

Fronteiras, ondas estacionárias e interferência

O que acontece quando as ondas se encontram



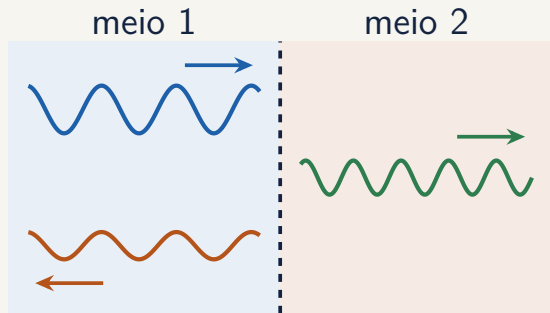
Três perguntas

- Porque é que um impulso numa corda volta invertido se a extremidade está presa, e direito se está livre?
- Porque é que uma corda de guitarra só vibra em certas frequências?
- Com duas torneiras a pingar ao mesmo ritmo numa tina, porque é que aparecem linhas onde a água fica parada?

FRONTEIRA ENTRE MEIOS

Uma onda encontra uma fronteira

- Parte da onda é **reflectida** e parte é **transmitida**.
- A frequência é a mesma nos dois meios.
- Mudam v e λ .



Incidente (azul), reflectida (laranja) e transmitida (verde).

FRONTEIRA ENTRE MEIOS

Condições de fronteira numa corda

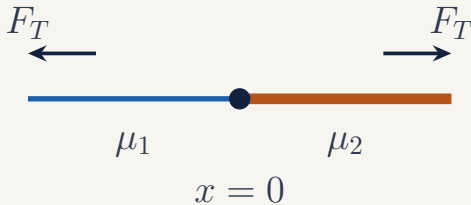
Troços μ_1 e μ_2 , mesma tensão F_T .

A corda não se parte

$$y(0^-, t) = y(0^+, t)$$

A junção não tem massa

$$F_T \frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t) = F_T \frac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)$$



FRONTEIRA ENTRE MEIOS

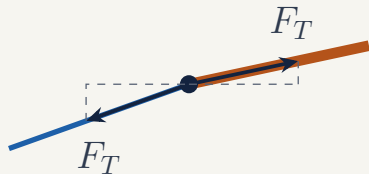
Porque é que as inclinações são iguais

Força vertical de cada troço sobre a junção: $F_T \times$ inclinação.

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T \frac{\partial y}{\partial x}(0^+) - F_T \frac{\partial y}{\partial x}(0^-)$$

A junção não tem massa, $m = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^-) = \frac{\partial y}{\partial x}(0^+)$$



IMPEDÂNCIA

Impedância de onda

Força da esquerda sobre a direita:

$$F_y = -F_T \partial y / \partial x.$$

Onda para a direita: $\partial y / \partial x = -\frac{1}{v} \partial y / \partial t$.

$$F_y = \frac{F_T}{v} \frac{\partial y}{\partial t} = Z \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$Z = \frac{F_T}{v} = \sqrt{F_T \mu} = \mu v$$

Onda	Z
-------------	-----

Corda	$\sqrt{F_T \mu}$
--------------	------------------

Fluido	ρv
---------------	----------

Luz	Z_0 / n
------------	-----------

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 377 \Omega$$

IMPEDÂNCIA

O que significa a impedância

- $F_y = Z \partial y / \partial t$ é a lei de um amortecedor viscoso, com $b = Z$.
- Para quem a abana, uma corda muito longa comporta-se como um amortecedor: a energia vai-se embora e não volta.
- Z grande: é preciso muita força para pôr a corda em movimento. Z pequeno: a corda move-se com pouca força.

Numa fronteira, a onda «vê» uma mudança de impedância. É isso que produz a reflexão.

IMPEDÂNCIA

As três ondas na junção

Em $x < 0$: incidente e reflectida. Em $x > 0$: transmitida. Mesma ω :

$$\begin{aligned}y_i &= A_i \cos(k_1 x - \omega t) & y_r &= A_r \cos(k_1 x + \omega t) \\y_t &= A_t \cos(k_2 x - \omega t)\end{aligned}$$

Continuidade em $x = 0$, $y_i + y_r = y_t$, para todo o t :

$$A_i + A_r = A_t$$

IMPEDÂNCIA

Das inclinações à impedância

Derivando em ordem a x e fazendo $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^-) = k_1 (A_i - A_r) \sin \omega t$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^+) = k_2 A_t \sin \omega t$$

Igualando e multiplicando por F_T/ω , com $F_T k/\omega = F_T/v = Z$:

$$Z_1 (A_i - A_r) = Z_2 A_t$$

IMPEDÂNCIA

Coeficientes de reflexão e de transmissão

Substituindo $A_t = A_i + A_r$:

$$Z_1 A_i - Z_1 A_r = Z_2 A_i + Z_2 A_r \Rightarrow (Z_1 - Z_2) A_i = (Z_1 + Z_2) A_r$$

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t = \frac{A_t}{A_i} = 1 + r = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- Para a força, os sinais trocam: $r_F = -r$.
- Se $Z_1 = Z_2$, não há reflexão.

IMPEDÂNCIA

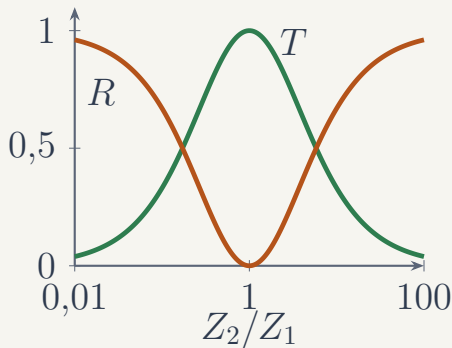
Coeficientes de potência

Com $\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$ e ω igual:

$$R = \frac{Z_1 A_r^2}{Z_1 A_i^2} = r^2$$

$$T = \frac{Z_2 A_t^2}{Z_1 A_i^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2$$

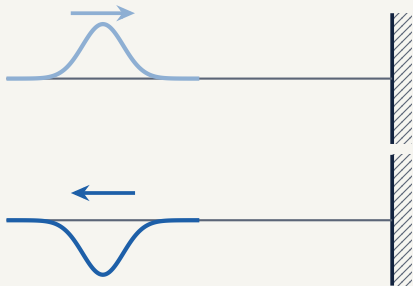
$$R + T = \frac{(Z_1 - Z_2)^2 + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1$$



IMPEDÂNCIA

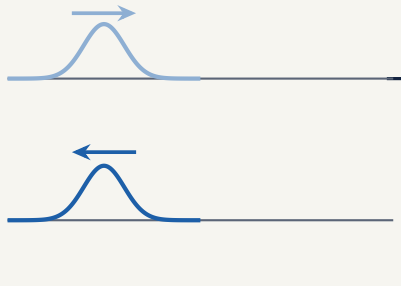
Extremidade fixa e extremidade livre

Fixa: $Z_2 \rightarrow \infty$, $r = -1$



Volta invertido.

Livre: $Z_2 \rightarrow 0$, $r = +1$

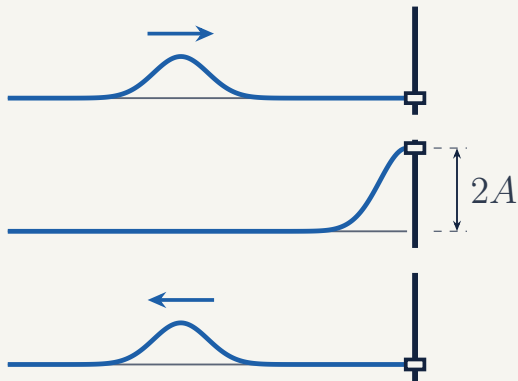


Volta direito.

IMPEDÂNCIA

Uma extremidade livre na prática

- Anel leve numa vara vertical, sem atrito.
- A vara segura a corda na horizontal, mas não faz força vertical.
- Logo, $\partial y / \partial x = 0$ na ponta.
- Na reflexão, o anel sobe até $2A$.



RESPOSTA

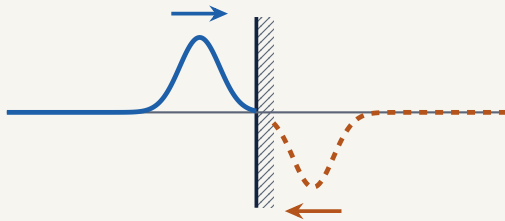
O impulso na extremidade

Extremidade presa

Na parede $y = 0$ sempre. Só um impulso invertido, que chega ao mesmo tempo, anula o incidente.

Extremidade livre

Na ponta $\partial y / \partial x = 0$. Só um impulso direito e simétrico o consegue.



Impulso real (azul) e impulso «imagem» invertido (laranja).

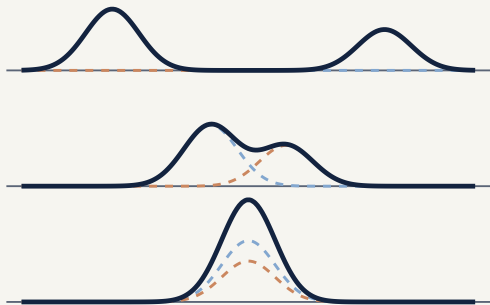
INTERFERÊNCIA

Princípio da sobreposição

A equação da onda é linear: a soma de soluções é solução.

$$y = y_1 + y_2 + \dots$$

- Cada onda propaga-se como se as outras não existissem.
- No cruzamento, os deslocamentos somam-se.



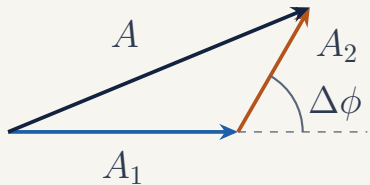
INTERFERÊNCIA

Somar duas ondas com a mesma frequência

Cada onda é a parte real de um número complexo:

$$A_j \cos(kx - \omega t + \phi_j) = \text{Re}[A_j e^{i\phi_j} e^{i(kx - \omega t)}]$$

O factor $e^{i(kx - \omega t)}$ é comum: somam-se os $A_j e^{i\phi_j}$.



$$A^2 = |A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\phi$$

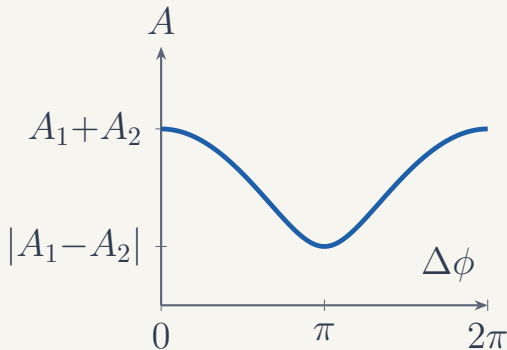
INTERFERÊNCIA

Interferência construtiva e destrutiva

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi$$

- $\Delta\phi = 2m\pi$: **construtiva**,
 $A = A_1 + A_2$.
- $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$: **destrutiva**,
 $A = |A_1 - A_2|$.

No gráfico, $A_1 = 1$ e $A_2 = 0,5$.



INTERFERÊNCIA

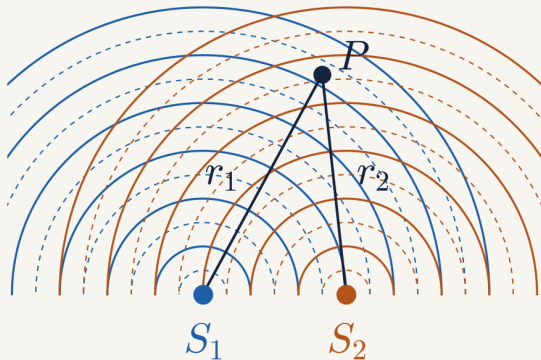
Interferência de duas fontes

- Duas fontes iguais, em fase, emitem ondas circulares.
- Até ao ponto P , as ondas percorrem distâncias r_1 e r_2 .

Diferença de fase:

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Cheio: cristas. Tracejado: cavas.



INTERFERÊNCIA

Reforço e anulação

Reforçam-se

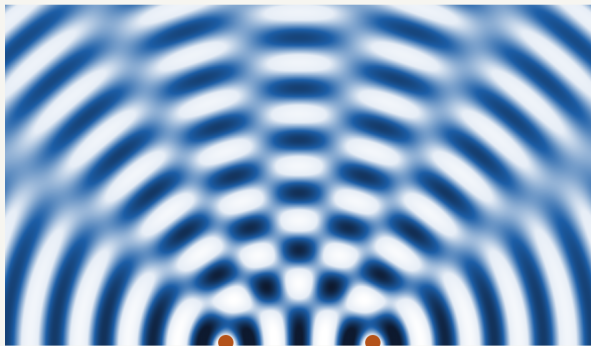
Crista com crista: $r_2 - r_1 = m\lambda$.

Anulam-se

Crista com cava:

$$r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda.$$

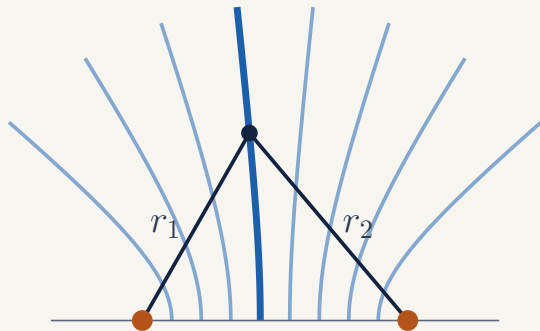
Na figura, as faixas lisas, sem riscas, são as linhas onde a água fica parada.



RESPOSTA

As linhas paradas na tina

- As duas torneiras pingam ao mesmo ritmo: são duas fontes em fase.
- Se $r_2 - r_1 = \lambda/2$: crista de uma com cava da outra, sempre. A água não se mexe.
- Os pontos com a mesma $r_2 - r_1$ formam uma **hipérbole**.



Linha mais forte: $r_2 - r_1 = \lambda/2$.

ONDAS ESTACIONÁRIAS

Ondas em sentidos opostos

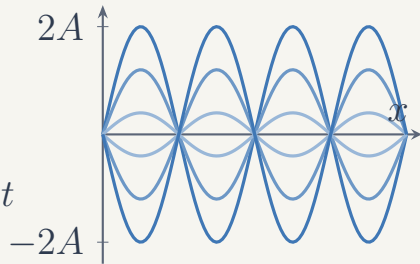
$$y_1 = A \sin(kx - \omega t),$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t).$$

Com $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$:

$$y = 2A \sin kx \cos(-\omega t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

- A forma no espaço não se desloca.
- Todos os pontos oscilam em fase ou em oposição.



Vários instantes, ao longo de 2λ .

ONDAS ESTACIONÁRIAS

Nós e antinós

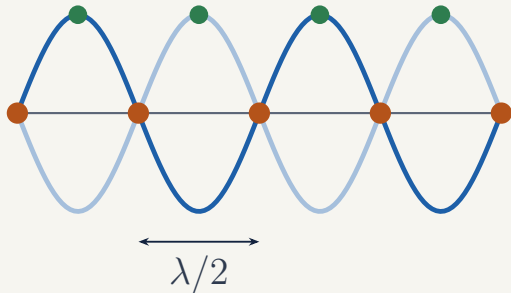
Nós: $\sin kx = 0$

$$x = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$$

Antinós: $|\sin kx| = 1$

$$x = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$$

- Nós consecutivos distam $\lambda/2$.
- Nos nós a corda não se mexe: a energia não os atravessa.



Nós (laranja) e antinós (verde).

ONDAS ESTACIONÁRIAS

Energia numa onda estacionária

Potência através de um ponto: $P = -F_T (\partial y / \partial x)(\partial y / \partial t)$. Com $y = 2A \sin kx \cos \omega t$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2Ak \cos kx \cos \omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -2A\omega \sin kx \sin \omega t$$

$$P = F_T A^2 k \omega \sin 2kx \sin 2\omega t, \quad \langle P \rangle = 0$$

A energia vai e vem entre nós vizinhos, mas não avança: as duas ondas transportam a mesma potência em sentidos opostos.

ONDAS ESTACIONÁRIAS

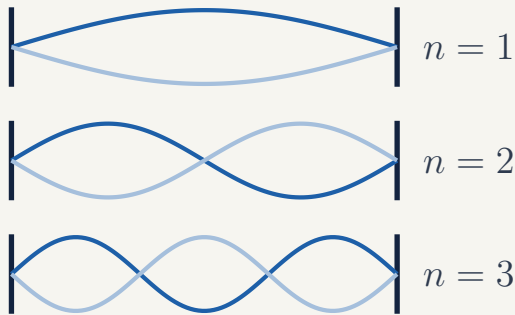
Modos próprios de uma corda fixa

$y = 2A \sin kx \cos \omega t$ já tem nó em $x = 0$. Nó em $x = L$:

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$

$f_n = nf_1$: todas as harmónicas.



ONDAS ESTACIONÁRIAS

Uma extremidade fixa e outra livre

Na ponta livre a inclinação é nula:

$$\partial y / \partial x \propto \cos kL = 0, \text{ logo}$$

$$kL = (n - \frac{1}{2})\pi.$$

$$f_n = \frac{(2n - 1) v}{4L}$$

- Só as harmónicas ímpares.
- A fundamental tem metade da frequência da corda fixa.



RESPOSTA

A corda de guitarra

- Ida e volta: a onda percorre $2L$ e sofre duas inversões, que se anulam.
- Volta em fase com a que parte se $2L$ for um número inteiro de λ :

$$2L = n\lambda_n \implies f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Mi grave: } L = 0,65 \text{ m, } f_1 = 82 \text{ Hz} \Rightarrow v = 2Lf_1 \approx 107 \text{ m s}^{-1}$$

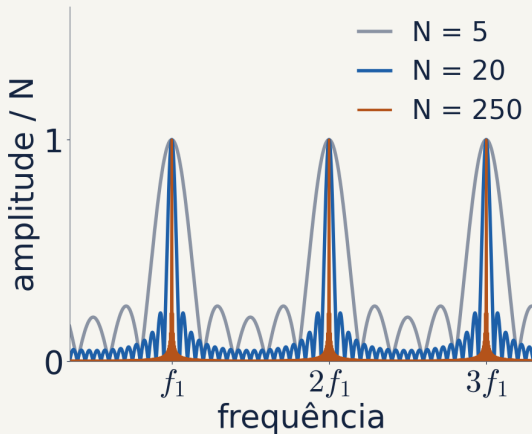
RESPOSTA

Quantas idas e voltas se somam

- Em f_n : N idas e voltas em fase, amplitude N .
- Ao lado: cada uma chega rodada e a soma cai.
- Largura do pico: $\Delta f \approx f_1/N$.

Guitarra: nota de 3 s, ida e volta de 12 ms.

$$N \approx 250, \quad \Delta f \approx 0,3 \text{ Hz}$$



ONDAS ESTACIONÁRIAS

O movimento geral de uma corda

Qualquer movimento de uma corda fixa é uma soma de modos:

$$y(x,t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

- As condições iniciais fixam a_n e φ_n .
- As amplitudes a_n definem o timbre do instrumento.



ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma corda com tensão $F_T = 100 \text{ N}$ tem $\mu_1 = 0,010 \text{ kg m}^{-1}$ para $x < 0$ e $\mu_2 = 0,040 \text{ kg m}^{-1}$ para $x > 0$. Uma onda de 50 Hz e amplitude $2,0 \text{ cm}$ chega pela esquerda.

- (a) Calcule v , λ e Z em cada troço.
- (b) Calcule as amplitudes reflectida e transmitida.
- (c) Que fracções da potência são reflectidas e transmitidas?
- (d) E se a mesma onda chegasse pela direita?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $v = \sqrt{F_T/\mu}, \quad \lambda = v/f, \quad Z = \sqrt{F_T \mu}$

$$v_1 = \sqrt{100/0,010} = 100 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = \sqrt{100/0,040} = 50 \text{ m s}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 100/50 = 2,0 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = 50/50 = 1,0 \text{ m}$$

$$Z_1 = \sqrt{100 \times 0,010} = 1,0 \text{ kg s}^{-1} \quad Z_2 = \sqrt{100 \times 0,040} = 2,0 \text{ kg s}^{-1}$$

A corda mais pesada tem maior impedância e menor velocidade.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(b)

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad A_r = -0,67 \text{ cm}$$

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2 \times 1}{1 + 2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad A_t = 1,33 \text{ cm}$$

A reflectida volta invertida.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(c)

$$R = r^2 = \frac{1}{9} \approx 0,11, \quad T = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

Verificação: $R + T = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Agora $Z_1 = 2,0 \text{ kg s}^{-1}$ e $Z_2 = 1,0 \text{ kg s}^{-1}$:

$$r' = \frac{2 - 1}{2 + 1} = +\frac{1}{3}, \quad t' = \frac{2 \times 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

$A_r = 0,67 \text{ cm}$ (direita), $A_t = 2,67 \text{ cm}$, maior do que a incidente.

$$R = \frac{1}{9}, \quad T = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

A amplitude cresce, mas a potência não.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Um cabo de uma ponte tem $L = 20$ m entre apoios fixos, $\mu = 8,0 \text{ kg m}^{-1}$ e $F_T = 5,0 \times 10^5$ N. Vórtices do vento empurram-no a 12,5 Hz.

- (a) Calcule as frequências dos três primeiros modos.
- (b) Que modo pode ser excitado pelo vento?
- (c) Onde colocar um amortecedor eficaz nesse modo?
- (d) Com o vento a 25 Hz, esse amortecedor ainda serve?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $v = \sqrt{F_T/\mu} = \sqrt{62\,500} = 250 \text{ m s}^{-1}, \quad f_n = \frac{nv}{2L} = n \times \frac{250}{40}:$

$$f_1 = 6,25 \text{ Hz}, \quad f_2 = 12,5 \text{ Hz}, \quad f_3 = 18,75 \text{ Hz}$$

(b) O modo 2, com a mesma frequência do vento.

(c) Modo 2: $\lambda_2 = L = 20 \text{ m}$; nós em 0, 10 e 20 m.

Antinós em $L/4$ e $3L/4$: um amortecedor a 5 m de um apoio.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) $25 = 4 \times 6,25$: é excitado o modo 4, com $\lambda_4 = L/2 = 10$ m.

nós em $x = 0, 5, 10, 15, 20$ m

O amortecedor a 5 m fica num nó deste modo e deixa de ter efeito.

antinós do modo 4: $x = 2,5$ m, $7,5$ m, ...

Um amortecedor a 2,5 m serve para os dois modos.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Num modelo simples, uma prega vocal é uma corda fixa nas duas pontas, com $L = 16 \text{ mm}$ e $\rho = 1040 \text{ kg m}^{-3}$. A voz tem fundamental 120 Hz.

- (a) Qual é a velocidade das ondas transversais na prega?
- (b) Qual é $\sigma = F_T/S$, sabendo que $v = \sqrt{\sigma/\rho}$?
- (c) Por que factor tem σ de aumentar para subir uma oitava?
- (d) Que σ para uma soprano a 1000 Hz, com o mesmo L ?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $f_1 = v/2L$: $v = 2Lf_1 = 2 \times 0,016 \times 120 = 3,84 \text{ m s}^{-1}$

(b) $v = \sqrt{\sigma/\rho} \Rightarrow \sigma = \rho v^2$:

$$\sigma = 1040 \times 3,84^2 = 1040 \times 14,7 \approx 15 \text{ kPa}$$

- (c) Uma oitava duplica f_1 , logo duplica v : σ aumenta 4 vezes.
Os músculos da laringe esticam as pregas para subir o tom.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) $f \propto v \propto \sqrt{\sigma}$, logo $\sigma \propto f^2$:

$$\sigma' = \sigma \left(\frac{1000}{120} \right)^2 = 15 \times 10^3 \times 8,33^2 \approx 15 \times 10^3 \times 69 \approx 1,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma' \approx 70 \sigma$$

É uma tensão muito elevada para um tecido mole. Na prática, as pregas também ficam mais curtas e mais finas a vibrar.