vezes a corrente calculada na alínea d), calcule a resistência a colocar em série com o induzido de modo a reduzir a corrente de arranque a 1,5 vezes a corrente referida.

(Solução: a) $N = 637 \text{ rpm}$ b) $M = 73,5 \text{ Nm}$ c) $P_{ele} = 4,9 \text{ kW}$ d) $I = 19,22 \text{ A}$ e) $R_{ext} = 8,67 \Omega$)

11.9. Considere uma máquina de corrente contínua de excitação independente com as seguintes características:

$$U_N = 220 \text{ V} \qquad I_a N = 110 \text{ A} \qquad N_N = 2000 \text{ rpm} \qquad P_{exc} = 1 \text{ kW}$$

Em regime nominal, e em funcionamento como gerador, esta máquina tem um rendimento de 80%. Quando se retira a carga, a tensão em vazio passa para 260V.

Sabe-se que as perdas mecânicas e no ferro são proporcionais ao quadrado da velocidade.

- a) Calcule as perdas totais deste gerador na situação referida.
 b) Calcule as perdas mecânicas relativas à situação em análise.

c) Calcule o rendimento máximo e a corrente a que ocorre sabendo que a máquina funciona como gerador à velocidade de 2000 rpm.

d) Esta máquina vai funcionar como motor de excitação independente.

d.1) Quais os valores das seguintes grandezas:

Potência nominal, velocidade nominal, binário nominal e rendimento nominal.

d.2) Este motor encontra-se alimentado com uma fonte de tensão de 200 V e a funcionar à velocidade de 3000 rpm e fornecendo a sua potência nominal. Calcule a corrente de excitação relativa ao valor nominal. Considere desprezáveis as perdas mecânicas)

(Solução: a) perdas = 6,05 kW b) $p_{mec} = 650 \text{ W}$ c) $I_a = 67,36 \text{ A}$ $\eta_{max} = 82,78\%$ b) $P_N = 19150 \text{ W}$
 $N_N = 1384 \text{ rpm}$ $M_{emN} = 132 \text{ Nm}$ $\eta_N = 76 \%$ c) $I_f / I_{fN} = 0,397$)

11.10. Um motor série universal tem uma potência nominal de 300 W. É alimentado à tensão da rede eléctrica 230 V, 50 Hz e roda à velocidade de 4500 rpm. Esta máquina tem uma resistência interna de 5 Ω e uma reactância de 20 Ω .

a) Calcule o valor do binário nominal.

b) Determine a corrente de arranque desta máquina.

(Solução: a) $M_{em} = 0,64 \text{ Nm}$ b) $I_{arr} = 11,16 \text{ A}$)

Nomenclatura

Letra minúscula – Grandezas variantes no tempo

Letra maiúscula – Grandezas constantes no tempo

\bar{X} - Amplitude complexa de uma grandeza x

X – Módulo de \bar{X}

\bar{X}^* - Conjugado da amplitude complexa \bar{X}

A – Área

a – número de pares de circuitos derivados

a – Factor arbitrário para a transformação de circuitos equivalentes da máquina de indução

B – Campo de indução magnética

B_r – Campo radial

B_θ – Campo tangencial

B_{av} – Campo de indução médio

B_{max} – Valor máximo do campo B

c – velocidade da luz

C – Capacidade

d – Distância entre duas armaduras de um condensador

D – Ligação triângulo

e - Força electromotriz num condutor

e_1 – Força electromotriz no primário devida ao fluxo principal

e_2 – Força electromotriz no secundário devida ao fluxo principal

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ - Versores do sistema de coordenadas cilíndricas

E – Força electromotriz

E_f – Força electromotriz em vazio ou de excitação

E_i – campo eléctrico induzido

f – Força sobre um condutor

f - Frequência

$F_{e.m.}$ – Força electromotriz

$F_{e.m}$ – Força de origem magnética

F_{mm} – Força magnetomotriz

F_p – Factor de potência

G – Condutância

i – Representa uma corrente genérica

- i_1 – Valor instantâneo da corrente no primário de um transformador
- i_2 – Valor instantâneo da corrente no secundário de um transformador
- i_m – Corrente de magnetização
- $i_{seccção}$ – Corrente numa secção do induzido da máquina de corrente contínua
- I – Valor eficaz da corrente ou valor de uma corrente contínua
- I_1 – Valor eficaz da corrente no primário do transformador ou no estator da máquina de indução
- I_2 – Valor eficaz da corrente no secundário do transformador ou no rotor da máquina de indução
- I_a – Componente activa da corrente
- I_a – Corrente no induzido de máquina de corrente contínua
- I_{cc} – Corrente de curto-circuito
- I_f – Corrente no circuito indutor de máquina de corrente contínua
- I_F – Corrente na fonte
- I_F – Corrente numa fase
- I_L – Valor eficaz da corrente de linha
- I_N – Valor da corrente nominal
- I_r – Componente reactiva da corrente
- I_t – Corrente total
- J – Momento de inércia
- J_i – Correntes fictícias
- k – razão de transformação (ou relação de)
- k_e – factor de enrolamento
- K_m – Factor de sobrecarga do motor assíncrono
- K_{arr} – Multiplicidade de binário de arranque
- ℓ - Comprimento
- l_{d1} – Coeficiente de indução de dispersão do primário do transformador ou do estator de uma máquina de indução
- l_{d2} – Coeficiente de indução de dispersão do secundário do transformador ou do rotor de uma máquina de indução
- L – Coeficiente de auto-indução
- L_s – Coeficiente de indução cíclico
- L_{1m} – Coeficiente de indução que representa o fluxo principal no transformador
- L_M – Coeficiente de indução que representa o fluxo principal numa máquina de indução
- L_{cc} – Indutância de curto-circuito
- m – relação de transformação do autotransformador reductor
- M – Coeficiente de indução mútua

M – Número de malhas de um circuito
 M_{arr} – Binário de arranque
 M_c – Binário de carga
 M_{em} – Binário electromagnético
 $M_{máx}$ – Binário máximo
 M_{maxM} – Binário máximo em funcionamento motor
 M_{maxG} – Binário máximo em funcionamento gerador
 M_N – Binário nominal
 M_{tr} – Binário da gaiola de trabalho
 n – Número de elementos de um circuito
 n – velocidade de rotação em rotações por segundo
 N – Velocidade de rotação em rotações por minuto
 N – Número de espiras
 N – Número de nós num circuito
 N_1 – Número de espiras do primário de um transformador
 N_2 – Número de espiras do secundário de um transformador
 $N_{eq} = k_e \times N$ – Número de espiras equivalente
 N_{syn} – Velocidade de sincronismo em rotações por minuto
 p – número de pares de pólos
 p – potência instantânea
 p_1 – potência instantânea no primário de um transformador
 p_2 – potência instantânea no secundário de um transformador
 p_{fe} – Perdas no ferro
 p_{cu} – Perdas no cobre
 p_{mec} – perdas mecânicas
 p_{comp} – perdas complementares
 P – Potência activa
 P_1 – Potência de entrada
 P_2 ou P_u – Potência útil
 P_0 – Perdas constantes
 P_e – Potência que atravessa o entreferro
 P_{em} – Potência electromagnética
 P_{Jr} – Perdas de Joule no rotor
 P_{ext} – Potência que vai para o exterior através dos anéis do rotor
 $P_{máx}$ – Potência máxima

P_N – Potência nominal

q – Carga eléctrica

Q – Potência reactiva

Q_C – Potência reactiva fornecida por um condensador

R_{1fe} – Resistência que representa as perdas no ferro de um transformador ou máquina de indução. Esta coloca-se em paralelo

r_i – Resistência interna

r_m – Resistência que representa as perdas no ferro de um transformador ou máquina de indução. Esta coloca-se em série

r_1 – Resistência do primário do transformador ou do estator de uma máquina de indução

r_2 – Resistência do secundário do transformador ou do rotor de uma máquina de indução

r_a – resistência do induzido de uma máquina de corrente contínua

r_f – resistência do indutor de uma máquina de corrente contínua

r_N – Resistência de Norton

r_T – Resistência de Thevenin

$R_1 = ar_1$

$R_2 = a^2r_2$

R_{cc} – Resistência de curto-circuito

R – Valor genérico de resistência

R – Raio

R_{ad} – Resistência a colocar no exterior ligada ao rotor de uma máquina assíncrona

R_{eq} – Resistência equivalente

R_m – Relutância magnética

s – Escorregamento relativo

s_m – escorregamento de binário máximo

s_N – escorregamento correspondente à carga nominal

S – Potência aparente

S_N – Potência aparente nominal

T – Período

u – Representa uma tensão genérica

u_N – Tensão de Norton

u_T – Tensão de Thévenin

u_1 – Valor instantâneo da tensão no primário de um transformador

u_2 – Valor instantâneo da tensão no secundário de um transformador

U – Valor eficaz da tensão

- U_a – Tensão no induzido de máquina de corrente contínua
 U_c – Valor eficaz da tensão composta
 U_s – Valor eficaz da tensão simples
 U_f – Tensão no circuito indutor de máquina de corrente contínua
 U_N – Valor da tensão nominal (No caso de um sistema trifásico refere-se ao valor eficaz da tensão composta)
 v – velocidade periférica dos condutores
 V_A – Potencial eléctrico no ponto A
 $X_{1m} = \omega L_m$
 X_1 – Reactância de dispersão do primário do transformador ou do estator da máquina de indução
 X_2 – Reactância de dispersão do secundário do transformador ou do rotor da máquina de indução
 X_m – Reactância de magnetização
 X_M – Valor máximo de uma grandeza alternada sinusoidal
 X_{ef} – Valor eficaz de uma grandeza
 X_s – reactância síncrona
 w_p – Energia pneumática específica
 w_{es} – Energia eléctrica específica
 w_{mag} – Energia magnética específica
 W – Energia
 W_c – Energia eléctrica armazenada num condensador
 W_m – Energia magnética
 W'_m – Co-energia magnética
 Y – Ligação em estrela
 Z – Número total de condutores activos, Impedância
 \bar{Z} – Impedância complexa
 Z – Impedância (módulo de \bar{Z})
 ϕ – Fluxo útil por pólo, fluxo numa secção.
 τ – Passo polar
 F_{mm} – Força magnetomotriz
 F_a – Força magnetomotriz do induzido
 F_c – força magnetomotriz dos pólos de comutação
 F_m – Permeância magnética
 R_m – Relutância magnética
 δ – ângulo de potência ou ângulo de carga
 μ – Permeabilidade magnética

μ_r – Permeabilidade magnética relativa

μ_0 – Permeabilidade magnética do vazio

ϕ – fluxo magnético numa secção transversal

φ – ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente

ψ_1 – Valor instantâneo do fluxo ligado com o enrolamento do primário de um transformador

ψ_2 – Valor instantâneo da fluxo ligado com o enrolamento do secundário de um transformador

ψ – Fluxo ligado com um circuito eléctrico

ψ_f – Fluxo no induzido devido ao indutor

ω – Frequência angular

σ – Condutividade eléctrica

ω_m – velocidade de rotação em radianos por segundo

ω_{mm} – velocidade de rotação em radianos por segundo a que corresponde o binário máximo

ω_s – Frequência angular do estator

ω_r – Frequência angular do rotor

θ – Posição angular

ε – Queda de tensão devida à reacção magnética do induzido

ε – Constante do dieléctrico

η – Rendimento