PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM DIFERENTES MEIOS

COMO O MEIO DETERMINA A VELOCIDADE E A FORMA DA ONDA






MÓDULO II – ACÚSTICA

O MEIO DETERMINA A PROPAGAÇÃO

As características de um meio físico determinam a velocidade, a forma e a atenuação das ondas.

- Cada meio possui propriedades que **resistem à deformação** e propriedades associadas à **inércia**.
- Estas propriedades definem a **rapidez** com que a perturbação se propaga.
- A geometria do meio e as suas condições físicas podem alterar a **direção**, a **amplitude** e a **forma** da onda.
- Quando a onda encontra uma mudança de meio, parte da energia é **refletida** e parte é **transmitida**.



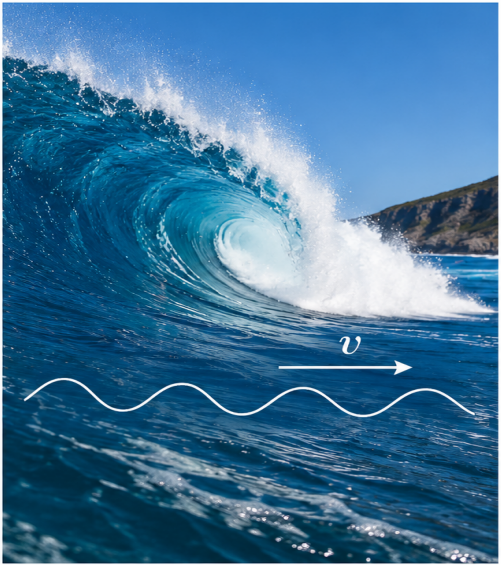
Velocidade de propagação e propriedades do meio

A velocidade com que uma onda se propaga resulta da competição entre duas propriedades fundamentais do meio:

$$v \sim \sqrt{\frac{\text{resposta elástica}}{\text{inércia}}}$$

- **Maior resposta elástica do meio**
  A perturbação é transmitida mais rapidamente aos elementos vizinhos.
  $\Longrightarrow \quad v$ aumenta

- **Maior inércia do meio**
  É mais difícil acelerar os elementos do meio.
  $\Longrightarrow \quad v$ diminui



Ondas numa corda: tensão e densidade linear

Para pequenas perturbações transversais, a velocidade de propagação de uma onda numa corda esticada é dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- v — velocidade de propagação da onda ($\mathrm{m\ s^{-1}}$)
- T — módulo da tensão na corda (N)
- μ — densidade linear de massa ($\mathrm{kg\ m^{-1}}$)



Dependência da velocidade

- **Maior tensão na corda** (maior resposta elástica) $\Rightarrow$ $T \uparrow \Rightarrow v \uparrow$
- **Maior densidade linear** (maior inércia) $\Rightarrow$ $\mu \uparrow \Rightarrow v \downarrow$

Derivação da velocidade numa corda — forças

- **Elemento de corda**
  Considere um elemento da corda entre x e $x + \Delta x$, com deslocamento transversal $y(x, t)$.

- **Tensões nas extremidades**
  As tensões têm o mesmo módulo T (tensão uniforme) e fazem ângulos θ e $\theta + \Delta\theta$ com o eixo x.

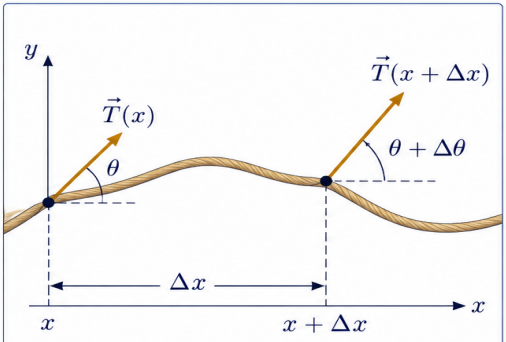
- **Componentes transversais**

$$T_y(x) \approx T \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x \quad \text{e} \quad T_y(x + \Delta x) \approx T \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

  Para pequenas inclinações: $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

- **Força transversal resultante**
  A força resultante no sentido y sobre o elemento é

$$F_y = T_y(x + \Delta x) - T_y(x) \approx T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$



Para pequenas inclinações:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

Derivação da velocidade numa corda — equação de onda

Massa do elemento de corda

A massa do elemento entre x e $x + \Delta x$ é

$$\Delta m = \mu \, \Delta x$$

onde μ é a densidade linear de massa da corda.

Segunda lei de Newton

A aceleração transversal do elemento é

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, .$$

Logo, a força resultante no sentido y é

$$F_y = \Delta m a_y = \mu \, \Delta x \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, .$$

Equação de onda

Da expressão da força resultante obtida no slide anterior,

$$T \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \, \Delta x = \mu \, \Delta x \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, .$$

Cancelando Δx, obtemos a equação de onda para a corda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \, .$$

Velocidade de propagação

Comparando com a forma padrão da equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \, ,$$

a velocidade de propagação da onda na corda é

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Significado das grandezas

- v — velocidade de propagação da onda ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- T — tensão na corda (N)
- μ — densidade linear de massa ($\mathrm{kg\,m^{-1}}$)

Ondas longitudinais num sólido

Deslocamento longitudinal

As partículas do sólido oscilam paralelamente à direção de propagação.

Denotamos por $u(x,t)$ o deslocamento longitudinal.

Deformação longitudinal

A deformação é dada por

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$\varepsilon > 0$ alongamento $\varepsilon < 0$ compressão

Lei de Hooke e velocidade de propagação

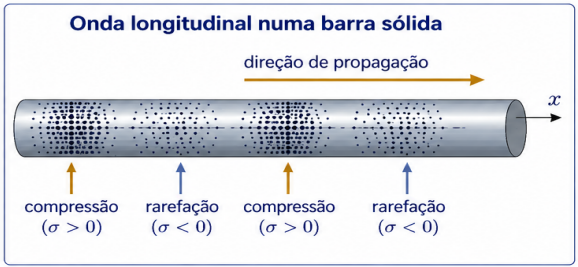
No regime elástico linear, a tensão normal longitudinal é

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

A equação de onda no sólido leva a uma velocidade de propagação

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

barra delgada, regime elástico linear



Significado físico

- O módulo de Young E mede a resistência do material à deformação longitudinal.
- A velocidade depende das propriedades do meio:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Meios mais rígidos (maior E) → maior velocidade.
- Meios mais densos (maior ρ) → menor velocidade.

Velocidade das ondas longitudinais numa barra

Relação tensão–deformação (lei de Hooke)

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

σ — tensão normal longitudinal
E — módulo de Young
$u(x,t)$ — deslocamento longitudinal

Equação de movimento

Para um elemento da barra, a segunda lei de Newton dá

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} .$$

Equação de onda longitudinal

Usando $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$, obtemos

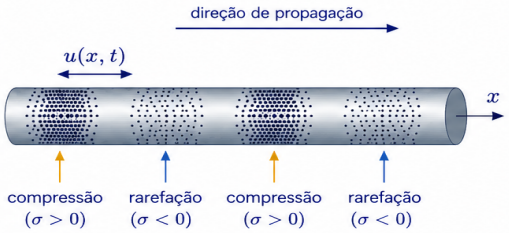
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Velocidade de propagação

Comparando com a forma padrão da equação de onda,

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Onda longitudinal numa barra sólida



$u(x,t)$ — deslocamento longitudinal das partículas (m)
$\sigma(x,t)$ — tensão normal longitudinal (Pa)
E — módulo de Young (Pa)
ρ — densidade de massa ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)

Válido para uma barra delgada, homogénea, no regime elástico linear.

Ondas de compressão num fluido

Perturbações de pressão e de densidade

Num fluido (gás ou líquido) em equilíbrio,

$$p(x,t) = p_0 + p'(x,t)$$
$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t)$$

com $|p'| \ll p_0$ e $|\rho'| \ll \rho_0$.

Relação entre pressão e densidade

Para pequenas perturbações, a variação de pressão é proporcional à variação de densidade:

$$p' = v^2 \rho'$$

onde v é a velocidade da onda longitudinal no fluido.

Velocidade da onda

Usando o módulo volumétrico K do fluido,

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

com ρ_0 a densidade de equilíbrio.

Onda de compressão num fluido (ex.: ar)



Significado físico

- A onda corresponde a variações de pressão e de densidade que se propagam no fluido.
- As partículas do fluido oscilam para a frente e para trás em torno da sua posição de equilíbrio.
- A perturbação transporta energia, mas não há transporte líquido de matéria.

Módulo volumétrico

O módulo volumétrico K mede a resistência do fluido à compressão:

$$K = -V \frac{dp}{dV}$$

Velocidade das ondas longitudinais num fluido

1 Equações básicas (regime linear)

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_p}{\partial x} = 0$$

$u_p(x,t)$ – velocidade das partículas do fluido
ρ_0 – densidade de equilíbrio

Equação de movimento (Euler, sem viscosidade)

$$\rho_0 \frac{\partial u_p}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$p'(x,t)$ – variação de pressão
ρ_0 – densidade de equilíbrio

2 Relação pressão–densidade

Para pequenas perturbações (processo adiabático rápido ou isentrópico),

$$p' = \frac{K}{\rho_0}\,\rho'$$

K – módulo volumétrico do fluido
ρ' – variação de densidade

3 Equação de onda

Eliminando u_p entre as equações de continuidade e de movimento,

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\,\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

Logo, a velocidade de propagação é

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

v – velocidade da onda longitudinal no fluido

Onda de compressão num fluido (ex.: ar)



As partículas do fluido oscilam para a frente e para trás em torno da posição de equilíbrio, produzindo variações de pressão e de densidade.

Grandezas e notação

$u_p(x,t)$	velocidade das partículas do fluido (m s^{-1})
$p'(x,t)$	variação de pressão (Pa)
$\rho'(x,t)$	variação de densidade (kg m^{-3})
ρ_0	densidade de equilíbrio (kg m^{-3})
K	módulo volumétrico (Pa)
v	velocidade de propagação da onda longitudinal (m s^{-1})

Válido para:
fluido homogéneo, sem viscosidade, regime linear (pequenas perturbações).

Temperatura e velocidade do som no ar

Expressão para um gás ideal

Para um gás ideal (ar seco), a velocidade do som é

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

- γ – razão de calores específicos ($\approx 1{,}4$ para o ar)
- R – constante universal dos gases ($8{,}314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$)
- M – massa molar do ar seco ($28{,}97 \times 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}$)
- T – temperatura absoluta (K)

Dependência com a temperatura

Para composição fixa (ar seco),

$$v \propto \sqrt{T}$$

Logo, a velocidade do som aumenta com a temperatura.

Expressão prática

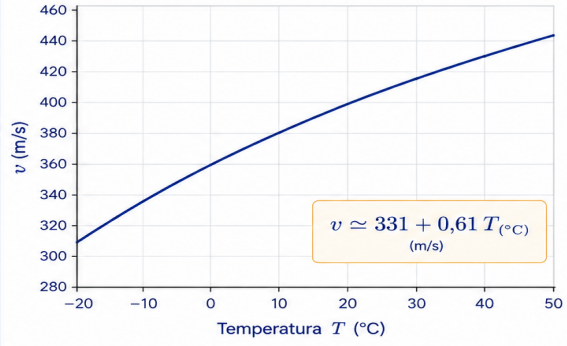
Para o ar seco a 1 atm, uma boa aproximação na gama usual de temperaturas é

$$v \simeq 331 + 0{,}61\, T_{(^\circ\text{C})} \quad \text{(m/s)}$$

com $T_{(^\circ\text{C})}$ a temperatura em graus Celsius.

Dependência com a pressão

Para um gás ideal de composição fixa, a velocidade do som é independente da pressão. Assim, em condições atmosféricas usuais, v depende essencialmente da temperatura.

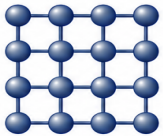


No ar, a velocidade do som aumenta com a temperatura aproximadamente como a raiz quadrada da temperatura ($v \propto \sqrt{T}$).

Comparação entre sólidos, líquidos e gases

A velocidade das ondas sonoras depende do balanço entre a rigidez (resposta elástica) do meio e a sua densidade (inércia).

Sólido (ex.: aço)



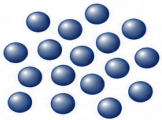
Partículas muito próximas e fortemente ligadas.

Grande resistência à deformação (módulo de Young E elevado).

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Aço: $v \approx 5960$ m/s

Líquido (ex.: água)



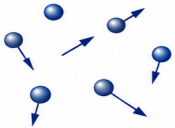
Partículas próximas, mas com mobilidade (sem posicionamento fixo).

Compressibilidade intermédia (módulo volumétrico K moderado).

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Água: $v \approx 1480$ m/s

Gás (ex.: ar)



Partículas muito afastadas e em movimento livre.

Facilmente compressível (módulo volumétrico K pequeno).

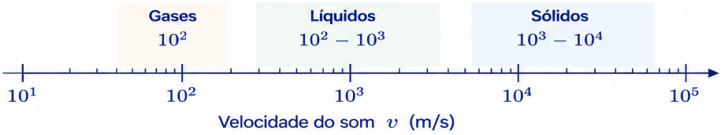
$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Ar (20 °C): $v \approx 343$ m/s

Ideia principal

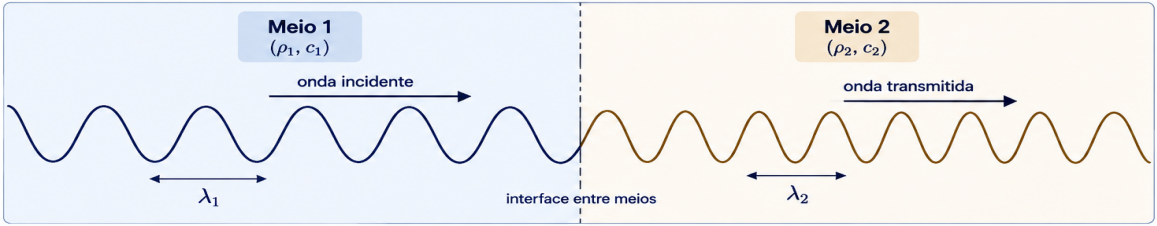
- A velocidade do som é maior em meios mais rígidos (maior E ou K) e menor em meios mais densos (maior ρ).
- A diferença entre sólidos, líquidos e gases resulta do balanço entre a rigidez do meio e a sua densidade, e não apenas da distância entre as partículas.

Ordens de grandeza da velocidade do som (valores típicos)



Mudança de meio: velocidade e comprimento de onda

Quando uma onda sonora passa de um meio para outro, a **frequência mantém-se**, mas a velocidade e o comprimento de onda mudam.



O que se mantém?

- A frequência é a mesma nos dois meios (determinada pela fonte):

$$f_1 = f_2 = f$$

O que muda?

- A velocidade de propagação depende das propriedades do meio:

$$c_1 \neq c_2$$

- Como $\lambda = c/f$, o comprimento de onda também muda:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Consequência física

- Ao passar para um meio mais rápido ($c_2 > c_1$), o comprimento de onda aumenta ($\lambda_2 > \lambda_1$).
- Ao passar para um meio mais lento ($c_2 < c_1$), o comprimento de onda diminui ($\lambda_2 < \lambda_1$).

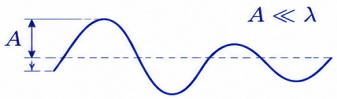
A **frequência** mantém-se, mas a **velocidade** e o **comprimento de onda** ajustam-se às propriedades do novo meio: $\lambda = c/f$.

Limitações dos modelos para a velocidade de propagação

As expressões simples para a velocidade são aproximações que só são válidas em certas condições.

Pequenas perturbações

- As fórmulas são deduzidas no regime linear.
- Válidas apenas para amplitudes suficientemente pequenas.



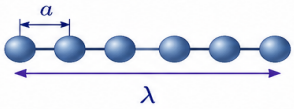
Perturbação pequena em relação ao comprimento de onda.

Comprimento de onda grande

- O meio é tratado como contínuo (homogéneo) à escala da onda.
- É necessário que

$$\lambda \gg a$$

onde a é a distância interatómica ou molecular.



Meio aproximadamente homogéneo

- As propriedades do meio (E, B, ρ, …) são assumidas constantes na região de propagação.
- Se houver variações significativas das propriedades à escala de λ, as expressões simples já não são válidas.



E, B, ρ, … constantes

Expressões típicas

As fórmulas

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_L \simeq \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

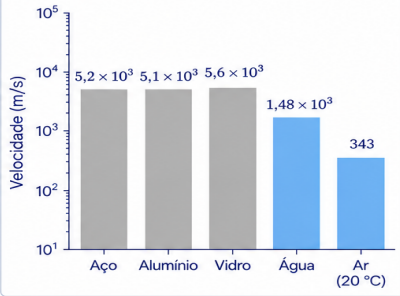
resultam de modelos idealizados e têm um domínio de validade limitado.

Comparação entre sólidos, líquidos e gases

A velocidade de propagação depende das propriedades do meio.
Sólidos, líquidos e gases apresentam valores muito diferentes.

Meio	Propriedade relevante	Velocidade típica	Exemplos	Ordem de grandeza
Sólidos 	Módulo de Young (onda longitudinal numa barra) E	$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Aço Alumínio Vidro	$10^3 - 10^4$ m/s
Líquidos	Módulo de compressão B	$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$	Água Água do mar Óleos	10^3 m/s
Gases 	Compressibilidade (gás ideal)	$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$	Ar (20 °C) Hélio Dióxido de carbono	10^2 m/s

Velocidade do som em diferentes meios



- Os sólidos são muito mais rígidos (maior E) $\Rightarrow$ velocidades mais elevadas.
- Os líquidos são menos rígidos, mas muito menos compressíveis que os gases $\Rightarrow$ velocidades intermédias.
- Os gases são facilmente compressíveis $\Rightarrow$ velocidades mais baixas.
- A densidade também influencia, mas a rigidez (E ou B) é geralmente o factor mais importante.

A velocidade de propagação resulta da competição entre a **elasticidade** do meio ($E, B, \ldots$) e a sua **inércia** (ρ).

Exercício resolvido I

Velocidade de uma onda numa corda

Enunciado

Uma corda esticada tem tensão $T = 80\,\mathrm{N}$ e densidade linear $\mu = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/m}$.

Determinar a velocidade de propagação de uma onda transversal na corda.



Corda esticada com tensão T

Resolução

A velocidade de uma onda transversal numa corda é

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Substituindo os valores dados:

$$v = \sqrt{\frac{80}{5{,}0 \times 10^{-3}}} = \sqrt{1{,}6 \times 10^{4}}$$

$$v = 1{,}26 \times 10^{2}\ \mathrm{m/s}$$

$$\boxed{v \approx 1{,}3 \times 10^{2}\ \mathrm{m/s}}$$

Exercício resolvido II

Eco num edifício: determinação da velocidade do som

Enunciado

Um pulso sonoro curto é emitido no solo em direção a um edifício. O eco é detetado no mesmo ponto 0,85 s após a emissão.

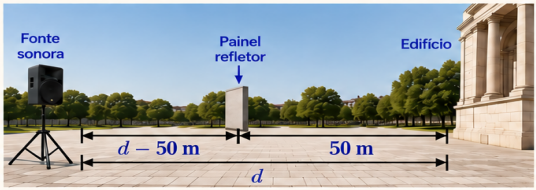
Um segundo pulso é emitido com o mesmo procedimento, mas agora colocando um painel refletor a 50 m do edifício. O eco é detetado 0,56 s após a emissão.

a) Determine a distância ao edifício.

b) Calcule a velocidade do som no ar.

c) A temperatura do ar era de 15 °C. Compare o valor obtido com o valor esperado para essa temperatura, usando

$$v(T) \approx 331 + 0{,}60\,T \quad (\mathrm{m/s}).$$



Resolução

a) Distância ao edifício

Para o primeiro eco (sem painel), o som percorre a distância de ida e volta $2d$:

$$2d = v(0{,}85) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0{,}85}{2}\,v = 0{,}425\,v. \qquad (1)$$

Para o segundo eco (com painel a 50 m do edifício), o som percorre a distância de ida e volta $2(d-50)$:

$$2(d-50) = v(0{,}56) \quad \Rightarrow \quad d = 50 + \frac{0{,}56}{2}\,v = 50 + 0{,}280\,v. \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$0{,}425\,v = 50 + 0{,}280\,v \quad \Rightarrow \quad 0{,}145\,v = 50$$
$$v = 344{,}827586\ldots\ \mathrm{m/s}.$$

Substituindo em (1):

$$d = 0{,}425 \times 344{,}827586 = 146{,}551724\ \mathrm{m}.$$

$$\boxed{d = \mathbf{146{,}55\ m}}$$

b) Velocidade do som no ar

Do resultado acima,

$$v = \frac{2d}{0{,}85} = \frac{2 \times 146{,}551724}{0{,}85} = 344{,}827586\ \mathrm{m/s}.$$

$$\boxed{v = \mathbf{344{,}83\ m/s}}$$

c) Comparação com o valor esperado

Para $T = 15$ °C:

$$v(15) = 331 + 0{,}60 \times 15 = 340\ \mathrm{m/s}.$$

O valor obtido (344,83 m/s) está em bom acordo com o valor esperado (340 m/s), com uma diferença de cerca de 1,4%.

Exercício resolvido III

Propagação de ultrassons em tecido mole (aplicação biomédica)

Enunciado

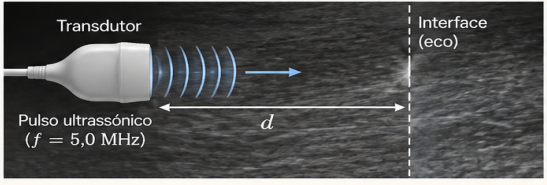
Num exame de ecografia, um pulso ultrassónico com frequência $f = 5{,}0\ \text{MHz}$ propaga-se num tecido mole com velocidade $v = 1540\ \text{m/s}$.

a) Determine o comprimento de onda no tecido.

b) Qual é a distância entre o transdutor e uma interface que produz um eco detectado $26\ \mu\text{s}$ após a emissão?

c) Estime a resolução axial do sistema, assumindo que o pulso emitido tem uma duração temporal de $\tau = 0{,}50\ \mu\text{s}$.

d) Se o mesmo pulso se propagasse no osso ($v \approx 4080\ \text{m/s}$), qual seria o comprimento de onda? Como se compara com o tecido mole?



Resolução

a) Comprimento de onda no tecido mole

$$\lambda = \frac{v}{f} \qquad \lambda = \frac{1540}{5{,}0 \times 10^{6}} = 3{,}08 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\boxed{\lambda \approx \mathbf{0{,}31\ mm}}$$

b) Distância à interface

O tempo medido corresponde à ida e volta do pulso.

$$d = \frac{v\Delta t}{2} \qquad d = \frac{1540 \times 26 \times 10^{-6}}{2} = 2{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\boxed{d \approx \mathbf{2{,}0\ cm}}$$

c) Resolução axial

A resolução axial é da ordem de metade do comprimento espacial do pulso:

$$\Delta z \approx \frac{v\tau}{2} \qquad \Delta z = \frac{1540 \times 0{,}50 \times 10^{-6}}{2} = 3{,}85 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\boxed{\Delta z \approx \mathbf{0{,}39\ mm}}$$

d) Propagação no osso

$$\lambda_{osso} = \frac{v_{osso}}{f} \qquad \lambda_{osso} = \frac{4080}{5{,}0 \times 10^{6}} = 8{,}16 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\boxed{\lambda_{osso} \approx \mathbf{0{,}82\ mm}}$$

O comprimento de onda no osso é cerca de 2,6 vezes maior do que no tecido mole.

Exercício resolvido IV

Tempo de propagação de ultrassons numa camada de tecido

Enunciado

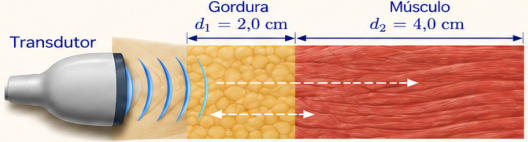
Num exame de ecografia, um pulso ultrassónico de frequência $f = 5{,}0\ \text{MHz}$ propaga-se através de uma camada de gordura com espessura $d_1 = 2{,}0\ \text{cm}$ e, em seguida, através de uma camada de músculo com espessura $d_2 = 4{,}0\ \text{cm}$. O eco é detectado no transdutor $80\ \mu\text{s}$ após a emissão.

a) Determine as velocidades de propagação do ultrassom na gordura e no músculo.

b) Verifique se o tempo medido é compatível com as espessuras dadas.

c) Calcule o comprimento de onda em cada tecido.

d) O mesmo exame é realizado num paciente diferente, em que a camada de gordura tem $3{,}0\ \text{cm}$, mantendo a camada de músculo igual. Qual seria o novo tempo de eco?



Esquema da propagação e reflexão do pulso ultrassónico

Resolução

a) Velocidades de propagação

Valores típicos em tecidos moles:

- Gordura: $v_1 \simeq 1450\ \text{m/s}$
- Músculo: $v_2 \simeq 1580\ \text{m/s}$

b) Tempo de propagação

O tempo medido corresponde à ida e volta do pulso:

$$\Delta t = 2\left(\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}\right)$$

$$\Delta t = 2\left(\frac{0{,}020}{1450} + \frac{0{,}040}{1580}\right) = 7{,}82 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

$\Delta t \approx \mathbf{78}\ \mu\text{s}$ em excelente acordo com o valor medido.

c) Comprimento de onda

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Gordura: $\lambda_1 = \dfrac{1450}{5{,}0 \times 10^6} = 2{,}9 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}29\ \text{mm}$

Músculo: $\lambda_2 = \dfrac{1580}{5{,}0 \times 10^6} = 3{,}2 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}32\ \text{mm}$

d) Nova espessura de gordura

Para $d_1 = 3{,}0\ \text{cm}$ e $d_2 = 4{,}0\ \text{cm}$:

$$\Delta t' = 2\left(\frac{0{,}030}{1450} + \frac{0{,}040}{1580}\right) = 9{,}20 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

$\Delta t' \approx \mathbf{92}\ \mu\text{s}$