



1. Com o objectivo de cotar os pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$  observou-se uma linha de nivelamento geométrico com o nível Zeiss Dini 22 apoiada nas marcas de nivelamento  $M_1$  e  $M_2$  de cotas 438.700 m e 436.610 m, respectivamente, conforme indicado na tabela. Determine as cotas ajustadas dos 6 pontos referidos supondo que a distância entre miras se manteve aproximadamente constante ao longo do percurso e que o aparelho foi sendo colocado a igual distância das miras.

Posição da mira	Leitura à rectaguarda	Leitura à frente
$M_1$	1.025 m	---
$P_1$	0.636 m	2.472 m
$P_2$	0.886 m	3.544 m
$P_3$	2.984 m	0.952 m
$P_4$	3.747 m	1.478 m
$P_5$	1.636 m	0.328 m
$P_6$	0.148 m	1.522 m
$M_2$	---	2.884 m

2. Pretende-se determinar as coordenadas planimétricas de um ponto P situado num ponto inacessível no topo de um edifício. Para o efeito, estacionou-se um teodolito nos pontos C e D e registaram-se as seguintes leituras:

Estação	Ponto visado	Leituras azimutais
C	P	138 <sup>g</sup> .036
	E	060 <sup>g</sup> .528
D	E	250 <sup>g</sup> .374
	P	363 <sup>g</sup> .260

Determine as coordenadas do ponto P sabendo que as coordenadas dos pontos C, D e E são:

	M (m)	P (m)
C	-2417.92	5690.92
D	-2329.17	5543.18
E	-2380.84	5428.06

3. Quando foi construído, o tabuleiro de uma ponte, que tem um declive constante de 4% (no sentido de A para D), era suportado por 4 pilares situados nos pontos A, B, C, D com alturas respectivamente iguais a 4.25 m, 10.50 m, 8.30 m e 7.00 m (valores medidos entre o tabuleiro e o terreno). Posteriormente ocorreu um deslizamento de terras na vizinhança da ponte, tendo os pilares ficado parcialmente subterrados; após o deslizamento, estacionou-se uma estação total num ponto E junto aos pilares e fizeram-se as seguintes observações para os pontos A', B', C' e D' na base dos pilares, sendo a altura do aparelho igual a 1.75 m e a altura visada igual a 1.80 m:

Ponto estação: E	Ponto visado	Leitura azimutal	Leitura zenital	Distância inclinada (m)
	A'	102 <sup>g</sup> .368	86 <sup>g</sup> .732	13.110
	B'	153 <sup>g</sup> .240	100 <sup>g</sup> .326	8.400
	C'	229 <sup>g</sup> .368	103 <sup>g</sup> .426	19.871
	D'	239 <sup>g</sup> .365	101 <sup>g</sup> .361	30.393

Sabendo que após o deslizamento ficou visível apenas 1.19 m do pilar A, determine a altura dos pilares A, B, C, D que ficou debaixo de terra após o acidente.

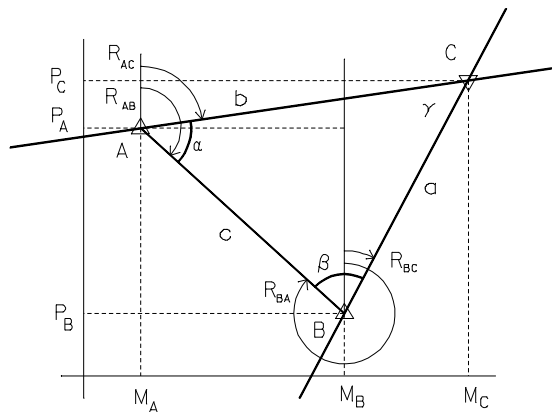
4. Na observação de uma poligonal fechada do ponto de vista geométrico de média precisão obteve-se o seguinte registo de campo. Conhecendo as coordenadas  $M_A=187.23$  m,  $P_A=278.44$  m,  $M_{E1}=187.66$  m,  $P_{E1}=207.73$  m, determine o erro de fecho angular da poligonal.

Estação	Ponto visado	Leitura azimutal	Distância (m)
E <sub>1</sub>	A	003 <sup>g</sup> .448	---
	E <sub>2</sub>	128 <sup>g</sup> .482	116.88
	E <sub>4</sub>	183 <sup>g</sup> .178	---
E <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	321 <sup>g</sup> .869	---
	E <sub>3</sub>	261 <sup>g</sup> .987	125.73
E <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	051 <sup>g</sup> .530	---
	E <sub>4</sub>	001 <sup>g</sup> .835	63.77
E <sub>4</sub>	E <sub>3</sub>	027 <sup>g</sup> .853	---
	E <sub>1</sub>	192 <sup>g</sup> .118	50.90

Formulário:

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \cotg R_{AC} - M_B \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}}$$

$$P_C = \frac{P_B \cotg R_{AC} - P_A \cotg R_{BC} + (M_A - M_B) \cotg R_{AC} \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}}$$



$$\begin{aligned}
 1. \quad \Delta_{M1-P1} &= 1.025 - 2.472 = -1.447 \text{ m} \\
 \Delta_{P1-P2} &= 0.636 - 3.544 = -2.908 \text{ m} \\
 \Delta_{P2-P3} &= 0.886 - 0.952 = -0.066 \text{ m} \\
 \Delta_{P3-P4} &= 2.984 - 1.478 = 1.506 \text{ m} \\
 \Delta_{P4-P5} &= 3.747 - 0.328 = 3.419 \text{ m} \\
 \Delta_{P5-P6} &= 1.636 - 1.522 = 0.114 \text{ m} \\
 \Delta_{P6-M2} &= 0.148 - 2.884 = -2.736 \text{ m}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta_{M1-P1} \\ \Delta_{P1-P2} \\ \Delta_{P2-P3} \\ \Delta_{P3-P4} \\ \Delta_{P4-P5} \\ \Delta_{P5-P6} \\ \Delta_{P6-M2} \end{aligned}} \right\} \Sigma \Delta = -2.118 \text{ m}$$

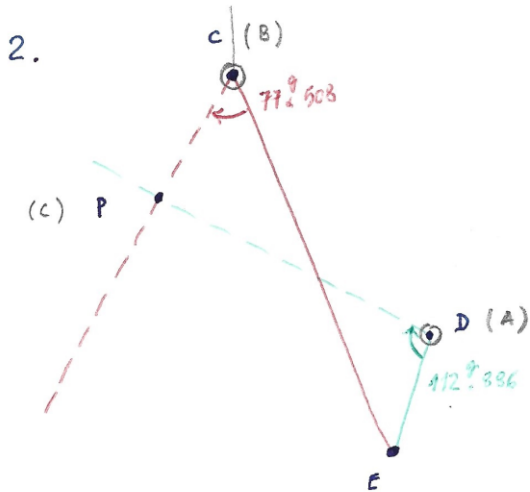
$$e_{\text{fecho}} = \text{Cota } M2 - \text{Cota } M1 - \Sigma \Delta = 436.610 - 438.700 + 2.118 = 0.028 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_{M1-P1} &= \Delta_{M1-P1} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = -1.443 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P1-P2} &= \Delta_{P1-P2} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = -2.904 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P2-P3} &= \Delta_{P2-P3} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = -0.062 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P3-P4} &= \Delta_{P3-P4} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = 1.510 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P4-P5} &= \Delta_{P4-P5} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = 3.423 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P5-P6} &= \Delta_{P5-P6} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = 0.118 \text{ m} \\
 \bar{\Delta}_{P6-M2} &= \Delta_{P6-M2} + \frac{e_{\text{fecho}}}{7} = -2.732 \text{ m}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{\Delta}_{M1-P1} \\ \bar{\Delta}_{P1-P2} \\ \bar{\Delta}_{P2-P3} \\ \bar{\Delta}_{P3-P4} \\ \bar{\Delta}_{P4-P5} \\ \bar{\Delta}_{P5-P6} \\ \bar{\Delta}_{P6-M2} \end{aligned}} \right\} \Sigma \bar{\Delta} = -2.090 \text{ m} = M2 - M1 = -2.090$$

$$\bar{e}_{\text{fecho}} = \text{Cota } M2 - \text{Cota } M1 - \Sigma \bar{\Delta} = 0.000 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cota } P1 &= \text{Cota } M1 + \bar{\Delta}_{M1-P1} = 437.257 \text{ m} \\
 \text{Cota } P2 &= \text{Cota } P1 + \bar{\Delta}_{P1-P2} = 434.353 \text{ m} \\
 \text{Cota } P3 &= \text{Cota } P2 + \bar{\Delta}_{P2-P3} = 434.291 \text{ m} \\
 \text{Cota } P4 &= \text{Cota } P3 + \bar{\Delta}_{P3-P4} = 435.801 \text{ m} \\
 \text{Cota } P5 &= \text{Cota } P4 + \bar{\Delta}_{P4-P5} = 439.224 \text{ m} \\
 \text{Cota } P6 &= \text{Cota } P5 + \bar{\Delta}_{P5-P6} = 439.342 \text{ m}
 \end{aligned}$$





$$\left\{ \begin{array}{l} R_{CP} = R_{CE} + 77.9508 \\ R_{CE} = \operatorname{atan} \frac{M_E - M_C}{P_E - P_C} = \operatorname{atan} \frac{-2380.84 + 2417.92}{5428.06 - 5690.92} = \operatorname{atan} \frac{37.08}{-262.86} = 191.078 \end{array} \right. \begin{array}{l} \swarrow 2^\circ \\ \end{array}$$

$$R_{CP} = 191.078 + 77.9508 = 268.028 \leftarrow R_{BC}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{DP} = R_{DE} + 112.886 \\ R_{DE} = \operatorname{atan} \frac{M_E - M_D}{P_E - P_D} = \operatorname{atan} \frac{-2380.84 + 2329.17}{5428.06 - 5543.18} = \operatorname{atan} \frac{-51.67}{-115.12} = 226.858 \end{array} \right. \begin{array}{l} \swarrow 3^\circ \\ \end{array}$$

$$R_{DP} = 226.858 + 112.886 = 339.744 \leftarrow R_{AC}$$

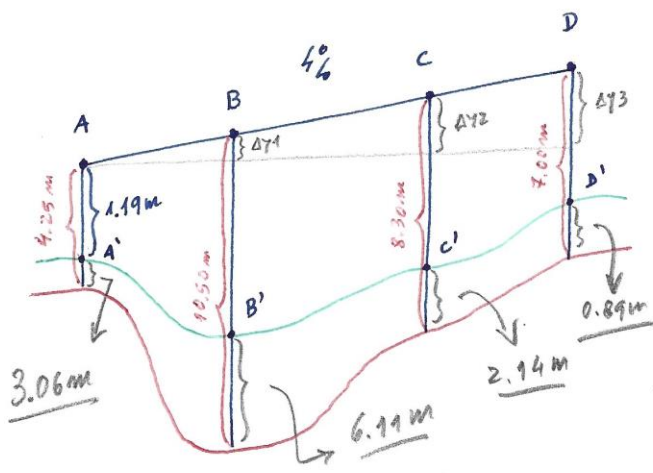
$$M_C = M_P = -2484.52 \text{ m}$$

$$P_C = P_P = 5655.10 \text{ m}$$



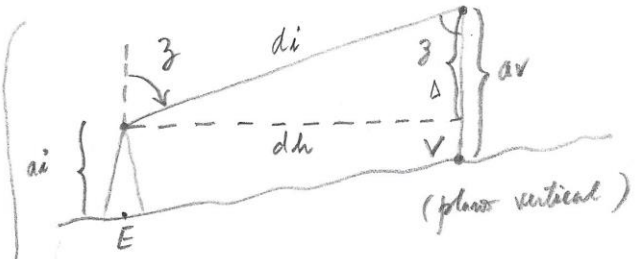
3.

Supondo que  $\begin{cases} ME = 100.00 \text{ m} \\ PE = 100.00 \text{ m} \\ CE = 100.00 \text{ m} \end{cases}$  e  $R\phi = 100.000$

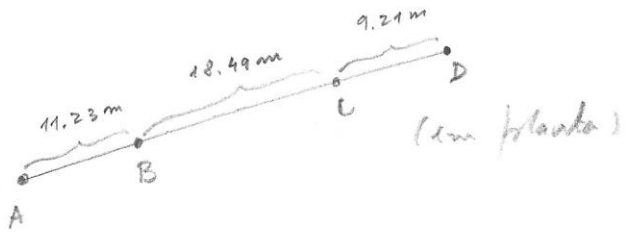


tem-se:

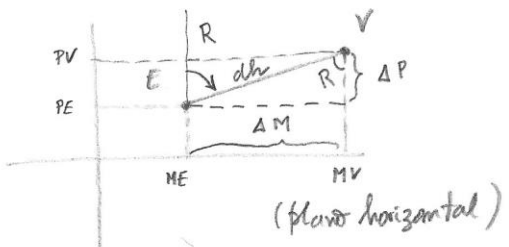
- $\begin{cases} MA = 112.80 \text{ m} \\ PA = 99.21 \text{ m} \\ CA = 102.66 \text{ m} \end{cases}$
- $\begin{cases} MB = 105.47 \\ PB = 93.63 \\ CB = 99.91 \end{cases}$
- $\begin{cases} MC = 90.73 \text{ m} \\ PC = 82.46 \text{ m} \\ CC = 98.88 \text{ m} \end{cases}$
- $\begin{cases} MD = 81.78 \text{ m} \\ PD = 75.68 \text{ m} \\ CD = 99.30 \text{ m} \end{cases}$



$\sin 3 = \frac{dh}{di} \Rightarrow dh = di \sin 3$   
 $\cos 3 = \frac{\Delta}{di} \Rightarrow \Delta = di \cos 3$   
 $\text{cota E} + ai + \Delta - av = \text{cota V}$

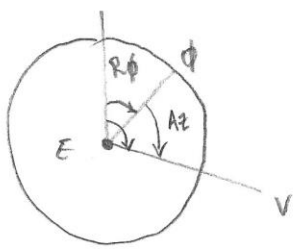


$\frac{4}{100} = \frac{\Delta Y1}{11.23} \Rightarrow \Delta Y1 = 0.45 \text{ m}$   
 $\frac{4}{100} = \frac{\Delta Y2}{29.72} \Rightarrow \Delta Y2 = 1.19 \text{ m}$   
 $\frac{4}{100} = \frac{\Delta Y3}{38.93} \Rightarrow \Delta Y3 = 1.56 \text{ m}$



$\sin R = \frac{\Delta M}{dh} \Rightarrow \Delta M = dh \sin R$   
 $\cos R = \frac{\Delta P}{dh} \Rightarrow \Delta P = dh \cos R$

- A:  $4.25 \text{ m} - 1.19 = 3.06 \text{ m}$
- B:  $10.50 \text{ m} - (\underbrace{102.66 + 1.19 + 0.45}_{\text{cota A}} - \underbrace{99.91}_{\text{cota B}}) = 6.11 \text{ m}$
- C:  $8.30 - (102.66 + 1.19 + 1.19 - 98.88) = 2.14 \text{ m}$
- D:  $7.00 - (102.66 + 1.19 + 1.56 - 99.30) = 0.89 \text{ m}$



$R = R\phi + Az$

```

> pi:=evalf(Pi);
                                 $\pi := 3.141592654$ 
> ME:=100.00;
                                ME := 100.00
> PE:=100.00;
                                PE := 100.00
> CE:=100.00;
                                CE := 100.00
> ROE:=100.000*pi/200.000;
                                ROE := 1.570796327
> ai:=1.75;
                                ai := 1.75
> av:=1.80;
                                av := 1.80
> MA:=ME+sin(86.732*pi/200.000)*13.110*sin((ROE+102.368)*pi/200.000);
                                MA := 112.8017642
> PA:=PE+sin(86.732*pi/200.000)*13.110*cos((ROE+102.368)*pi/200.000);
                                PA := 99.20693668
> CA:=CE+ai+cos(86.732*pi/200.000)*13.110-av;
                                CA := 102.6625607
> MB:=ME+sin(100.326*pi/200.000)*8.400*sin((ROE+153.240)*pi/200.000);
                                MB := 105.4742511
> PB:=PE+sin(100.326*pi/200.000)*8.400*cos((ROE+153.240)*pi/200.000);
                                PB := 93.62891497
> CB:=CE+ai+cos(100.326*pi/200.000)*8.400-av;
                                CB := 99.9069855
> MC:=ME+sin(103.426*pi/200.000)*19.871*sin((ROE+229.368)*pi/200.000);
                                MC := 90.73209077
> PC:=PE+sin(103.426*pi/200.000)*19.871*cos((ROE+229.368)*pi/200.000);
                                PC := 82.45519860
> CC:=CE+ai+cos(103.426*pi/200.000)*19.871-av;
                                CC := 98.8811486
> MD:=ME+sin(101.361*pi/200.000)*30.393*sin((ROE+239.365)*pi/200.000);
                                MD := 81.78011343
> PD:=PE+sin(101.361*pi/200.000)*30.393*cos((ROE+239.365)*pi/200.000);
                                PD := 75.68235083

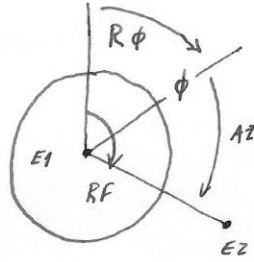
```



```
[ > CD:=CE+ai+cos(101.361*pi/200.000)*30.393-av;  
      CD := 99.3002916  
[ > dhAB=sqrt((MB-MA)^2+(PB-PA)^2);  
      dhAB = 9.209059367  
[ > dhAC=sqrt((MC-MA)^2+(PC-PA)^2);  
      dhAC = 27.70724118  
[ > dhAD=sqrt((MD-MA)^2+(PD-PA)^2);  
      dhAD = 38.93262072  
[ >
```

4.

10 puntos: E1



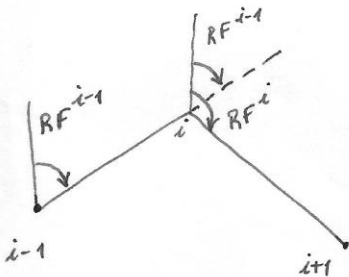
$$R\phi^{E1}: R_{E1,A} = \text{atan} \frac{M_A - M_{E1}}{P_A - P_{E1}} = \text{atan} \frac{187.23 - 187.66}{278.44 - 207.73} = \text{atan} \frac{-0.43}{70.71} = 399^\circ.613$$

↗ 4°R

$$R\phi^{E1} + A_z^{E1,A} = R_{E1,A} \Rightarrow R\phi^{E1} = R_{E1,A} - A_z^{E1,A} = 399^\circ.613 - 003^\circ.448 = 396^\circ.165$$

$$\underline{\underline{R\bar{F}^{E1} = R\phi^{E1} + 120^\circ.482 = 124^\circ.647}}$$

puntos intermedios:  $R\bar{F}^{i-1} - 200^\circ + (A_z^F - A_z^T)^i = R\bar{F}^i$

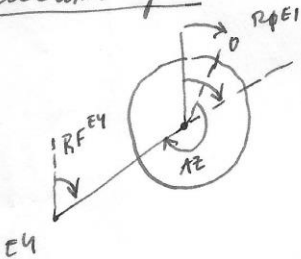


$$\underline{\underline{R\bar{F}^{E2} = 124^\circ.647 + 200^\circ + (261^\circ.987 - 321^\circ.869) = 264^\circ.765}}$$

$$\underline{\underline{R\bar{F}^{E3} = 264^\circ.765 + 200^\circ + (001^\circ.835 - 051^\circ.530) = 15^\circ.070}}$$

$$\underline{\underline{R\bar{F}^{E4} = 15.070 + 200^\circ + (192^\circ.118 - 027^\circ.853) = 379^\circ.335}}$$

ultimo punto: E1



$$R\bar{F}^{E4} + 200^\circ - A_z^{E4} - R\phi^{E1} = \epsilon_\alpha$$

$$\epsilon_\alpha = -0^\circ.008$$