

Instrumentação e Metrologia

Define-se **medição** como uma observação efectuada para determinar uma quantidade desconhecida.

Com a excepção da contagem, **medir** normalmente consiste em diversas operações mais elementares, tais como a preparação do dispositivo de medida (colocação do aparelho em estação, calibração), a pontaria, a leitura, etc., resultando dessas operações um **valor numérico chamado medição**.

Em qualquer trabalho é necessário especificar a respectiva **exactidão** de forma a que os resultados possam ser utilizados com confiança.

A exactidão é uma medida da **ausência de erro** e traduz a diferença entre um valor medido e o valor verdadeiro.

Embora a **exactidão absoluta** não possa ser determinada, a exactidão relativa pode ser estimada comparando o valor medido com o mesmo valor medido de uma forma mais exacta.

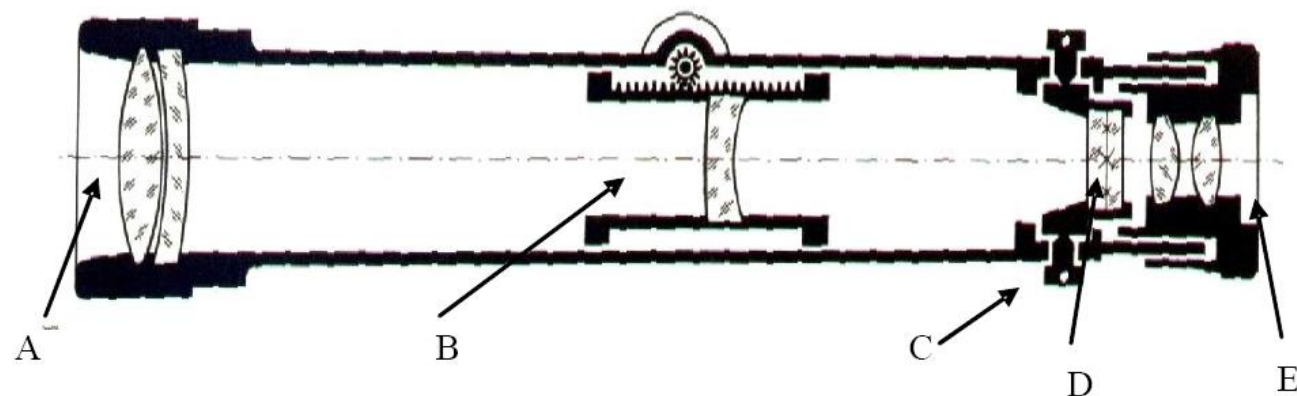
Numa **medição directa** aplica-se um padrão directamente sobre a quantidade desconhecida, como por exemplo uma fita métrica ao longo de um comprimento a ser medido ou efectuando leituras num círculo graduado (limbo) para a medição de um ângulo entre direcções.



As **medições indirectas** são realizadas quando não é possível ou não é prático efectuar medições directas, sendo a quantidade desconhecida obtida através de relações matemáticas envolvendo as medições efectuadas.



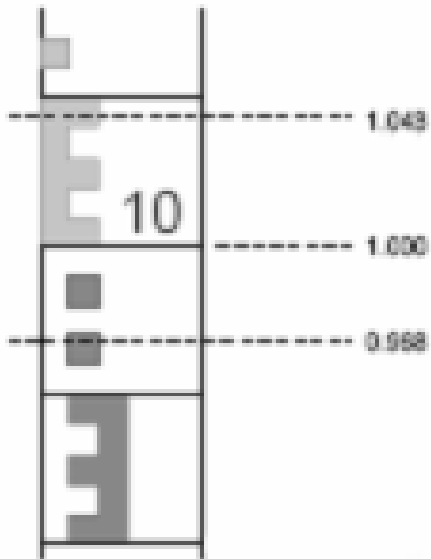
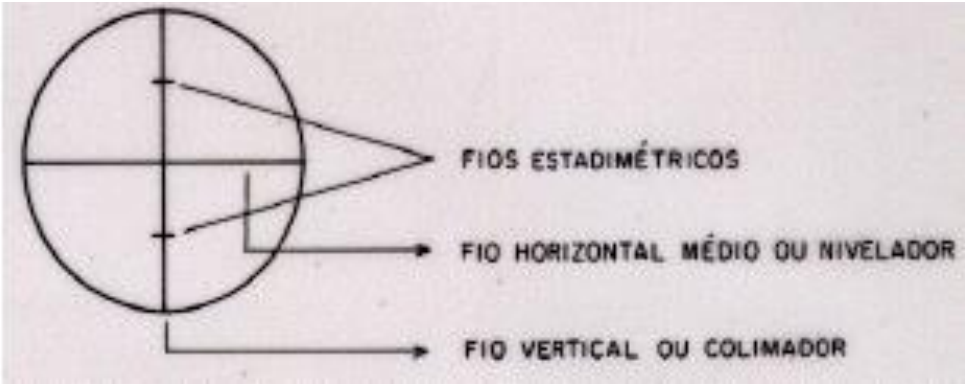
medição estadimétrica de distâncias



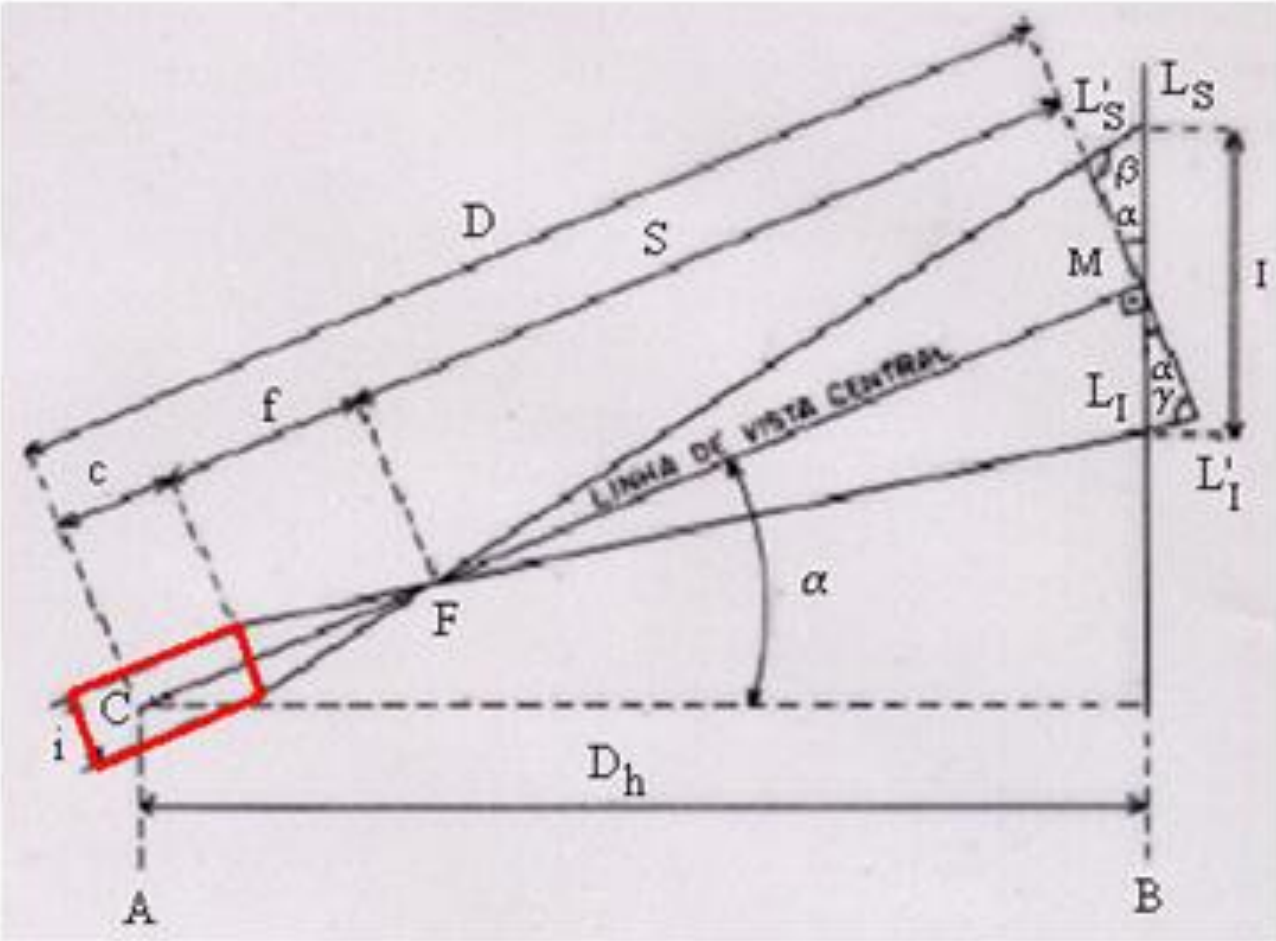
- A : Objetiva
- B : Sistema de focalização
- C : Parafusos de ajuste dos fios de retículo
- D : Retículos
- E : Ocular

luneta

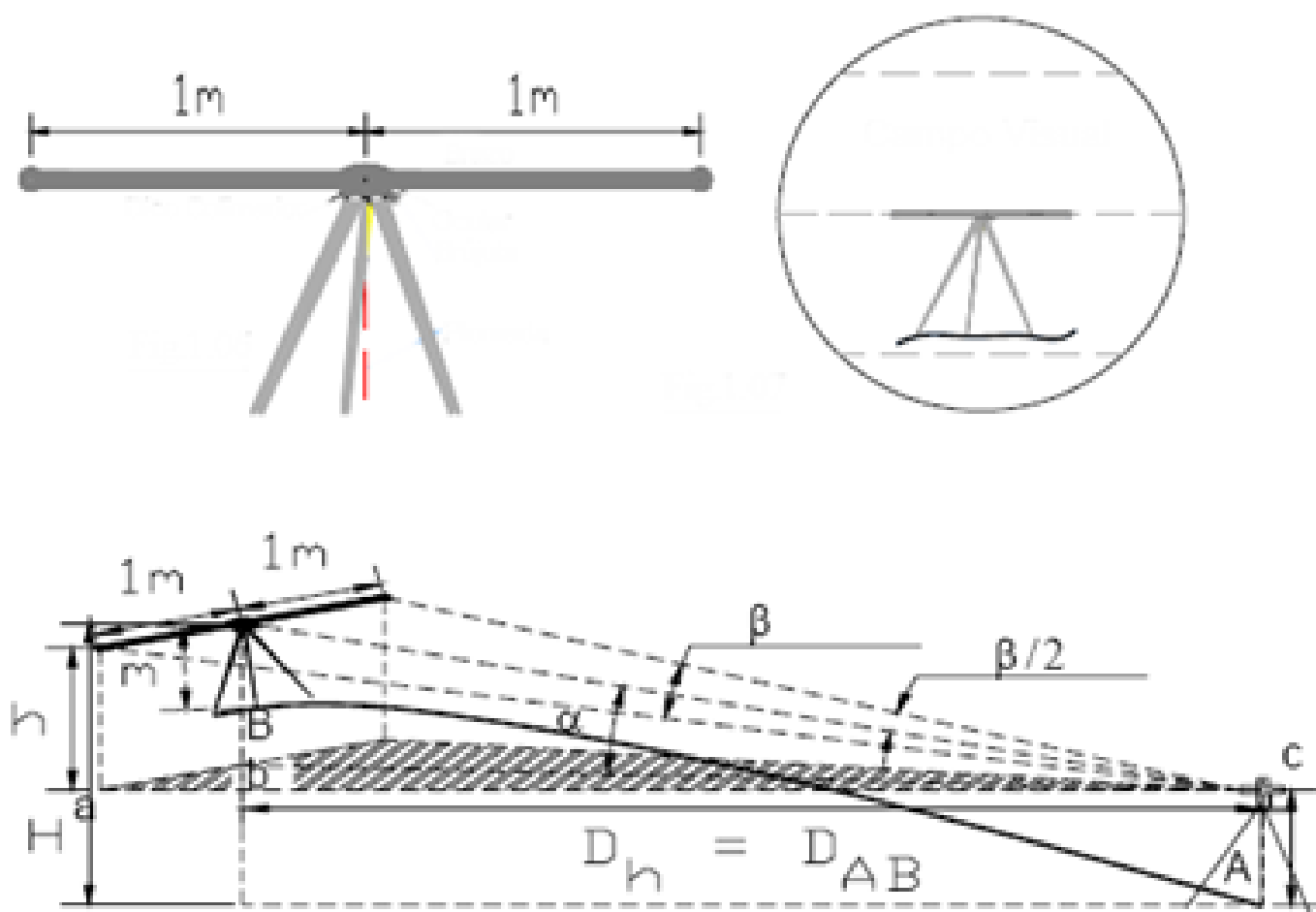
fios do reticulo gravados numa placa de vidro



projecção dos fios do retículo na mira



$$D_h = 100(L_S - L_I) \cos^2 \alpha = 100(L_S - L_I) \sin^2 z$$



Para medições topográficas de distância impõe-se uma precisão da ordem de $1/10000$ (ou 10^{-4}). Para o efeito, utilizam-se miras de invar de comprimento fixo (estádias de invar), montadas em tripés de forma a manterem-se numa posição horizontal e numa direcção perpendicular à pontaria. Sendo M o comprimento da mira, as leituras azimutais feitas para as duas referências extremas da mira determinam o ângulo azimutal β tal que $D_h = M/2 \cotg (\beta/2)$; sendo $M=2$, tem-se $D_h = \cotg (\beta/2)$. Devem ser realizadas várias observações do ângulo horizontal; como a estadia está horizontal, basta utilizar uma das faces do aparelho.

Se se pretender determinar a influência de um erro angular $d\beta$ em β na distância obtida com estadia de invar, diferencia-se a expressão $D = \frac{M}{2} \cot g \frac{\beta}{2}$ em ordem a β :

$$dD = \frac{M}{2} \frac{d}{d\beta} \left(\cot g \frac{\beta}{2} \right) d\beta = \frac{M}{2} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\beta}{2} \right) d\beta = -\frac{M}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{M}{4} \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{D^2}{M} \frac{d\beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

O valor de dD é majorado por $dD = -\frac{D^2}{M} d\beta$ (o sinal negativo significa que a distância vem demasiado pequena se o ângulo for demasiado grande). Admitindo que a precisão na medição do ângulo β é $d\beta = 1''$ e que $M=2$, tem-se:

$$dD_m = \frac{D_m^2}{2} \frac{1''}{206265''} = \frac{D_m^2}{412530} \approx \frac{D_m^2}{400000}$$

ou

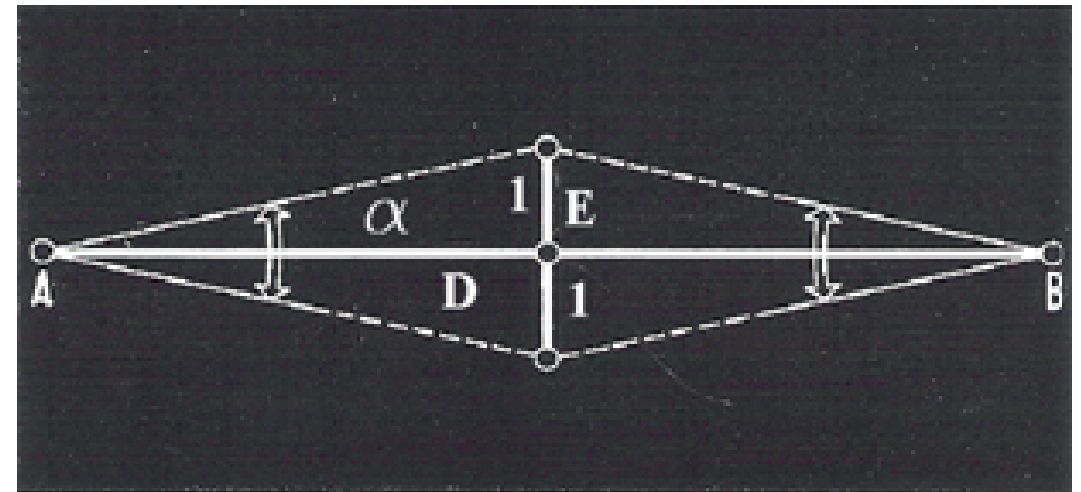
$$dD_{mm} = \frac{D_m^2}{400}$$

Fazendo variar a distância, obtém-se a tabela seguinte, que permite concluir que para garantir a precisão de 1/10000 na determinação da distância, D deve ser ≤ 40 m.

D (m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
dD (mm)	1.0	3.9	8.7	16	24	55	97	218	388	606

Exemplo: a estadia de invar pode ser utilizada desde que a distância a medir seja da ordem dos 50 m; assim, para medir a distância AB da ordem dos 100 m, coloca-se a estadia aproximadamente a meia distância entre A e B e estaciona-se em ambos os extremos da distância a medir. Tendo sido registados as leituras seguintes nas pontarias para as extremidades da estadia, calcule a distância AB:

Estação	Esquerda	Direita
A	102.3771 gon	104.6712 gon
B	210.3322 gon	212.6568 gon



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{D} \Rightarrow D = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \begin{cases} D_{AE} = \frac{1}{\tan 1.14705 \text{ gon}} = 55.495 \text{ m} \\ D_{BE} = \frac{1}{\tan 1.1623 \text{ gon}} = 54.766 \text{ m} \\ D_{AB} = 110.261 \text{ m} \end{cases}$$

As medições directas contém erros devido a causas instrumentais, ambientais e pessoais.

As medições indirectas contém erros que são função dos erros das observações directas originais, isto é, há uma **propagação de erros** neste processo.

A **exactidão** de uma medição angular depende da divisão da graduação utilizada para a realização das leituras mas também de factores ambientais e de limitações do operador.

Admitindo que se utiliza um aparelho cada vez mais sofisticado, que as condições ambientais são mais favoráveis e que o operador é mais habilitado, as medições aproximam-se do valor verdadeiro mas **nunca são exactas**.

Não existindo **medições exactas**, qualquer medição contém erros, que podem ser de tipos, origens e magnitudes diferentes.

Os passos que devem ser seguidos para levar em consideração a existência de erros nas medições consistem:

1. na **realização de análises estatísticas** das medições para avaliar a magnitude dos erros e a respectiva distribuição para determinar se estes estão ou não dentro de tolerâncias aceitáveis
2. no caso de serem aceites, **ajustar as medições** de forma a que verifiquem determinadas condições geométricas ou outros constrangimentos

Os erros podem ter 3 origens:

- **erros instrumentais**, causados por imperfeições de construção dos aparelhos ou por manutenção deficiente,
- **erros ambientais**, causados pelas condições naturais do local de utilização, como sejam a temperatura e a pressão atmosférica, o vento, os campos gravítico e magnético,
- **erros pessoais**, devido a limitações do operador, como sejam a deficiente calagem da bolha, má colocação do aparelho em estação ou dificuldade na leitura do micrómetro.

Quanto à natureza, os erros classificam-se:

- **erros grosseiros**, causados por falta de cuidado ou confusão do operador, devendo ser removidos do conjunto de observações,
- **erros sistemáticos**, que seguem alguma lei física; nalguns casos podem ser removidos adoptando um procedimento de observação adequado (leituras conjugadas na observação de direcções azimutais), noutros casos podem ser removidos calculando correções a aplicar às medições,
- **erros aleatórios**, em geral de pequena magnitude, podendo ser positivos ou negativos, sendo tratados por métodos estatísticos.

A **exactidão** de um conjunto de medidas representa o grau de proximidade dos valores observados com o valor verdadeiro da grandeza medida.

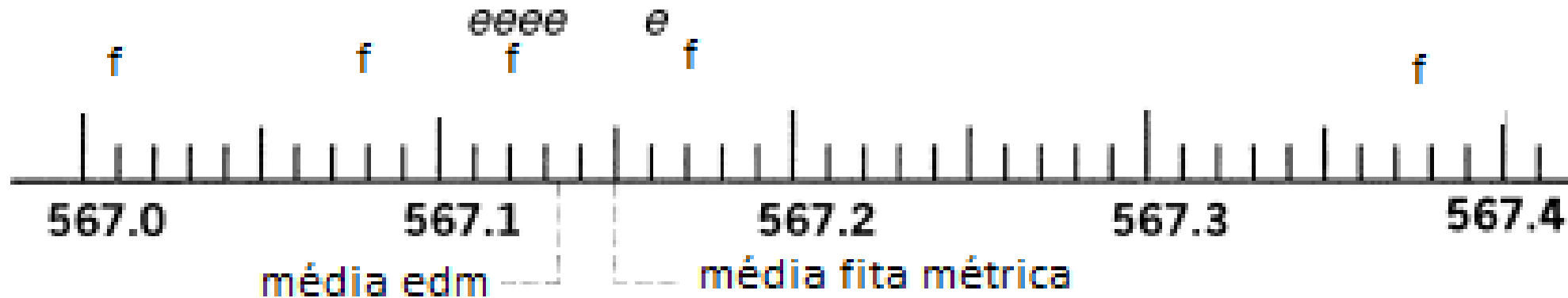
A **precisão** de um conjunto de medidas traduz a dispersão dos valores observados entre si.

Assim a exactidão é influenciada pelos **erros sistemáticos** e a precisão é influenciada pelos **erros aleatórios**.

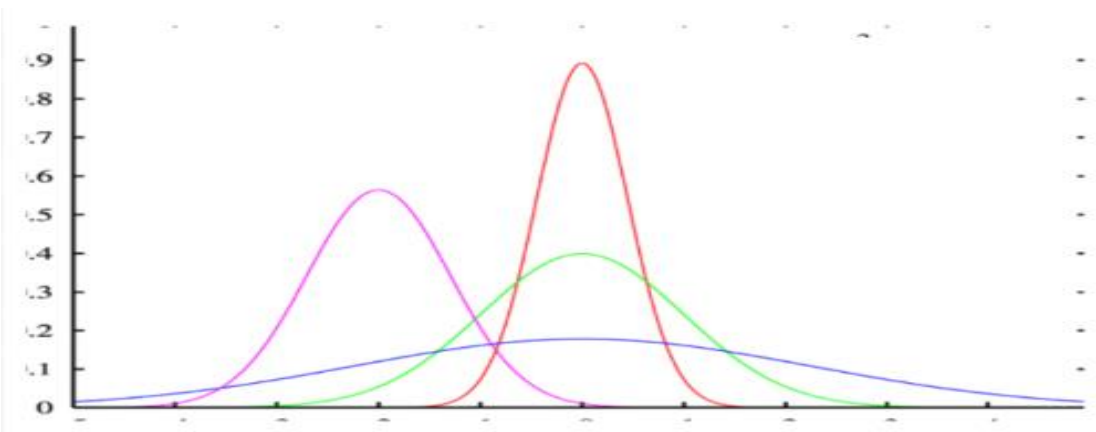
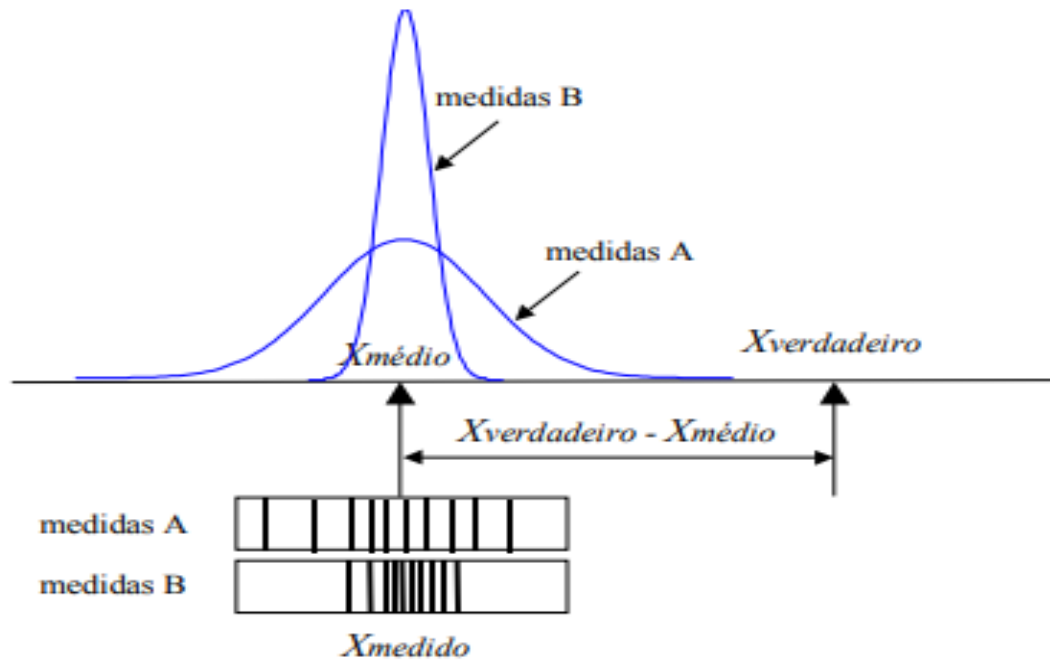
Considere que uma dada distância entre dois pontos é medida a passo, com uma fita métrica e com um distanciômetro electromagnético (EDM), sendo cada medida repetida 5 vezes:

Passo (m)	Fita métrica (m)	EDM (m)
571	567.17	567.133
563	567.08	567.124
566	567.12	567.129
588	567.38	567.165
557	567.01	567.114

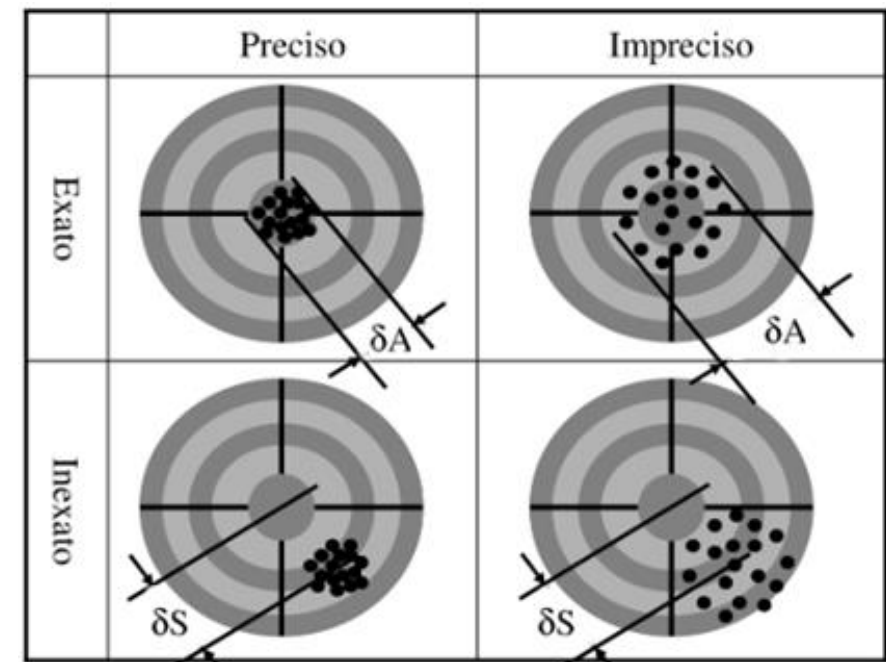
O valor médio de cada um dos conjuntos é 569 m, 567.15 m e 567.133 m, respectivamente, para as medições a passo, a fita métrica (f) e a EDM (e).



O gráfico da distribuição dos valores medidos a fita métrica e com EDM mostra que embora os respectivos valores médios se encontrem relativamente próximos, as medições com EDM estão mais **concentradas**, o que indica melhor precisão (o que não significa necessariamente maior exactidão).



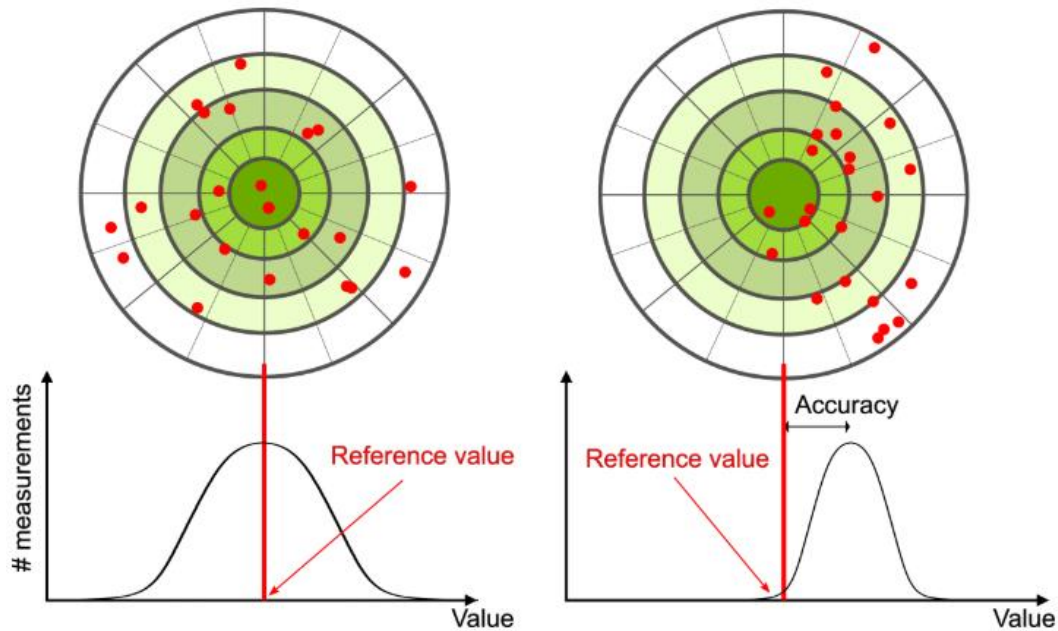
O eixo das ordenadas representa a probabilidade; o gráfico a azul representa exactidão óptima (erro médio nulo) mas fraca precisão (variância grande devido a ruído), o verde e encarnado representam a mesma exactidão, com precisão crescente e o roxo representa exactidão e precisão médias.



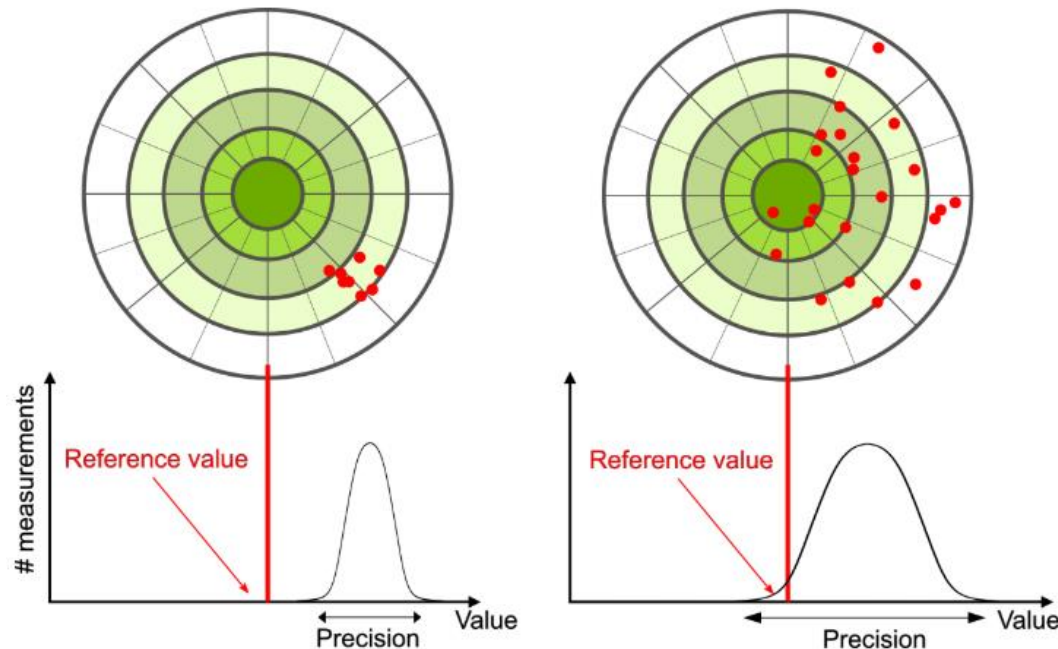
$\delta A \rightarrow$ Erro Aleatório

$\delta S \rightarrow$ Erro Sistemático

A exactidão é considerada a proximidade dos tiros ao centro do alvo; a precisão é considerada a proximidade dos tiros entre si. O conceito de exactidão aparece sempre ligado a um valor de referência de uma dada grandeza, utilizado para comparação. Uma precisão grande não reflecte necessariamente uma exactidão grande. Na ausência de erros sistemáticos, $\delta S=0$, o desvio padrão (a precisão) constitui uma medida de avaliação da exactidão.



Uma pessoa está a tentar localizar com um receptor gps um restaurante localizado no centro do alvo. Na figura da esquerda, as posições obtidas distribuem-se a toda a volta do restaurante mas em média obtém-se uma posição muito próxima do restaurante, o que indica alta exactidão; na imagem da direita as posições obtidas estão enviesadas, indicando baixa exactidão



Uma pessoa está a tentar localizar com um receptor gps um restaurante localizado no centro do alvo. Na figura da esquerda, as posições obtidas estão muito concentradas, o que indica alta precisão; na imagem da direita as posições obtidas estão pouco concentradas, distribuindo-se por uma zona muito vasta, indicando baixa precisão.

Um equipamento de medição deve ser regularmente objecto de uma operação que tem por objetivo avaliar se as suas características metrológicas se mantêm dentro dos limites estabelecidos. Essa operação designa-se **por calibração**.



$1 \text{ s}/10 = 0.1 \text{ s}$



Define-se **resolução** de um sensor como a menor variação que pode ser detectada e mostrada pelo sensor.

Considerem-se dois cronómetros, um analógico e outro digital. O cronómetro analógico é lido no disco do mostrador, onde a menor graduação corresponde a um décimo de segundo, que define a **resolução** do cronómetro.

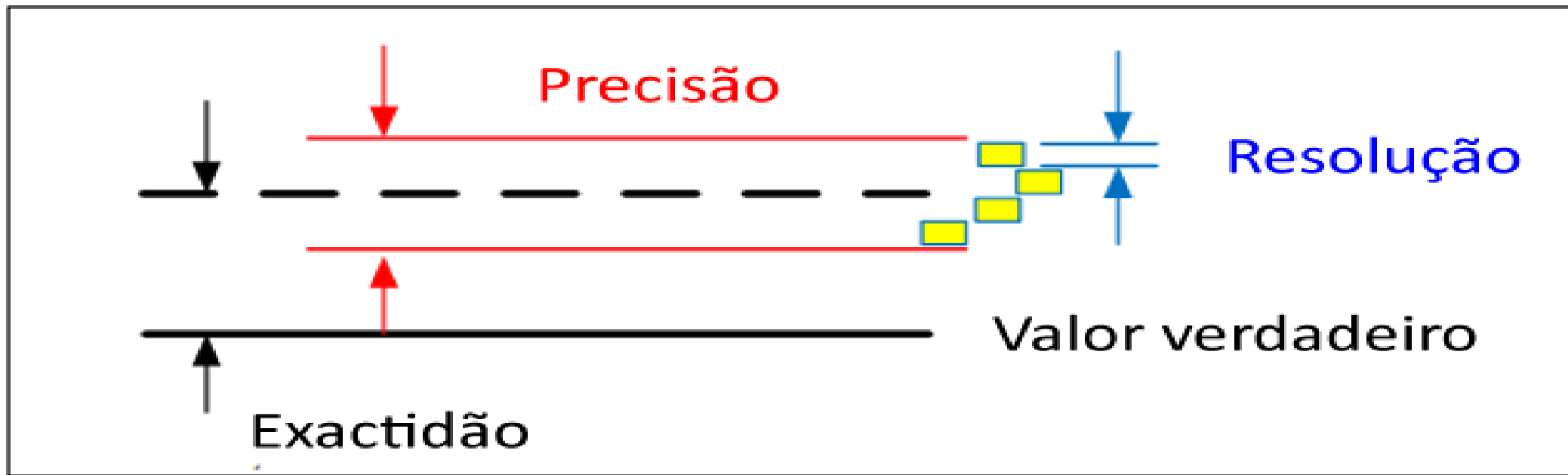
O cronómetro digital mostra dois dígitos a seguir à indicação dos segundos (53), correspondendo ao centésimo de segundo, que define a **resolução** do cronómetro.

Qual é a **precisão** das medidas de cada um dos 2 sistemas de medida, que inclui a pessoa que utiliza o cronómetro em cada um dos casos (a experiência indica uma pessoa leva cerca de 1/10 de segundo a reagir a um estímulo e a accionar o botão)? No caso do cronómetro analógico a precisão é 0.1 s; no caso do cronómetro digital a precisão é também 0.1 s pois devido intervalo estímulo-resposta, o valor 0.01 s não é fidedigno, isto é, o último dígito é aleatório.

O exemplo anterior levanta um problema importante: o advento da instrumentação digital pode levar à **confusão entre resolução e precisão**. Se uma leitura é apresentada com 5 dígitos decimais, esse valor está correcto! Será verdade? No que diz respeito à resolução, sim, no que diz respeito à precisão, talvez...

Considere-se o caso das balanças digitais: algumas marcas apresentam uma **resolução igual a 1 g** mas não conseguem, sem um aumento significativo do preço, obter uma precisão abaixo dos 3 g (veja-se o caso dos cronómetros).

Em vez de cortarem na resolução, o que seria honesto mas caro, para além de potencialmente confuso, mantêm a resolução igual a 1 g e acrescentam um circuito com um artifício que reconhece que se um objecto pesa menos de 3 g (ou 5 g para ter mais garantias) que o último objecto pesado, apresenta o peso do objecto previamente pesado, de forma a justificar a precisão anunciada.

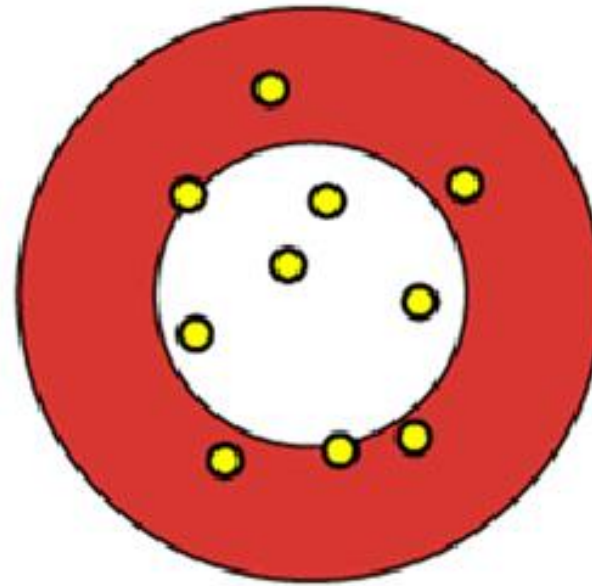


A figura ilustra os termos exactidão, precisão e resolução: os rectângulos a amarelo representam os valores medidos, sendo o eixo das abcissas por exemplo o tempo. Um sensor ideal deveria repetidamente fornecer o mesmo output, correspondente ao **valor verdadeiro**, representado pela linha contínua a preto. A **precisão** ou repetibilidade traduz a dispersão dos sucessivos valores de output. A **exactidão** depende da diferença entre a média dos valores de output, representada pela linha a tracejado a preto e o valor verdadeiro. A **resolução** representa a variação mínima do valor medido que resulta num valor diferente de output, sendo normalmente menor que a exactidão.

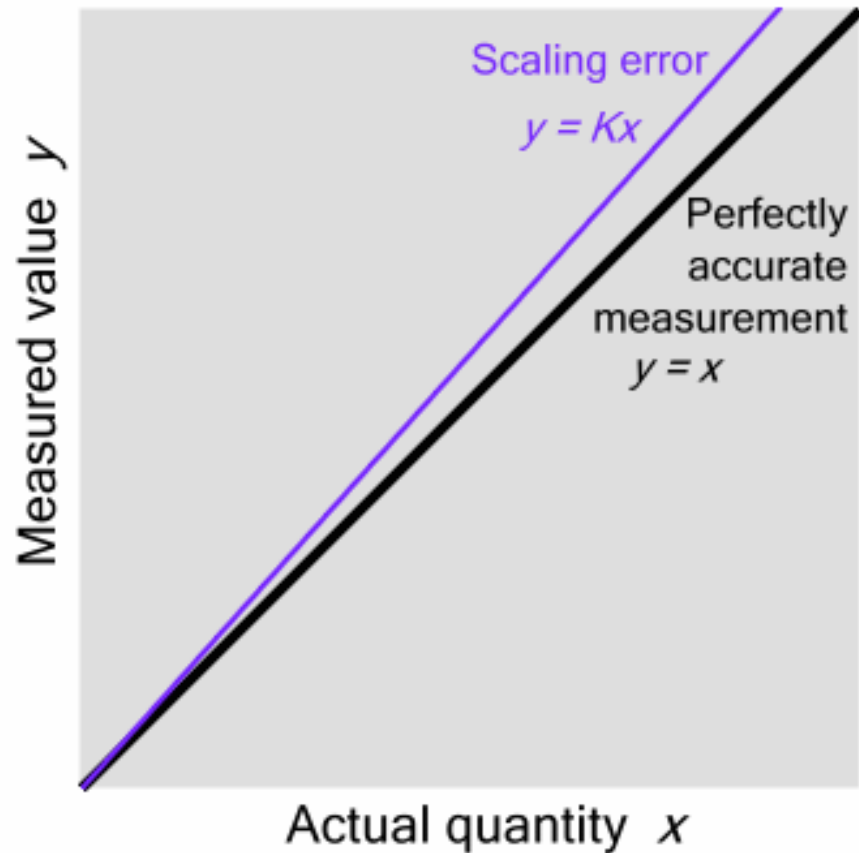
HIGH RESOLUTION



LOW RESOLUTION



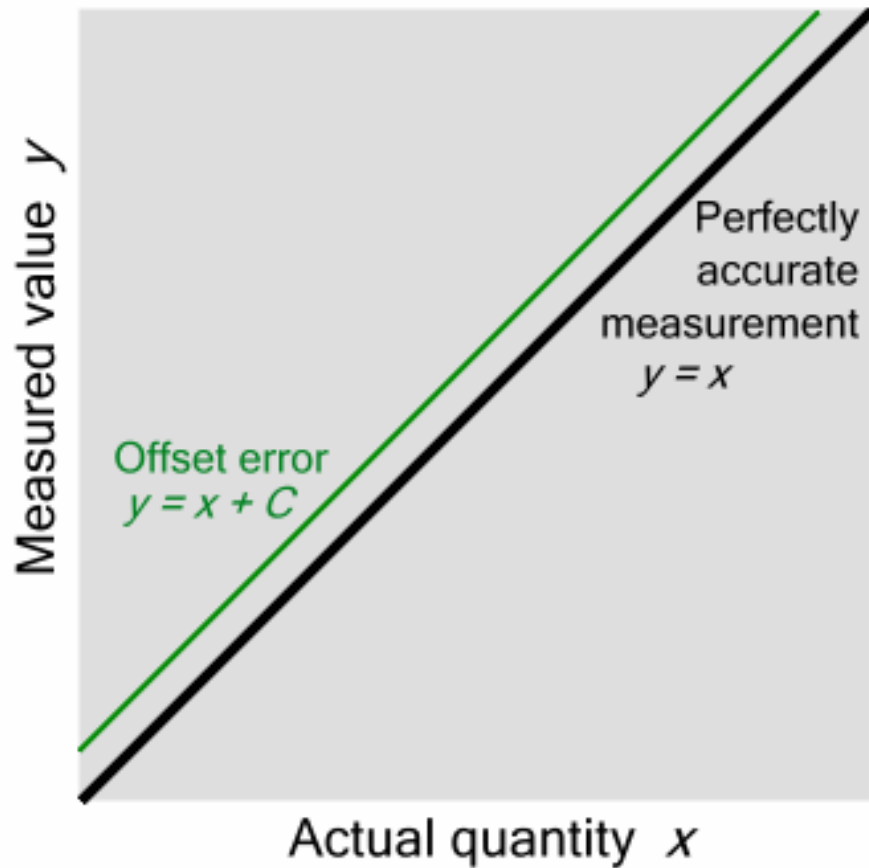
a resolução representa o menor intervalo que é possível medir com um dado instrumento; o aumento da resolução dá origem a medições mais detalhadas, com o correspondente aumento do número de algarismos significativos



Erros que afectam a exactidão:

1. No gráfico a linha a preto representa o comportamento de um instrumento perfeito, no sentido em que o valor medido é igual ao valor verdadeiro; a linha azul mostra o que acontece ao valor medido (leitura) se existir um **erro de escala**, obtendo-se um valor proporcional ao valor verdadeiro.

Este erro acontece devido a um erro de calibração do aparelho, podendo afectar aparelhos analógicos (que em geral utilizam uma mola que estica ou comprime em resposta a uma força) ou digitais.



2. O **erro de offset** (desvio) ocorre quando o valor medido (leitura) é mais alto (ou baixo) do que o valor verdadeiro por um valor constante.



3. No gráfico, a curva encarnada coincide com a linha preta na origem e portanto não existe erro de offset; há também coincidência na outra extremidade e portanto também não erro de escala. Se a leitura do instrumento é exacta em pelo menos dois pontos bem distribuídos mas não é exacta noutros pontos, a resposta do instrumento não pode ser uma linha recta e portanto não é linear, como nos dois casos anteriores – **erro não-linear**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

[Accuracy vs. Resolution](#)[Analog to Digital](#)[Example](#)[Calculator](#)[Customize and contr](#)

Accuracy vs. Resolution

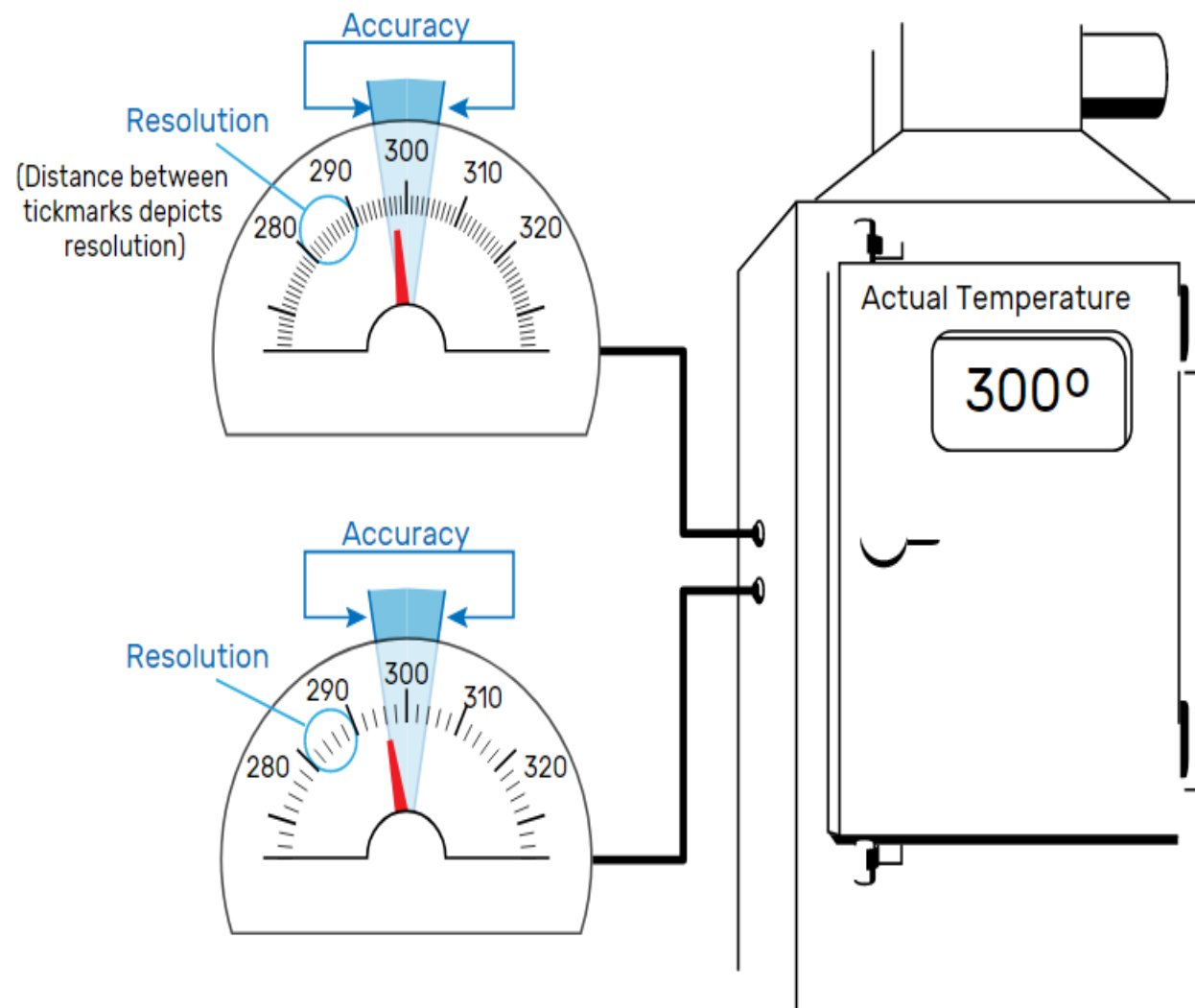
What's the difference between accuracy and resolution? Accuracy is how close a reported measurement is to the true value being measured. Resolution is the smallest change that can be measured.

The accuracy of these temperature gauges is ± 4 degrees, meaning they can be different from the correct value by four degrees in either direction. (Typically, accuracy specifications are stated as a plus-minus range.)

The gauge on top has finer resolution. Notice that there are more tick marks between 280 and 290 on the top gauge than on the bottom one. **Finer resolution reduces rounding errors, but doesn't change a device's accuracy.** However, resolution that is too coarse may add rounding errors.

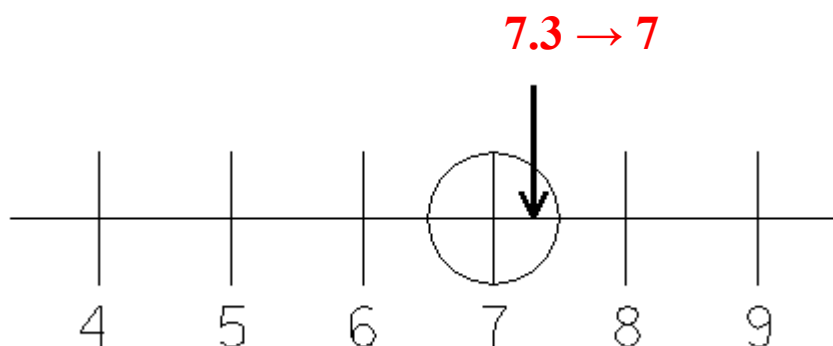


ver exemplo da régua



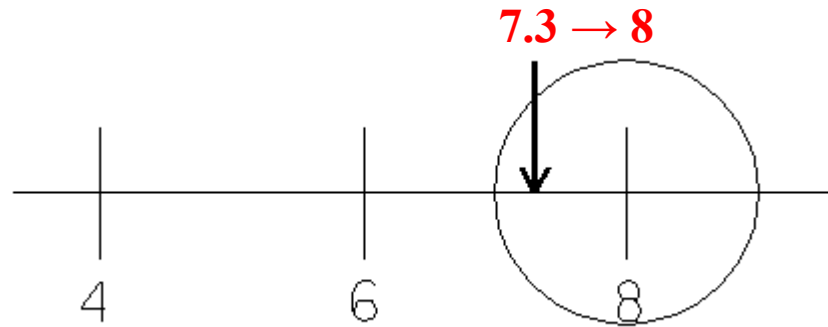
Em muitas situações do dia-a-dia, não precisamos de trabalhar com números exatos. Quando estamos a utilizar números muito grandes ou números com muitas casas decimais, é por vezes útil proceder a arredondamentos para nos facilitar os cálculos, ou simplesmente, para que o número ocupe menos espaço.

Suponha-se que **o valor exacto** de um comprimento é igual a **7.3 cm** e que se pretende determinar este valor utilizando uma régua graduada em cm, **sem estimação** (ou seja, arredondando ao cm).



A **exactidão** do valor obtido corresponde a **metade da menor graduação** (1 cm) e portanto o valor obtido é **7 ± 0.5 cm**.

Repita-se a medição do comprimento utilizando uma régua graduada de 2 em 2 cm, sem estimação (ou seja, arredondando ao cm):



A **exactidão** do valor obtido corresponde a metade da menor graduação (2 cm) e portanto o valor obtido é **8 ± 1 cm**.

Devido a constrangimentos económicos e de tempo, a análise estatística dos dados observados incide normalmente sobre uma **amostra** de pequena dimensão, recolhida de uma **população** na maior parte das vezes, infinita, consistindo em todas as possíveis medições que podem ser efectuadas.

Suponha-se que foi medida uma direcção 50 vezes com um instrumento de 1” (a menor graduação do limbo é 1”, estimando-se a parte decimal do segundo). A parte das leituras relativas aos segundos está indicada na tabela:

22.7	25.4	24.0	20.5	22.5	22.3	24.2	24.8	23.5	22.9
25.5	24.7	23.2	22.0	23.8	23.8	24.4	23.7	24.1	22.6
22.9	23.4	25.9	23.1	21.8	22.2	23.3	24.6	24.1	23.2
21.9	24.3	23.8	23.1	25.2	26.1	21.2	23.0	25.9	22.8
22.6	25.3	25.0	22.8	23.6	21.7	23.9	22.3	25.3	20.1

Estes dados são representativos das leituras que se podem obter do aparelho utilizado por um operador competente? Que ferramentas estatísticas podem ser utilizadas para representar e analisar este conjunto de dados?

- a **mediana** da amostra, uma medida de localização dos dados, é igual ao ponto médio do conjunto de dados ordenado de forma crescente, de tal forma que metade dos dados são menores que a mediana e a outra metade dos dados são maiores do que a mediana (no caso de o conjunto ter um número par de medições, a mediana é a média dos dois valores intermédios), neste caso $(23.4+23.5)/2 = 23.45$ ".
- a **média** da amostra, uma medida de localização dos dados, é igual a $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$, neste caso 23.5 ".

- a **amplitude** da amostra, uma medida de dispersão dos dados, é igual à diferença entre o valor mais alto e o valor mais baixo observados, neste caso $26.1 - 20.1 = 6.0$.

- a **variância** da amostra, uma medida de dispersão dos dados, é igual a

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 / (n-1), \text{ neste caso } 1.88.$$

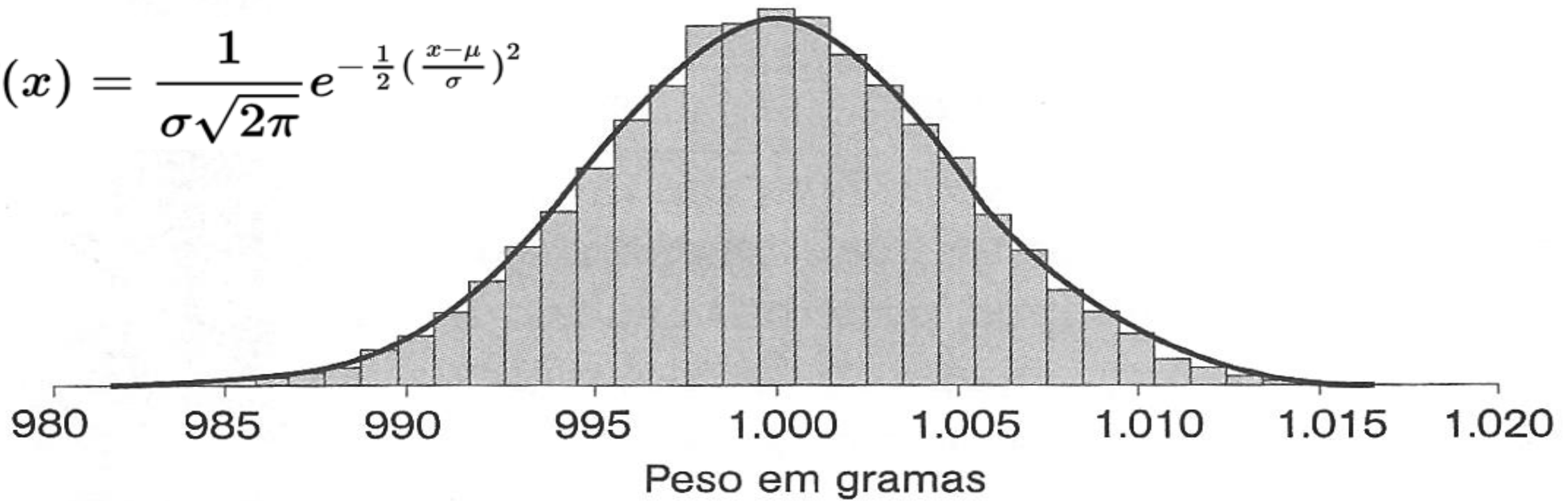
- o **desvio padrão** da amostra, uma medida de dispersão dos dados, é igual a

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 / (n-1)}, \text{ neste caso } 1.37.$$

$$y \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Distribuição de peso de um grande conjunto de pacotes de açúcar de 1 kg

- Os erros pequenos são mais frequentes que os erros grandes
- Os erros positivos e negativos ocorrem com igual frequência quando $n \rightarrow \infty$ e portanto compensam-se
- Os erros muito grandes não ocorrem

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

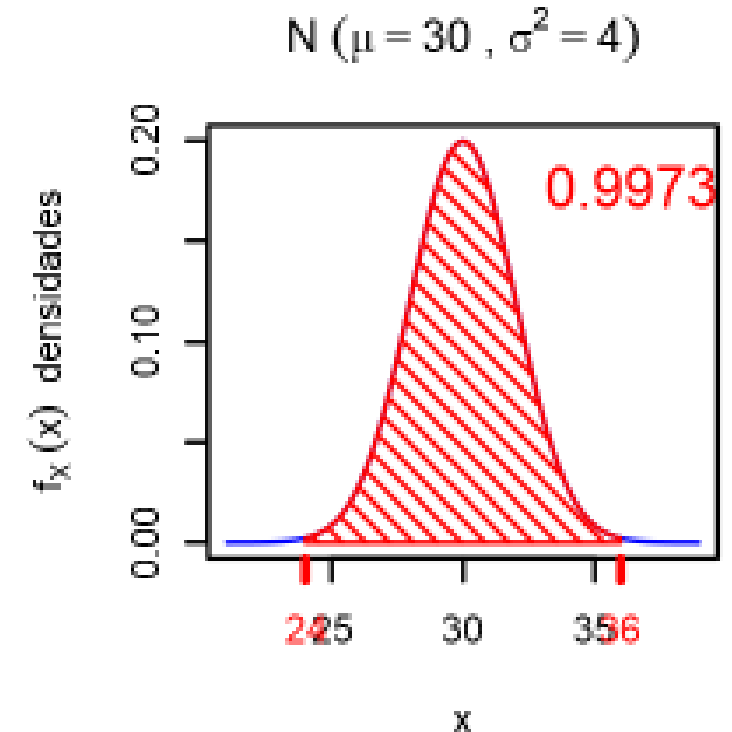
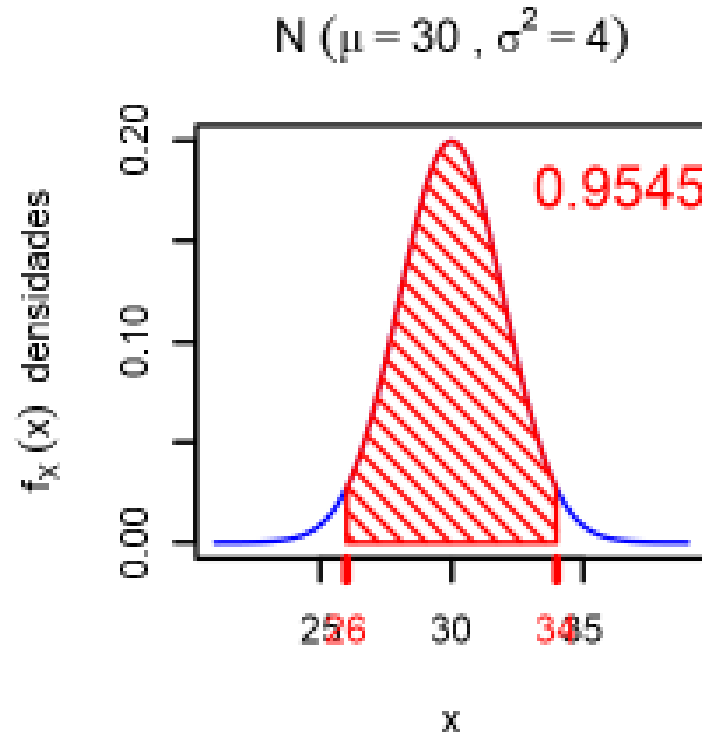
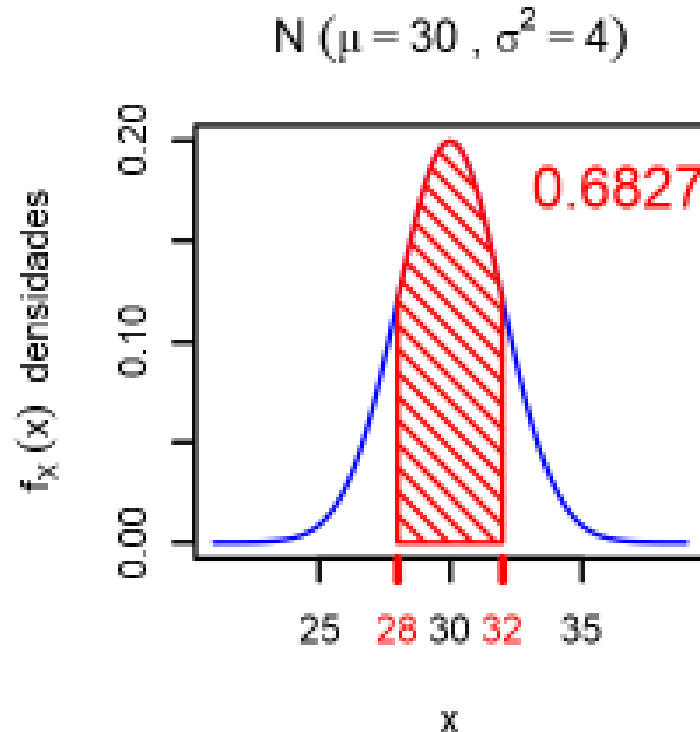
Probabilidade de os erros estarem compreendidos num dado intervalo:

$$P(a < x < b) = N(b) - N(a)$$

$$P(-a < x < a) = N(a) - N(-a) = N(a) - (1 - N(a))$$

$$P(-\sigma < x < \sigma) = N(\sigma) - N(-\sigma) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826$$

se $N(0,1)$



$P(-0.6745 \sigma < x < 0.6745 \sigma) = 0.5000$ (E50=0.6745 σ = erro provável)

$P(-\sigma < x < \sigma) = 0.6827$ (erro padrão)

$P(-1.6449 \sigma < x < 1.6449 \sigma) = 0.9000$

$P(-1.9600 \sigma < x < 1.9600 \sigma) = 0.9500$ (E95)

$P(-2 \sigma < x < 2 \sigma) = 0.9545$

$P(-2.5758 \sigma < x < 2.5758 \sigma) = 0.9900$ (E99)

$P(-2.9650 \sigma < x < 2.9650 \sigma) = 0.9970$

$P(-3 \sigma < x < 3 \sigma) = 0.9973$

$P(-3.2900 \sigma < x < 3.2900 \sigma) = 0.9990$

50% dos erros de uma dada série de medições não excedem ± 20 cm (**erro provável**);
90% dos erros dessa série de medições não excedem ± 49 cm.

Apesar de serem dados diferentes erros, cada um deles expressa a mesma precisão (σ) do processo de medição:

$$0.6745\sigma = \pm 20\text{cm} \Rightarrow \sigma = \pm 29.7\text{cm}$$

$$1.6449\sigma = \pm 49\text{cm} \Rightarrow \sigma = \pm 29.7\text{cm}$$

Qual é o **erro padrão** do processo considerado ($P[-\sigma < x < \sigma] = 0.6827$)?

$$1\sigma = \text{erro padrão} \Rightarrow \text{erro padrão} = \pm 29.7\text{cm}$$

(68.27% dos erros ocorrem dentro do intervalo $\pm\sigma$)

Considere-se o conjunto de 15 medições independentes de uma distância, em metro: 212.22, 212.25, 212.23, 212.15, 212.23, 212.11, 212.29, 212.34, 212.22, 212.24, 212.19, 212.25, 212.27, 212.20, 212.25. Calcule a média e o desvio padrão da série, e, admitindo uma distribuição normal, os erros E50 e E90 e verifique se alguma medição cai fora do intervalo de confiança a 99.7%.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{3183.34}{15} = 212.22 \text{ m} ; s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{675576.955 - 15 \times 212.223^2}{14}} = \sqrt{\frac{0.051298}{14}} = \pm 0.06 \text{ m}$$

E50: $0.6745 \text{ s} = 0.6745 * (\pm 0.06) = \pm 0.04 \text{ m}$

Analizando os dados verifica-se que há **9** observações dentro do intervalo **212.22±0.04**, ou seja, entre 212.18 e 212.26, o que corresponde a $9/15 \times 100 = 60\%$ dos dados, quando em teoria deveria corresponder a 50%, o que pode explicar-se considerando que o conjunto dos dados constitui uma amostra da população.

E90: $1.6449 \text{ s} = 1.6449 * (\pm 0.06) = \pm 0.10 \text{ m}$

Analizando os dados verifica-se que há **13** observações dentro do intervalo **212.22±0.10**, ou seja, entre 212.12 e 212.32, o que corresponde a $13/15 \times 100 = 87\%$ dos dados, quando em teoria deveria corresponder a 90%, o que pode explicar-se considerando que o conjunto dos dados constitui uma amostra da população.

Considerando o nível de confiança de 99.7%, tem-se que o intervalo $\pm 2.9650 \text{ s} = \pm 0.18$, verificando-se que todas as observações estão dentro do intervalo 212.22 ± 0.18 , pelo que não há razão para supor que existem erros grosseiros nos dados.

Os segundos correspondentes a 50 medições de uma direcção estão indicados na tabela:

41.9	46.3	44.6	46.1	42.5	45.9	45.0	42.0	47.5	43.2	43.0	45.7	47.6
49.5	45.5	43.3	42.6	44.3	46.1	45.6	52.0	45.5	43.4	42.2	44.3	44.1
42.6	47.2	47.4	44.7	44.2	46.3	49.5	46.0	44.3	42.8	47.1	44.7	45.6
45.5	43.4	45.5	43.1	46.1	43.6	41.8	44.7	46.2	43.2	46.8		

Determine a média e o desvio padrão da série, e, admitindo uma distribuição normal, calcule o erro padrão, o erro E95 e verifique se alguma medição cai fora do intervalo de confiança a 99%.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 45.04''$$

$$s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - n\bar{x}^2)}{n-1}} = \pm 2.12''$$

Há 35 medições no intervalo $45.04 \pm 2.12 = [42.92, 47.16]$, o que corresponde a $35/50 \times 100 = 70\%$, o que se aproxima do valor teórico de 68.3%.

O intervalo correspondente ao erro E95 é igual a $45.04 \pm 1.960 \times 2.12 = 45.04 \pm 4.16 = [40.88, 49.20]$, estando 3 valores fora deste intervalo, isto é, que se desviam da média mais do que 4.16: 49.5 (2) e 52.0; dito de outra forma, $47/50 \times 100 = 94\%$ das medições estão contidas no intervalo E95.

O intervalo correspondente ao erro E99 é igual a $45.04 \pm 2.576 \times 2.12 = 45.04 \pm 5.46 = [39.58, 50.50]$, estando 1 valor fora deste intervalo, isto é, que se desvia da média mais do que 4.16: 52.0; dito de outra forma, $49/50 \times 100 = 98\%$ das medições estão contidas no intervalo E99. Isto sugere que deve rejeitar-se o valor 52.0, obtendo-se então $\bar{x} = 44.90, s = \pm 1.83$.

Agora, 32 observações estão dentro do intervalo $\pm s$, ou seja, 65.3% das observações, 47 observações estão dentro do intervalo $\pm E95$, ou seja, 95.9% das observações e não há observações fora do intervalo $\pm E99$, não havendo razão para rejeitar observações adicionais.

Após a detecção e eliminação dos **erros grosseiros** e após a identificação e correção dos **erros sistemáticos** presentes nas observações, estes (erros aleatórios) podem ser considerados como amostras de variáveis aleatórias, que têm uma distribuição normal $N(0, \sigma^2)$:

Os erros aleatórios são caracterizados por desvios não controláveis de pequena magnitude no valor de uma observação. A amplitude esperada na incerteza da medição devido aos erros aleatórios é designada por precisão e descrita pelo desvio padrão das observações relativamente ao valor médio. Se numa dada observação intervierem várias fontes de erro, é possível calcular a contribuição de cada uma delas e combina-las para estimar o desvio padrão final.

U

ma das actividades mais típicas da estatística é a de extrair conclusões sobre o todo olhando apenas para uma parte. Ao «todo» chama-se «população», uma herança das primeiras aplicações da estatística, nas quais o objecto efectivamente de estudo era uma população de indivíduos.

Hoje continua a ser chamada da mesma maneira, mas a população já não tem de ser formada necessariamente por pessoas; podem ser peixes num lago, ou os aparelhos produzidos por uma fábrica durante o ano passado. Como é evidente, pode também ser constituída pelo conjunto de todos os cidadãos com direito de voto nas próximas eleições, ou pelo conjunto de pessoas que padecem de determinada doença.

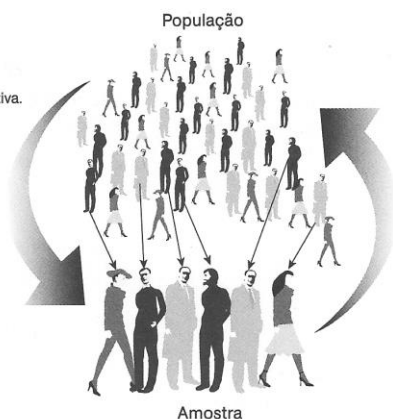
Estudar a população exaustivamente é quase sempre impossível. Não é viável perguntar a todos os eleitores em quem pensam votar nas próximas eleições, ou a todos os pacientes que tal se deram com um novo medicamento. Por outro lado, se a característica de interesse das peças fabricadas é a sua resistência à tracção, e é necessário parti-las para determinar esse valor, poder-se-iam até partir todas para saber quanto «resistiam», mas essa não parece ser a opção mais sensata.

O que se faz é escolher uma determinada parte da população, a qual se denomina por «amostra», e a partir dos resultados obtidos nessa amostra estimar (ter uma ideia o mais aproximada possível) as características que representem a população. As regras do cálculo de probabilidades permitem obter informações sobre a qualidade da estimativa realizada através de uma série de conceitos, tais como o «nível de confiança» e a «margem de erro».

Claro que tudo isto só é válido se a amostra for representativa de toda a população. Se esta não for representativa, é evidente que não serve, embora

Estimativa das características da população através de uma amostra representativa.

Amostra representativa



Estimativa das características da população

às vezes nalguns estudos se exagera a importância dos aspectos matemáticos (já que argumentar com uma linguagem matemática que não é acessível e não se entende é barato e eficaz) e se descuide a forma como se procedeu à recolha da amostra. Esta última é muito mais cara, mas é uma questão absolutamente crítica para assegurar a validade das conclusões a que se chega.

Quanto peixes há num lago?

Quanto táxis há numa cidade?

Em seguida, vemos dois exemplos de estimação de características da população, neste caso a sua dimensão, aplicando técnicas de amostragem.

Peixes

Contar quantos peixes existem num lago não parece uma tarefa fácil, especialmente se este for grande e tiver águas turvas, mas os biólogos sabem como fazê-lo. Utilizando técnicas estatísticas, como é evidente. Um método muito utilizado é o chamado método de «captura-recaptura» (e que, em geral, não serve apenas para peixes). O procedimento é o seguinte:

1. Pescar uma amostra de peixes, marcá-los e devolvê-los à água. Como é natural, isto não pode ser feito de qualquer maneira. A pesca deve ser feita de forma a não ferir os peixes. Existem técnicas, tais como o uso de descargas eléctricas, que os atordoam durante tempo suficiente para colhê-los e marcá-los. A marca não deve prejudicar a mobilidade nem a sobrevivência do peixe e também é necessário que perdure pelo menos até à recaptura.
2. Deixar passar algum tempo (podem ser alguns dias) até que seja razoável supor que os peixes marcados se tenham espalhado por todo o lago, e voltar a pescar outra amostra (a «recaptura») de um número que não tem de ser necessariamente igual ao da pesca.
3. Realizar os cálculos: se no lago existirem N peixes e se se marcaram M , a proporção de peixes marcados é M/N . Na recaptura pescam-se C peixes, que podem ser considerados uma amostra representativa de todos os peixes do lago, e entre eles encontram-se R marcados. É razoável considerar que a proporção de peixes marcados na segunda amostra seja semelhante à proporção de peixes marcados no lago, ou seja:

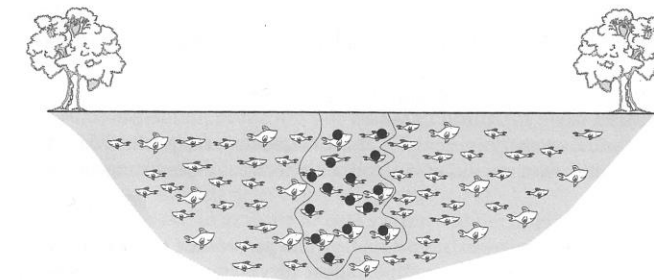
$$\frac{M}{N} \approx \frac{R}{C}$$

Assim, a estimativa do número de peixes que existem no lago é (resolvendo em ordem a N):

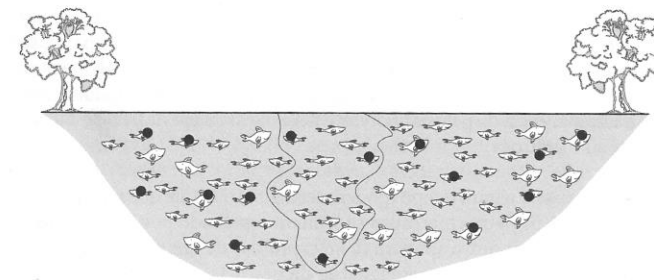
$$N \approx \frac{M \cdot C}{R}$$

Vejamos já de seguida um exemplo numérico.

Captura. Pesca-se e marca-se um conjunto de M peixes (que pode considerar-se uma amostra aleatória dos N peixes do lago). No nosso caso, tomamos $M = 15$.

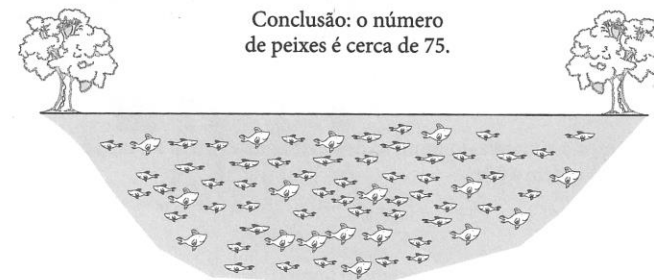


Recaptura. Deixa-se passar algum tempo para que os peixes marcados se dispersem por todo o lago, e pesca-se outro conjunto (C), contando o número (R) dos que aparecem marcados. No nosso caso, $C = 15$ e $R = 3$.



Cálculo. O número de peixes no lago é cerca de:

$$N = \frac{M \cdot C}{R} = \frac{15 \cdot 15}{3} = 75$$



Conclusão: o número de peixes é cerca de 75.

Mas o que significa «é cerca de»? No exemplo, se se tiver paciência para os contar, vê-se que o lago tem 67 peixes e que, portanto, se cometeu um erro de 12%. Este é um erro maior ou menor do que o esperado? Qual é a ordem de grandeza do erro que se pode cometer utilizando este método?

18.2	26.4	20.1	29.9	29.8	26.6	26.2
25.7	25.2	26.3	26.7	30.6	22.6	22.3
30.0	26.5	28.1	25.6	20.3	35.5	22.9
30.7	32.2	22.2	29.2	26.1	26.8	25.3
24.3	24.4	29.0	25.0	29.9	25.2	20.8
29.0	21.9	25.4	27.3	23.4	38.2	22.6
28.0	24.0	19.4	27.0	32.0	27.3	15.3
26.5	31.5	28.0	22.4	23.4	21.2	27.7
27.1	27.0	25.2	24.0	24.5	23.8	28.2
26.8	27.7	39.8	19.8	29.3	28.5	24.7
22.0	18.4	26.4	24.2	29.9	21.8	36.0
21.3	28.8	22.8	28.5	30.9	19.1	28.1
30.3	26.5	26.9	26.6	28.2	24.2	25.5
30.2	18.9	28.9	27.6	19.6	27.9	24.9
21.3	26.7					

Set 1: 29.9, 18.2, 30.7, 24.4, 36.0, 25.6, 26.5, 29.9, 19.6, 27.9	$\bar{y} = 26.9, S^2 = 28.1$
Set 2: 26.9, 28.1, 29.2, 26.2, 30.0, 27.1, 26.5, 30.6, 28.5, 25.5	$\bar{y} = 27.9, S^2 = 2.9$
Set 3: 32.2, 22.2, 23.4, 27.9, 27.0, 28.9, 22.6, 27.7, 30.6, 26.9	$\bar{y} = 26.9, S^2 = 10.9$
Set 4: 24.2, 36.0, 18.2, 24.3, 24.0, 28.9, 28.8, 30.2, 28.1, 29.0	$\bar{y} = 27.2, S^2 = 23.0$

A tabela contém valores de uma população finita de **100** elementos. A média e a variância da polulação são, respectivamente, **$\mu=26.1$** e **$\sigma^2=17.5$** .

Tendo sido seleccionada aleatoriamente uma amostra de **10** valores desta população, obtiveram- se a média $\bar{x}$ e a variância **s^2** , sendo pouco provável que $\mu= \bar{x}$ e $\sigma^2= s^2$.

À medida que a dimensão da amostra cresce, a média e a variância da amostra tendem para a média e a variância da população

No.	$\bar{x}$	S^2
10	26.9	28.1
20	25.9	21.9
30	25.9	20.0
40	26.5	18.6
50	26.6	20.0
60	26.4	17.6
70	26.3	17.1
80	26.3	18.4
90	26.3	17.8
100	26.1	17.5

No que se segue, vão ser construídos **intervalos de confiança** cujos limites variam de forma a garantir que uma determinada variável esteja contida nesse intervalo com uma dada probabilidade.

1. Intervalo de confiança para a **média μ da população**

Sendo $\bar{x}$ a média e **S** o desvio padrão da amostra de dimensão **n** obtida a partir de uma população com distribuição normal **$N(\mu, \sigma^2)$** , tem-se:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} S/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$$

onde **$t_{\alpha/2}$** representa a **distribuição t de Student** com **nível de significância α** e **r graus de liberdade** ou redundância da amostra.

Num determinado projecto foram repetidas **16** pontarias segundo uma dada direcção, cuja média (apenas os segundos) é igual a $\bar{x}=25.4''$, com um desvio padrão igual a $S=\pm 1.3''$. Determine o intervalo de confiança a **95%** para a média da população.

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \alpha/2=0.025;$$

o número n da tabela representa o número de graus de liberdade (redundância)=16-1=15;

da tabela, $t_{\alpha/2}=2.131$;

o intervalo de confiança é então

$$25.4'' - 2.131 \cdot 1.3/4 < \mu < 25.4'' + 2.131 \cdot 1.3/4$$

$$25.4'' - 0.7'' < \mu < 25.4'' + 0.7''$$

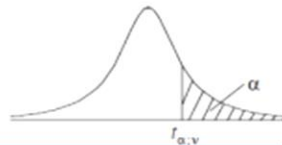
$$24.7'' < \mu < 26.1''$$

```
1 % distribuição t de Student
2
3 clc
4 clear all
5 close all
6
7 n=16;
8 nsign=0.05/2;
9 redundancia=n-1;
10 p=icdf('T',1-nsign,redundancia)
11
```

Command Window

p =

2.1314



g.l.(v)	α											
	0.4	0.25	0.1	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.26	0.7	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.26	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.69	1.337	1.746	1.869	2.117	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	1.822	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	1.819	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	0.256	0.683	1.313	1.701	1.817	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	0.256	0.683	1.310	1.697	1.812	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0.256	0.682	1.309	1.696	1.810	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0.255	0.682	1.309	1.694	1.808	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0.255	0.682	1.308	1.692	1.806	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0.255	0.682	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0.255	0.682	1.306	1.690	1.803	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	0.255	0.681	1.306	1.688	1.802	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0.255	0.681	1.305	1.687	1.800	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0.255	0.681	1.304	1.686	1.799	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0.255	0.681	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0.255	0.681	1.303	1.684	1.796	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	1.781	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.254	0.677	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.766	1.980	2.076	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
140	0.254	0.676	1.288	1.656	1.763	1.977	2.073	2.353	2.611	2.852	3.149	3.361
160	0.254	0.676	1.287	1.654	1.762	1.975	2.071	2.350	2.607	2.847	3.142	3.352
180	0.254	0.676	1.286	1.653	1.761	1.973	2.069	2.347	2.603	2.842	3.136	3.345
200	0.254	0.676	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601	2.838	3.131	3.340
250	0.254	0.675	1.285	1.651	1.758	1.969	2.065	2.341	2.596	2.832	3.123	3.330
inf	0.253	0.674	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.090	3.290

Tabela da distribuição t de Student

Seleccção da **dimensão n** da amostra

Um problema comum consiste na **determinação da dimensão da amostra** por forma a garantir a precisão pretendida. Da expressão $\bar{x} - t_{\alpha/2} S/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$ verifica-se que, não sendo possível controlar o valor de S, a única forma controlar o intervalo de confiança é através do número de repetições efectuadas, tendo-se que, em geral, **quanto maior for a amostra, menor a amplitude do intervalo de confiança**.

A **amplitude do intervalo** onde cai a média da população é $2 t_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$; sendo l metade deste intervalo, tem-se $n=(t_{\alpha/2} S/l)^2$; em aplicações práticas, como a amostra ainda não foi observada, $t_{\alpha/2}$, n e S não são conhecidos. A equação anterior tem que ser modificada, utilizando-se o valor nominal do aparelho:

$$n=(t_{\alpha/2} \sigma/l)^2$$

Fixando-se a priori o valor $\pm 2''$ a **95%** de confiança para a incerteza dos ângulos a serem medidos numa dada rede de controle, quantas repetições são necessárias se o desvio padrão nominal na medição de um ângulo for $\sigma \pm 2.6''$?

amplitude do intervalo pretendido: $2 - (-2) = 4 \Rightarrow l = 2$

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$\sigma = \pm 2.6''$ (lido no manual do aparelho ou por experiência prévia com o aparelho)

quantil correspondente a $0.975 = 1.960$

$n = (1.960 * 2.6 / 2)^2 = 6.49 \Rightarrow$ são necessárias **8 repetições** (número par mais próximo de 6.49), ou seja, 4 giros com leituras conjugadas, de forma a cancelar erros sistemáticos instrumentais.

2. Intervalo de confiança para a **variância σ^2 da população**

Sendo $\bar{x}$ a média e S o desvio padrão da amostra de dimensão n obtida a partir de valores com distribuição normal $N(\mu, \sigma)$, tem-se:

$$rS^2/\chi^2_{\alpha/2} < \sigma^2 < rS^2/\chi^2_{1-\alpha/2}$$

onde r representa o número de graus de liberdade ou redundância da amostra.

Supondo que um observador realiza 20 pontarias para um alvo distante e bem definido com um aparelho de 1" (incerteza nas leituras azimutais). Sendo o desvio padrão desta amostra igual a $\pm 1.8''$, qual é o intervalo de confiança a 95% para a variância da população?

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2=0.025$$

os valores tabelados são $\chi^2_{0.025}=32.853$, $\chi^2_{0.975}=8.907$

$$19 \cdot 1.8^2 / 32.855 < \sigma^2 < 19 \cdot 1.8^2 / 8.907$$

$$1.87 < \sigma^2 < 6.91$$

```
- clc
- clear all
- close all

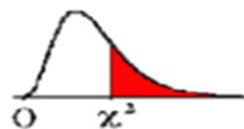
- n=20;
- nsign=0.05/2;
- redundancia=n-1;
- p=icdf('chi2',1-nsign,redundancia)
```

mmand Window

p =

32.8523

Distribuição Qui-Quadrado



A tabela fornece os valores "c" tais que
 $P(\chi^2 > c) = p$

onde "n" é o número de graus de liberdade e
 "p" é a probabilidade de sucesso.

gl	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,500	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	39,335	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	44,335	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	49,335	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
55	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	54,335	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	59,335	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	69,334	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	79,334	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	89,334	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	99,334	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169
110	75,550	78,458	82,867	86,792	91,471	109,334	129,385	135,480	140,917	147,414	151,948
120	83,852	86,923	91,573	95,705	100,624	119,334	140,233	146,567	152,211	158,950	163,648

Tabela da distribuição χ^2

3. Intervalo de confiança para a **razão de variâncias de duas populações**

Sendo $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ as médias e S_1 e S_2 os desvios padrão de duas amostras aleatórias obtidas de populações normais, tem-se que o intervalo de confiança para σ_1^2/σ_2^2 é dado por:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, r_1, r_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \times F_{\frac{\alpha}{2}, r_2, r_1}$$

onde F é a distribuição F , r_1 e r_2 são os graus de liberdade de cada amostra.

Distribuição F de Snedecor

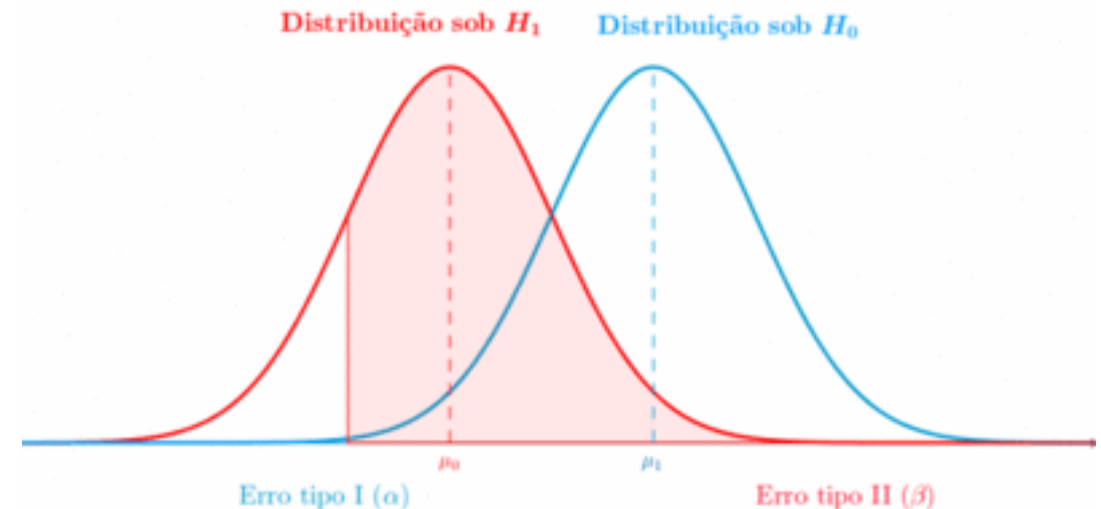
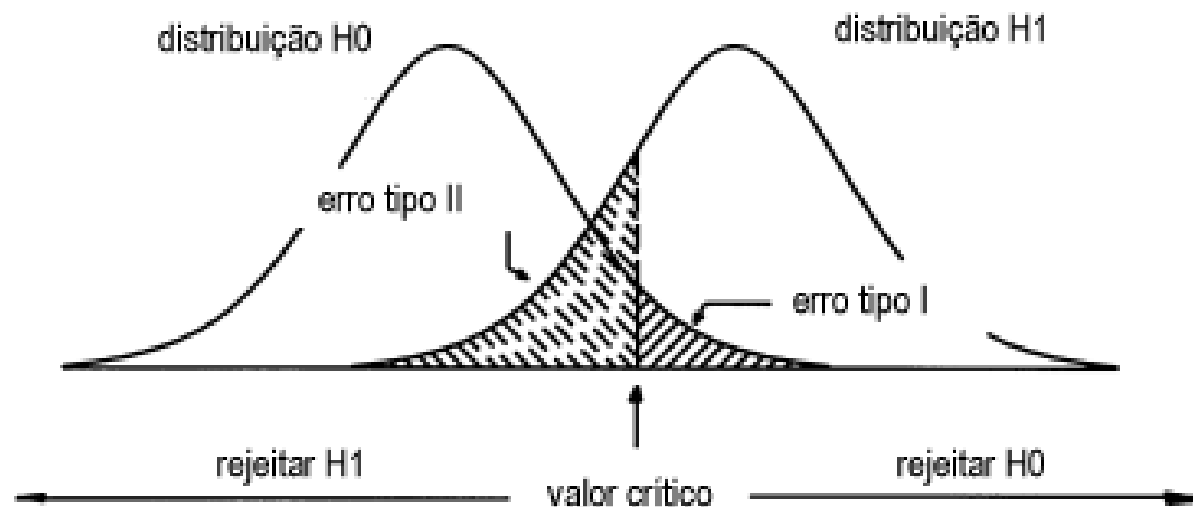
v1 = graus de liberdade do numerador

v2	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	0,100	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
	0,050	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,90	245,95	248,02	249,05	250,10	251,14	252,20	253,25
	0,025	647,79	799,48	864,15	899,60	921,83	937,11	948,20	956,64	963,28	968,63	976,72	984,87	993,08	997,27	1001,40	1005,60	1009,79	1014,04
	0,010	4052,18	4999,34	5403,53	5624,26	5763,96	5858,95	5928,33	5980,95	6022,40	6055,93	6106,68	6156,97	6208,66	6234,27	6260,35	6286,43	6312,97	6339,51
2	0,100	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
	0,050	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49
	0,010	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49
3	0,100	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
	0,050	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95
	0,010	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	0,100	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
	0,050	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31
	0,010	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	0,100	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
	0,050	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
	0,025	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07
	0,010	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	0,100	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
	0,050	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
	0,010	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	0,100	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
	0,050	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,20
	0,010	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	0,100	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
	0,050	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73
	0,010	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	0,100	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
	0,050	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
	0,025	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
	0,010	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	0,100	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
	0,050	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
	0,025	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
	0,010	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	0,100	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
	0,050	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
	0,025	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
	0,010	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	0,100	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
	0,050	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
	0,025	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
	0,010	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	0,100	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
	0,050	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
	0,025	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
	0,010	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	0,100	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
	0,050	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
	0,025	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
	0,010	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09

Os procedimentos utilizados para testar a validade de uma estatística são designados por **testes de hipóteses**, cujos elementos básicos são:

- Hipótese nula, H_0 , afirmação que compara uma estatística da população com uma estatística da amostra, implicando que a amostra é parte da população
- Hipótese alternativa, H_1 , que representa uma população alternativa de onde foi obtida a amostra
- A região de rejeição representa os valores para os quais o teste é rejeitado
- O teste é efectuado a partir da amostra e o resultado permite aceitar ou rejeitar a hipótese nula, podendo afirmar-se neste último caso que a estatística calculada não é consistente com a amostra utilizada

Seja qual for a decisão baseada no teste de hipóteses, há sempre a possibilidade dessa decisão estar errada. O primeiro erro, designado por **erro tipo I**, consiste na rejeição da hipótese nula, sendo esta verdadeira; quando a hipótese nula não é rejeitada sendo falsa, comete-se o **erro tipo II**. Como estes erros se referem a populações diferentes, eles não estão directamente relacionados, sendo então necessário haver uma decisão sobre qual dos dois tipos de erro é mais importante em cada situação.



α maior $\Rightarrow$ erro tipo I maior $\Rightarrow$ erro tipo II menor

O nível de significância α é probabilidade de se rejeitar a hipótese nula sendo ela verdadeira.

O nível de confiança $1-\alpha$ é a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira.

	Hipótese nula H_0 é verdadeira	Hipótese nula H_0 é falsa
Hipótese nula H_0 é rejeitada	Erro do tipo I	Não há erro
Hipótese nula H_0 não é rejeitada	Não há erro	Erro do tipo II

Os funcionários de um spa fazem um teste de qualidade da água diário na piscina e se o nível de contaminantes for muito alto, eles fecham temporariamente a piscina para realizar um tratamento da água.

Definindo a hipótese **H0** como sendo a qualidade da água é aceitável e a hipótese **H1** como sendo a qualidade da água não é aceitável:

- Qual será a consequência de um **erro tipo I** ?
 1. O spa fecha a piscina quando ela tem de ser fechada
 2. O spa fecha a piscina quando ela não tem de ser fechada
 3. O spa não fecha a piscina quando ela tem de ser fechada

2.

H0: a qualidade da água é aceitável $\Rightarrow$ a piscina abre

H1: a qualidade da água não é aceitável $\Rightarrow$ a piscina fecha

O erro tipo I corresponde a rejeitar H0 sendo H0 verdadeira, ou seja, a qualidade da água é aceitável $\Rightarrow$ a piscina fecha (quando devia abrir).

- Qual será a consequência de um **erro tipo II** ?
 1. O spa fecha a piscina quando ela tem de ser fechada
 2. O spa fecha a piscina quando ela não tem de ser fechada
 3. O spa não fecha a piscina quando ela tem de ser fechada

3.

H0: a qualidade da água é aceitável => a piscina abre

H1: a qualidade da água não é aceitável => a piscina fecha

O erro tipo II corresponde a aceitar H1 sendo H1 falsa, ou seja, a qualidade da água não é aceitável => a piscina abre (quando devia fechar).

- Em termos de segurança, qual é o erro com consequências mais perigosas?

1. Tipo I

2. Tipo II

2. Nesta situação a piscina abre quando não devia abrir e assim as pessoas vão nadar em água contaminada

- Uma vez que o erro tipo II envolve grandes preocupações sanitárias, o spa está a considerar usar um nível de significância diferente de 0.05. Que nível de significância deve ser usado para reduzir a probabilidade de um erro tipo II?

1. $\alpha=0.01$

2. $\alpha=0.025$

3. $\alpha=0.1$

3. Usar um nível de significância α maior aumenta a probabilidade de um erro tipo I mas diminui a probabilidade de um erro tipo II (desta forma acontecerá mais vezes a piscina ser encerrada quando a qualidade da água for boa mas acontecerá menos vezes a piscina não ser encerrada quando a qualidade da água for má: o spa perderá dinheiro por ter a piscina fechada quando poderia estar aberta mas não perderá dinheiro em eventuais indemnizações por ter a piscina aberta quando deveria estar fechada).

Um conhecido nosso quer iniciar um negócio de “food truck” e está indeciso em que cidades deve começar a operar, de forma a garantir uma procura suficientemente grande.



Designando a hipótese **H0** como correspondendo a **procura não suficientemente grande** e a hipótese **H1** como correspondendo a **procura suficientemente grande**:

- Qual é a consequência de um erro tipo I ?
 1. Ele não escolhe uma cidade na qual a procura é de facto suficientemente grande
 2. Ele escolhe uma cidade na qual a procura é de facto suficientemente grande
 3. Ele escolhe uma cidade na qual a procura de facto não é suficientemente grande

3.

H0: cidade com procura não suficientemente grande => não escolher

H1: cidade com procura suficientemente grande => escolher

O erro tipo I corresponde a rejeitar H0 sendo H0 verdadeira, ou seja, escolhe-se uma cidade com procura não suficientemente grande.

- Qual é a consequência de um erro tipo II ?
 1. Ele não escolhe uma cidade na qual a procura é de facto suficientemente grande
 2. Ele escolhe uma cidade na qual a procura é de facto suficientemente grande
 3. Ele escolhe uma cidade na qual a procura de facto não é suficientemente grande

1.

H0: cidade com procura não suficientemente grande => não escolher

H1: cidade com procura suficientemente grande => escolher

O erro tipo II corresponde a aceitar H1 sendo H1 falsa, ou seja, não se escolhe uma cidade com procura suficientemente grande

- Qual dos níveis de significância deve ser escolhido?

1. $\alpha=0.01$

2. $\alpha=0.08$

3. $\alpha=0.1$

1. É melhor não escolher uma cidade com procura suficientemente grande – erro tipo II - (não se ganha dinheiro) do que escolher uma cidade com procura não suficientemente grande – erro tipo I - (perde-se dinheiro), isto é, é melhor cometer o erro tipo II do que o erro tipo I (α pequeno $\Rightarrow$ erro tipo I pequeno $\Rightarrow$ erro tipo II grande).

Uma amostra de 10000 pessoas foi testada para o vírus da gripe. 9200 pessoas testaram negativo e 800 testaram positivo e destas últimas, 40 pessoas são **falsos positivos**, testando positivo embora não estejam infectadas pelo vírus, o que constitui um caso de um **erro tipo I**. De forma semelhante 460 pessoas testam negativo quando realmente estão com gripe (**falsos negativos**), o que é um exemplo de um **erro tipo II**.

H0: pessoa testa positivo => está infectada com gripe

H1: pessoa testa negativo => não está infectada com gripe

Erro tipo I: pessoa testa positivo mas não está infectada com gripe (falso positivo)

Erro tipo II: pessoa testa negativo mas está infectada com gripe (falso negativo)



Taxa de falsos positivos = número de falsos positivos/total de pessoas não infectadas
= $40/(9200-460) = 40/8740 \approx 0.00458$ = probabilidade de se cometer um erro do tipo I,
que se designa por **nível de significância α** do teste ($\alpha=0.458\%$).

Taxa de falsos negativos = número de falsos negativos/total de pessoas infectadas
= $460/(460+800-40) = 460/1220 \approx 0.377$ = probabilidade de se cometer um erro do tipo II,
que se designa por β , sendo a **potência do teste** dada por $1-\beta=0.623=62.3\%$.

Resumindo, existe uma probabilidade de 0.458% de se cometer um erro do tipo I (falso positivo) e uma probabilidade de 62.3% de se detectar correctamente uma pessoa infectada.

As especificações de um trabalho impõem uma exactidão posicional em 95% dos pontos estação para apoio a um levantamento de grande rigor de ± 5 mm. A que corresponde um erro tipo I?

H0: não se aceita o ponto quando as coordenadas estão fora da tolerância

H1: aceita-se o ponto quando as coordenadas estão dentro da tolerância

Erro tipo I: não se aceita o ponto quando as coordenadas estão dentro da tolerância

Erro tipo II: aceita-se o ponto quando as coordenadas estão fora da tolerância

O **erro tipo I**, também conhecido como "**falso positivo**", ocorre quando se rejeita uma hipótese nula verdadeira. No contexto de um levantamento de grande rigor com uma precisão de ± 5 mm e uma exigência de 95% de exatidão posicional nos pontos de estação, o erro tipo I refere-se à probabilidade de que um ponto estação seja considerado posicionado incorrectamente (dentro da margem de erro de ± 5 mm) quando, na realidade, está dentro dessa margem.

O **erro tipo II**, também conhecido como "**falso negativo**", ocorre quando se aceita uma hipótese nula falsa. No contexto de um levantamento topográfico de alta precisão, onde se exige que 95% dos pontos de estação estejam dentro de uma margem de erro de ± 5 mm, o erro tipo II refere-se à probabilidade de que um ponto estação que, na realidade, está fora dessa margem de erro seja erroneamente considerado dentro dela.

Em termos estatísticos, o erro tipo II está relacionado com a potência do teste, que é a probabilidade de rejeitar corretamente uma hipótese nula falsa. Quanto maior o erro tipo II, menor a potência do teste. Portanto, **minimizar o erro tipo II é essencial para garantir a precisão e a confiabilidade dos resultados do levantamento topográfico.**

Para reduzir o erro tipo II, é importante utilizar equipamentos de alta qualidade, realizar calibrações regulares e adotar procedimentos de medição rigorosos. Além disso, a repetição de medições e a análise estatística dos dados podem ajudar a identificar e corrigir possíveis erros, aumentando a precisão geral do levantamento.

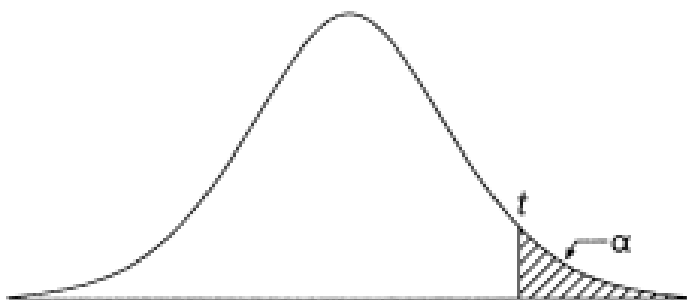
Em levantamentos de alta precisão, é geralmente **mais crítico evitar erros Tipo II.**

Aceitar uma medição como válida quando ela não atende às especificações pode comprometer a qualidade do levantamento e levar a decisões baseadas em dados imprecisos. Embora erros Tipo I possam resultar em medições desnecessárias ou ajustamentos que não são realmente necessários, eles tendem a ser menos prejudiciais do que aceitar medições imprecisas.

Portanto, é preferível cometer um erro Tipo I (falso positivo) do que um erro Tipo II (falso negativo) em levantamentos topográficos de alta precisão. Isso garante que todas as medições atendam aos rigorosos padrões de precisão exigidos para o levantamento.

1. Teste de hipóteses para a **média μ da população**

Pretende-se testar o valor $\bar{x}$ da média de uma amostra de dimensão n contra um valor conhecido μ a um nível de significância α : sendo $t = (\bar{x} - \mu) / S / \sqrt{n}$, a região de rejeição de H_0 é

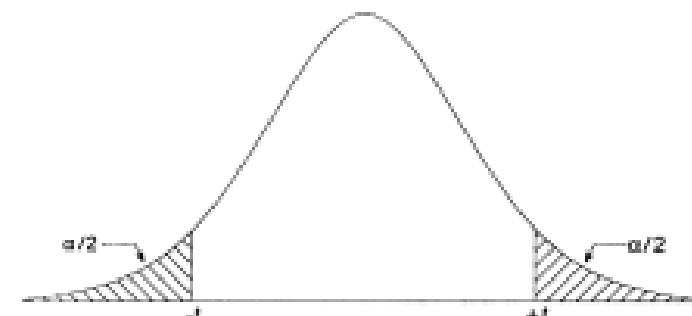


unilateral

$$H_0: \mu = \bar{x}$$

$$H_1: \mu > \bar{x} \text{ (ou } \mu < \bar{x} \text{)}$$

região de rejeição: $t > t_\alpha$ (ou $t < t_\alpha$)



bilateral

$$H_0: \mu = \bar{x}$$

$$H_1: \mu \neq \bar{x}$$

região de rejeição: $|t| > t_{\alpha/2}$

Uma base de calibração para aparelhos EDM com comprimento **400.008 m** foi medida 20 vezes com um dado aparelho, obtendo-se uma média igual a **400.012 m** com desvio padrão **± 0.002 m**. Este valor é significativamente diferente do valor calibrado ao nível de significância 0.05?

Admitindo que foram seguidos os procedimentos de campo adequados, pretende-se determinar se de acordo com as especificações o aparelho pode ser considerado calibrado e, portanto, se fornece distâncias pertencentes à população de valores calibrados. Para responder à questão vai ser efectuado um teste de hipóteses bilateral conduzido de forma a determinar se o valor obtido é igual ou diferente do valor calibrado ao nível de significância 0.05; assim, o valor medido é rejeitado se for estatisticamente demasiado curto ou demasiado longo em relação ao valor calibrado.

$H_0: \mu = 400.12$, $H_1: \mu \neq 400.12$ (teste bilateral)

valor critico: $t = (\bar{x} - \mu) / S / \sqrt{n} = (400.012 - 400.008) / 0.002 / \sqrt{20} = 8.944$

graus de liberdade: $20 - 1 = 19$

região de rejeição: $t_{\alpha/2, 19} = 2.093$

$t > : t_{\alpha/2, 19}$, **a hipótese nula é rejeitada**, isto é, há razões para supor que o valor medido é significativamente diferente do valor calibrado a um nível de significância 5% (o aparelho utilizado poderá estar afectado por um erro sistemático).

O intervalo de confiança a 95% para a média da população é dado por:

$400.0012 - 2.093 \times 0.002 / \sqrt{20} \approx \underline{400.011} < 400.008 < \underline{400.0012 + 2.093 \times 0.002 / \sqrt{20} \approx 400.013}$,

isto é, $\mu = 400.008$ está fora do intervalo, o que significa que o valor calibrado não está contido no intervalo obtido a partir dos valores medidos.

2. Teste de hipóteses para a **variância σ^2 da população**

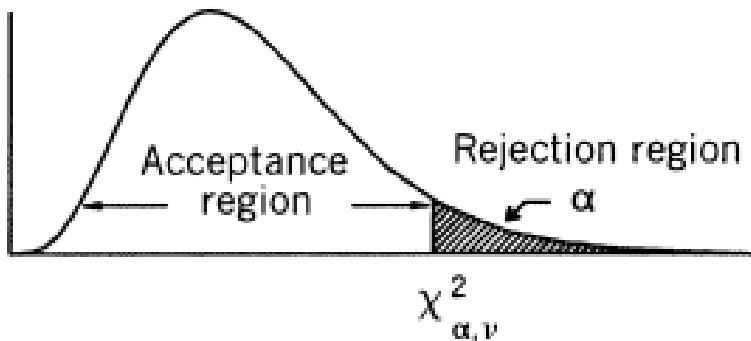
Pretende-se comparar a variância S^2 de uma amostra de dimensão n a variância σ^2 da população a um nível de significância α : sendo $\chi^2 = rS^2/\sigma^2$, a região de rejeição de H_0 é

unilateral

$$H_0: S^2 = \sigma^2$$

$$H_1: S^2 > \sigma^2 \text{ ou } S^2 < \sigma^2$$

região de rejeição: $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ (ou $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$)

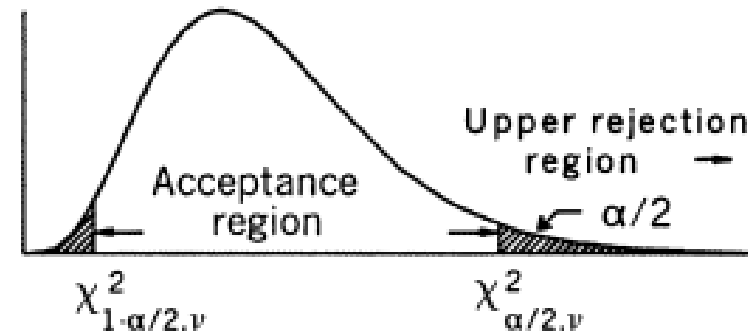


bilateral

$$H_0: S^2 = \sigma^2$$

$$H_1: S^2 \neq \sigma^2$$

região de rejeição: $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ ou $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$



O director de uma firma de topografia pretende que todos os topógrafos sejam capazes de efectuar leituras num dado aparelho a menos de $\pm 1.5''$. Para testar este valor, pediu ao topógrafo mais graduado para efectuar um teste, realizando 30 leituras, obtendo o valor $S = \pm 0.9''$. Estes valores estão dentro do limite $\pm 1.5''$ ao nível de significância 5%?

$$H_0: S^2 = \sigma^2, H_1: S^2 > \sigma^2$$

graus de liberdade: $30 - 1 = 29$

$$\text{valor critico: } \chi^2 = 29 \times 0.9^2 / 1.5^2 = 1.44$$

$$\text{região de rejeição: } \chi^2_{\alpha, r} = \chi^2_{0.05, 29} = 42.56$$

$$\chi^2 < \chi^2_{0.05, 29} \Rightarrow \text{a hipótese nula não é rejeitada}$$

O facto de a hipótese H_0 não ser rejeitada não significa necessariamente que o valor $\pm 1.5''$ venha a ser cumprido pois seleccionou-se apenas uma pessoa, o que pode conduzir a uma má interpretação dos resultados.

3. Teste de hipóteses para a **razão de variâncias de duas populações**

unilateral

$$H_0: S_1^2 / S_2^2 = 1$$

$$H_1: S_1^2 / S_2^2 > 1 \text{ (ou } H_1: S_1^2 / S_2^2 < 1)$$

$$\text{região de rejeição: } F > F_\alpha \text{ (ou } F < F_\alpha)$$

bilateral

$$H_0: S_1^2 / S_2^2 = 1$$

$$H_1: S_1^2 / S_2^2 \neq 1$$

$$\text{região de rejeição: } F > F_{\alpha/2}$$

Propagação de erros aleatórios em medições indirectas

Considere-se a função $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$, onde x_1 e x_2 são duas variáveis aleatórias independentes e com desvios padrão σ_1 e σ_2 , sendo a_1 e a_2 constantes.

Sendo $\varepsilon_1^i, \varepsilon_1^{ii}, \dots, \varepsilon_1^n$ e $\varepsilon_2^i, \varepsilon_2^{ii}, \dots, \varepsilon_2^n$ erros cometidos em n observações de x_1 e x_2 , em que $\varepsilon_1^i = x_1^i - \mu_1, \varepsilon_1^{ii} = x_1^{ii} - \mu_1, \dots, \varepsilon_1^n = x_1^n - \mu_1$ e $\varepsilon_2^i = x_2^i - \mu_2, \varepsilon_2^{ii} = x_2^{ii} - \mu_2, \dots, \varepsilon_2^n = x_2^n - \mu_2$, sendo $\mu_1 = x_1^v = x_1 - \varepsilon_1$ e $\mu_2 = x_2^v = x_2 - \varepsilon_2$ os valores verdadeiros de x_1 e x_2 , o valor verdadeiro de y (o índice v quer dizer verdadeiro) é dado por:

$$\begin{cases} y_1^v = a_1 x_1^{iv} + a_2 x_2^{iv} = a_1 (x_1^i - \varepsilon_1^i) + a_2 (x_2^i - \varepsilon_2^i) = a_1 x_1^i + a_2 x_2^i - (a_1 \varepsilon_1^i + a_2 \varepsilon_2^i) = y_1 - (a_1 \varepsilon_1^i + a_2 \varepsilon_2^i) \\ y_2^v = a_1 x_1^{iiv} + a_2 x_2^{iiv} = a_1 (x_1^{ii} - \varepsilon_1^{ii}) + a_2 (x_2^{ii} - \varepsilon_2^{ii}) = a_1 x_1^{ii} + a_2 x_2^{ii} - (a_1 \varepsilon_1^{ii} + a_2 \varepsilon_2^{ii}) = y_2 - (a_1 \varepsilon_1^{ii} + a_2 \varepsilon_2^{ii}) \\ y_n^v = a_1 x_1^{n \dots v} + a_2 x_2^{n \dots v} = a_1 (x_1^n - \varepsilon_1^n) + a_2 (x_2^n - \varepsilon_2^n) = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n - (a_1 \varepsilon_1^n + a_2 \varepsilon_2^n) = y_n - (a_1 \varepsilon_1^n + a_2 \varepsilon_2^n) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y_1 - y_1^v = (a_1 \epsilon_1^i + a_2 \epsilon_2^i) \\ y_2 - y_2^v = (a_1 \epsilon_1^{ii} + a_2 \epsilon_2^{ii}) \\ \dots \\ y_n - y_n^v = (a_1 \epsilon_1^n + a_2 \epsilon_2^n) \end{cases}$$

Sendo por definição $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 / n$, de

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 / n = [(a_1 \epsilon_1^i + a_2 \epsilon_2^i)^2 + (a_1 \epsilon_1^{ii} + a_2 \epsilon_2^{ii})^2 + \dots + (a_1 \epsilon_1^n + a_2 \epsilon_2^n)^2] / n =$$

$$[(a_1 \epsilon_1^i)^2 + 2 a_1 \epsilon_1^i a_2 \epsilon_2^i + (a_2 \epsilon_2^i)^2 + (a_1 \epsilon_1^{ii})^2 + 2 a_1 \epsilon_1^{ii} a_2 \epsilon_2^{ii} + (a_2 \epsilon_2^{ii})^2 + \dots + (a_1 \epsilon_1^n)^2 + 2 a_1 \epsilon_1^n a_2 \epsilon_2^n + (a_2 \epsilon_2^n)^2] / n =$$

$$[a_1^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_1^2 + 2 a_1 a_2 \sum_{i=1}^N \epsilon_1 \epsilon_2 + a_2^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_2^2] / n =$$

$$a_1^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_1^2 / n + 2 a_1 a_2 \sum_{i=1}^N \epsilon_1 \epsilon_2 / n + a_2^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_2^2 / n =$$

$$a_1^2 \sigma_{x1}^2 + 2 a_1 a_2 \sigma_{x1x2} + a_2^2 \sigma_{x2}^2$$

Na forma matricial tem-se:

$$\Sigma_y = [a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Se y função de n variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, tem-se:

$$\Sigma_y = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \dots & \sigma_{x1xn} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & \dots & \sigma_{x2xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x1xn} & \sigma_{x2xn} & \dots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Considerando um conjunto de m funções independentes de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, tem-se:

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \dots & \sigma_{x1xn} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & \dots & \sigma_{x2xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x1xn} & \sigma_{x2xn} & \dots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se as m funções não forem lineares, utilizando um desenvolvimento em série de Taylor e retendo apenas os termos de 1ª ordem, tem-se:

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1xn} & \cdots & \sigma_{x1xn} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & \cdots & \sigma_{x2xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x1xn} & \sigma_{x2xn} & \cdots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ou

$$\Sigma_y = J \Sigma_x J^t$$

onde J é a matriz jacobiana da transformação.

Sejam $A=B+C$, B e C quantidades independentes com desvios padrão iguais a σ_B e σ_C , respectivamente. Calcule σ_A .

$$\Sigma_A = \sigma_A^2 = J \Sigma_{BC} J^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial B} & \frac{\partial A}{\partial C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_B^2 & 0 \\ 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial B} \\ \frac{\partial A}{\partial C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_B^2 & 0 \\ 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_B^2 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_B^2 + \sigma_C^2$$

Dado um paralelepípedo de dimensões $C=40.00\pm0.05\text{m}$, $L=20.00\pm0.03\text{m}$, $A=10.00\pm0.02\text{m}$, calcule a) o volume desse paralelepípedo b) a incerteza associada ao volume.

$$V=C \times L \times A=40.00 \times 20.00 \times 10.00=8000.00\text{m}^3$$

$$\sigma^2_V = J \Sigma_{CLA} J^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial C} & \frac{\partial V}{\partial L} & \frac{\partial V}{\partial A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial C} \\ \frac{\partial V}{\partial L} \\ \frac{\partial V}{\partial A} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} LA & CA & CL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LA \\ CA \\ CL \end{bmatrix}$$

$$\sigma_V = \sqrt{(LA)^2 * 0.05^2 + (CA)^2 * 0.03^2 + (CL)^2 * 0.02^2} = \sqrt{40000.00 * 0.05^2 + 160000.00 * 0.03^2 + 640000.00 * 0.02^2} = \pm 22.00 \text{ m}^3$$

A partir do ponto A, mediu-se a inclinação da visada para o ponto B: $\alpha=3^{\circ}.00$, com incerteza $\sigma_{\alpha} = \pm 1'$, assim como a distância inclinada A para B: $D=1000,00$ m, com incerteza $\sigma_D = \pm 0.05$ m.

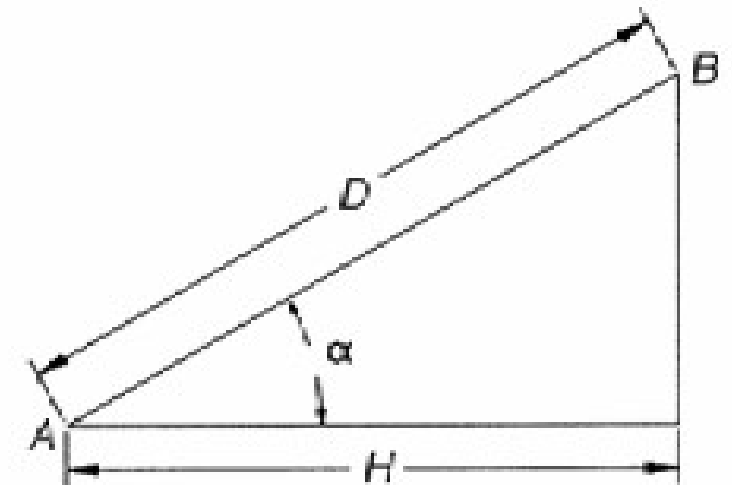
Calcule a distância horizontal e a respectiva incerteza.

$$H = D \cos \alpha = 1000.00 * \cos(3^{\circ}.00) = 998.63 \text{ m}$$

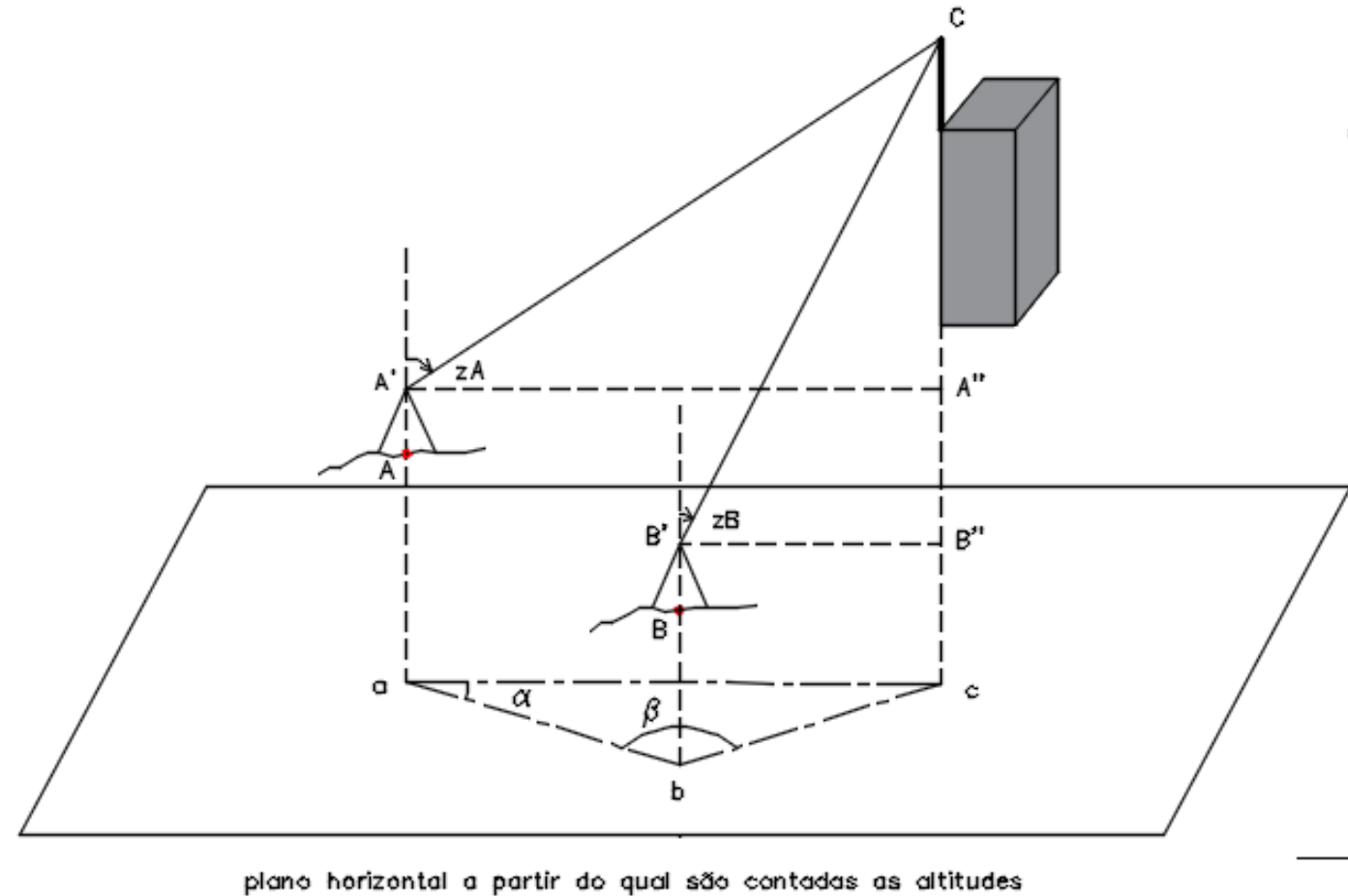
$$\sigma_H^2 = J \Sigma_{D,\alpha} J^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial D} D \cos \alpha & \frac{\partial}{\partial \alpha} D \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial D} D \cos \alpha \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} D \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -D \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & (\frac{1'}{60'} * \frac{\pi}{180^{\circ}})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -D \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma_H = \sqrt{\begin{bmatrix} \cos \alpha \times 0.05^2 & 0 \\ 0 & (-D \sin \alpha) (\frac{1'}{60'} * \frac{\pi}{180^{\circ}})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -D \sin \alpha \end{bmatrix}} = \sqrt{(\cos \alpha \times 0.05)^2 + (D \sin \alpha)^2 (\frac{1'}{60'} * \frac{\pi}{180^{\circ}})^2}$$

$$\sqrt{(0,9986 \times 0.05)^2 + (0.0523 \times 1000 \times \frac{1'}{60'} * \frac{\pi}{180^{\circ}})^2} = \pm 0.052 \text{ m}$$



Pretende-se calcular a altitude do ponto C localizado no topo da chaminé de um edifício e a respectiva incerteza, tendo sido observados os ângulos e a distância horizontal indicados na figura. As altitudes dos pontos A e B são 1298.65 ± 0.006 m e 1301.53 ± 0.004 m, respectivamente. A altura do aparelho nos pontos A e B é igual a 5.25 ± 0.005 m e 5.18 ± 0.005 m, respectivamente.



$$\alpha = 44^{\circ}12'34'' \pm 8.6'', \quad \beta = 39^{\circ}26'56'' \pm 11.3''$$

$$z_A = 81^{\circ}47'13'' \pm 4.1'', \quad z_B = 84^{\circ}09'50'' \pm 5.1''$$

$$ab = 136.45 \pm 0.018 \text{ m}$$

Os ângulos medidos no plano vertical são distâncias zenitais e os ângulos medidos no plano horizontal são ângulos azimutais.

Usando a lei dos senos no triângulo abc, tem-se que as distâncias horizontais entre os pontos a e c e b e c são:

$$\text{sen } \alpha / bc = \text{sen } \beta / ac = \text{sen } \gamma / ab, \gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$ac = ab \text{ sen } \beta / \text{sen } (180 - (\alpha + \beta)) = ab \text{ sen } \beta / \text{sen } (\alpha + \beta)$$

$$bc = ab \text{ sen } \alpha / \text{sen } (\alpha + \beta)$$

Tem-se então, dos triângulos CA'A'' e CB'B'':

$$H_C^A = H_{\hat{A}} + a_i^A + ac / \tan z_A = H_{\hat{A}} + a_i^A + ab \text{ sen } \beta / [\text{sen } (\alpha + \beta) \tan z_A] = 1316.490715$$

$$H_C^B = H_B + a_i^B + bc / \tan z_B = H_B + a_i^B + ab \text{ sen } \alpha / [\text{sen } (\alpha + \beta) \tan z_B] = 1316.494868$$

E, finalmente

$$H_C = (H_C^A + H_C^B) / 2 = 1316.492792 \text{ m}$$

Quanto à análise de erros, tem-se: $\Sigma_{H_C} = J \Sigma J^t$ em que $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_C}{\partial H_A} & \frac{\partial H_C}{\partial H_B} & \frac{\partial H_C}{\partial H_{a_i^A}} & \frac{\partial H_C}{\partial H_{a_i^B}} & \frac{\partial H_C}{\partial H_\alpha} & \frac{\partial H_C}{\partial H_\beta} & \frac{\partial H_C}{\partial H_{z_A}} & \frac{\partial H_C}{\partial H_{z_B}} & \frac{\partial H_C}{\partial H_{ab}} \end{bmatrix}$, com

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_A} = 0.5, \quad \frac{\partial H_C}{\partial H_B} = 0.5$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_{a_i^A}} = 0.5, \quad \frac{\partial H_C}{\partial H_{a_i^B}} = 0.5$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{ab \sin(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)^2 \tan(zA)} + \frac{\frac{1}{2} ab \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zB)} - \frac{1}{2} \frac{ab \sin(\alpha) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)^2 \tan(zB)} = 3.785962026$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_\beta} = \frac{1}{2} \frac{ab \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zA)} - \frac{1}{2} \frac{ab \sin(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)^2 \tan(zA)} - \frac{1}{2} \frac{ab \sin(\alpha) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)^2 \tan(zB)} = 6.407394836$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_{zA}} = -\frac{1}{2} \frac{ab \sin(\beta) (1 + \tan(zA)^2)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zA)^2} = -44.52499012$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_{zB}} = -\frac{1}{2} \frac{ab \sin(\alpha) (1 + \tan(zB)^2)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zB)^2} = -48.36511310$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial H_{ab}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zA)} + \frac{\frac{1}{2} \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(zB)} = 0.08199187$$

$J := [.5 \quad .5 \quad .5 \quad .5 \quad 3.785962026 \quad 6.407394836 \quad -44.52499012 \quad -48.36511310 \quad .0819918769]$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} .000036 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .000016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .000025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .000025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .1738387684 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3001280738 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3951094775 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .6113502387 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .000324 \end{bmatrix}$$

$\text{Sigma_HB} = [.0000300396336519976275]$

$\text{incerteza_HB} = .004877461884$

1. Foi observada uma linha de nivelamento geométrico na qual o aparelho foi estacionado 10 vezes, tendo em cada estacionamento sido efectuadas leituras nas miras à rectaguarda e à frente, sendo a incerteza de cada leitura igual a 0.0015 m, devido a causas diversas. Qual é a incerteza estimada para o desnível entre os pontos inicial e final da linha?

2. Uma linha foi medida em secções conforme indicado na tabela seguinte; calcule a incerteza estimada do comprimento AE.

Secção	Comprimento	Incerteza
AB	129.870 m	± 0.018 m
BC	318.260 m	± 0.024 m
CD	179.841 m	± 0.018 m
DE	217.713 m	± 0.024 m

3. O volume de um cone é dado por $V = \pi D^2 h / 12$; se a altura medida de um cone for $h = 10.0$ m com incerteza $s_h = \pm 0.20$ m e o diâmetro medido for igual a $D = 6.0$ m, com incerteza $s_D = \pm 0.20$ m, calcule o volume do cone e a respectiva incerteza.

4. O manual de um distanciômetro EDM indica que a precisão do aparelho é igual $\pm(5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$, sendo esta última parcela calculada como $\text{distância} \times 5 / 1000000$. a) que expressão deve ser utilizada para determinar a incerteza numa distância medida com este aparelho? b) qual é a incerteza associada a uma distância medida de 2750.34 m medida com este aparelho?

5. Um recinto desportivo é limitado por um rectângulo e por dois semi-círculos, conforme mostra a figura. Utilizando uma estação total cujo distanciômetro tem uma incerteza nominal igual a $\pm(5 \text{ mm} + 10 \text{ ppm})$, obtiveram-se os valores 1609.350 m e 256.136 m para os lados do rectângulo. Admitindo erros apenas na medição das distâncias: a) qual é a área do recinto? b) qual é a incerteza das dimensões do recinto? c) qual é a incerteza no cálculo da área do recinto?



6. Utilizando um aparelho EDM cujas especificações indicam uma incerteza na medição de distâncias igual a $\pm(3 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$, obtiveram-se os valores 437.592 m por 138.279 m para as dimensões de um edifício. Admitindo apenas erros na medição das distâncias, calcule a) a incerteza nas dimensões do edifício b) a área do edifício e a respectiva incerteza.

7. O erro de leitura cometido por um observador quando utiliza um dado aparelho é igual a $\pm 1.5''$. Após apontar repetidamente para um alvo distante com o mesmo aparelho, o observador determina o erro combinado de pontaria e leitura como sendo igual a $\pm 2.6''$. Qual é o erro de pontaria que ele comete?

8. Para cada fórmula de correcção das leituras efectuadas com uma fita métrica, indique a expressão de propagação do erro: a) $H=L \cos \alpha$, onde L é a distância inclinada e α a inclinação. b) $C_T=k(T_f-T)L$, onde k representa o coeficiente de expansão térmica, T_f a temperatura medida, T a temperatura de calibração da fita e L o comprimento medido. c) $C_p=(P_f-P)L/AE$, onde P_f é a tensão medida, P a tensão de calibração, A a secção transversal da fita, E o módulo de elasticidade da fita e L o comprimento medido. d) $C_S=-w^2 l^3_s/24P_f^2$, onde w é o peso por unidade de comprimento da fita, l a distância entre suportes e P_f é a tensão medida.

9. Uma dada distância foi medida em duas partes com uma fita métrica de 100 m de comprimento e de uma única vez com uma fita métrica de 200 m de comprimento, sendo que cada método foi repetido 10 vezes:

Fita métrica de 100 m de comprimento
1ª secção
100.001, 100.018, 99.974, 99.992, 99.972
99.990, 99.950, 99.984, 99.979, 99.988
2ª secção
49.329, 49.365, 49.346, 49.300, 49.327
49.324, 49.349, 49.357, 49.341, 49.333

Fita métrica de 200 m de comprimento
149.326, 149.397, 149.357, 149.294, 149.337
149.338, 149.329, 149.331, 149.370, 149.363

Calcule a incerteza na distância total medida com as fitas de 100 m e 200 m de comprimento. Qual das fitas conduziu a uma incerteza mais baixa?