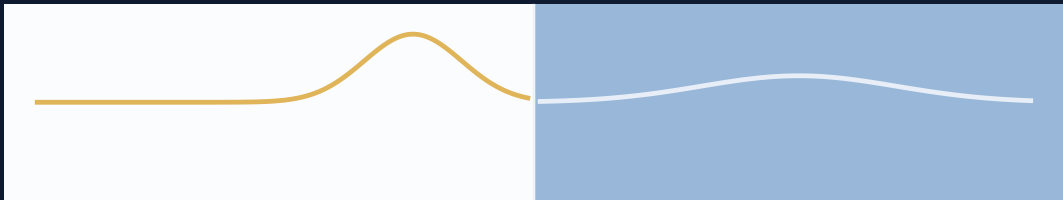


Reflexão e transmissão acústica

Impedância, fronteiras e adaptação



Três perguntas

- Porque é que, debaixo de água, quase não se ouve quem fala fora dela?
- Porque é que se põe gel na pele antes de uma ecografia?
- Para que servem os três ossículos do ouvido médio, se o tímpano já vibra com o som?

CONCEITOS

O que vamos usar

- Deslocamento $s(x,t)$ e velocidade das partículas $u = \partial s / \partial t$.
- Pressão acústica e velocidade do som:

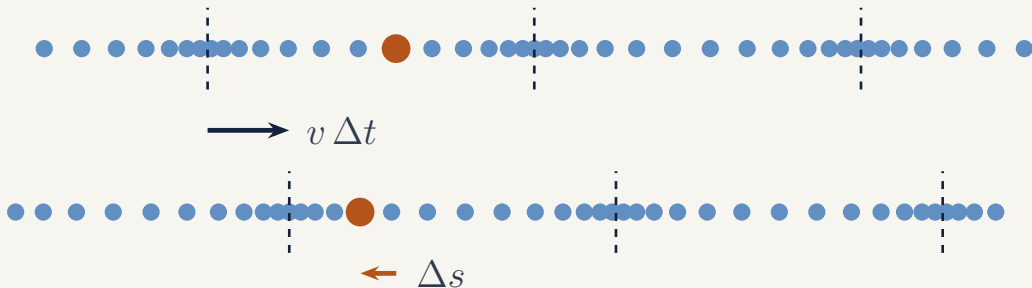
$$p' = -K \frac{\partial s}{\partial x}, \quad v = \sqrt{K/\rho_0}$$

- Numa corda, uma mudança de impedância dá uma onda reflectida e uma transmitida.

CONCEITOS

Duas velocidades diferentes

Partículas de ar num instante (em cima) e um quarto de período depois (em baixo). A compressão (tracejado) avança; a partícula laranja só oscila no seu lugar.

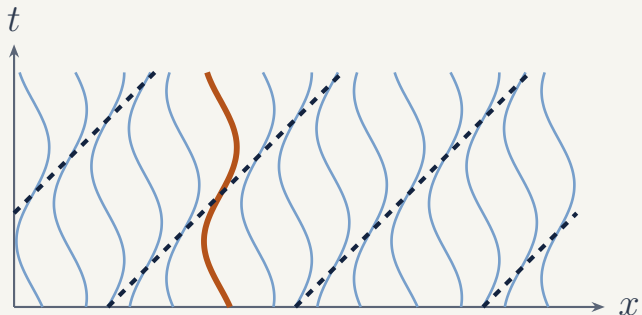


CONCEITOS

u oscila, v avança

Posição em função do tempo. Cada linha ondulada é uma partícula: vai e vem com velocidade u . A laranja é a partícula destacada no diapositivo anterior.

As rectas tracejadas são as compressões: avançam sempre com a mesma velocidade, v .



CONCEITOS

Ordens de grandeza

- v é a velocidade da **onda**: depende só do meio. No ar, 343 m s^{-1} .
- $u = \partial s / \partial t$ é a velocidade das **partículas**: depende da amplitude e muda de sinal.
- Numa conversa, o ar oscila com amplitude $s_m \approx 10 \text{ nm}$, mil vezes por segundo: $u \approx \omega s_m = 0,06 \text{ mm s}^{-1}$, cinco milhões de vezes menos do que v .

A impedância vai ligar u à pressão, e não a v .

IMPEDÂNCIA

Pressão e velocidade andam juntas

Numa onda que avança no sentido $+x$, $s = f(x - vt)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -v f', \quad \frac{\partial s}{\partial x} = f' \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v} u$$

Substituindo em $p' = -K \partial s / \partial x$ e usando $K = \rho_0 v^2$:

$$p' = \frac{K}{v} u = \rho_0 v u$$

Onde o ar está comprimido, move-se no sentido da onda.

IMPEDÂNCIA

Impedância acústica

A razão entre pressão e velocidade só depende do meio:

$$Z = \frac{p'}{u} = \rho_0 v \quad \text{unidade: Pa s m}^{-1} = \text{Rayl}$$

- Z grande: é precisa muita pressão para pôr o meio em movimento.
- É o análogo de $Z = \mu v$ na corda: densidade vezes velocidade.

IMPEDÂNCIA

Uma onda no sentido contrário

Se a onda avança no sentido $-x$, $s = g(x + vt)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = vg', \quad \frac{\partial s}{\partial x} = g' \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = +\frac{1}{v} u$$

$$p' = -Z u$$

Continua verdade que o ar comprimido se move no sentido da onda: agora para a esquerda, $u < 0$. Vamos precisar disto para a onda reflectida.

IMPEDÂNCIA

Calcular Z

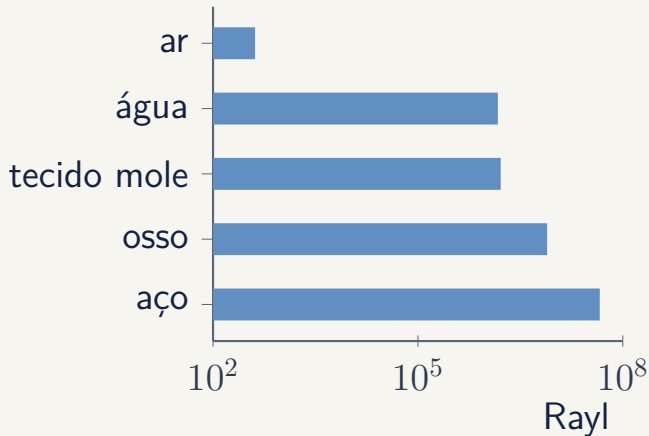
Meio	ρ_0 (kg m ⁻³)	v (m s ⁻¹)	$Z = \rho_0 v$ (Rayl)
ar	1,2	343	413
água	1000	1480	$1,48 \times 10^6$
tecido mole	1060	1540	$1,63 \times 10^6$
osso	1900	4100	$7,8 \times 10^6$
aço	7850	5900	$4,6 \times 10^7$

IMPEDÂNCIA

Ar e água: um factor de 3600

- A água é 830 vezes mais densa do que o ar.
- O som é nela 4,3 vezes mais rápido.
- $830 \times 4,3 \approx 3600$.

Líquidos e sólidos têm todos Z de 10^6 a 10^8 ; o ar fica muito abaixo.



IMPEDÂNCIA

A intensidade de uma onda sonora

Força por área vezes velocidade dá potência por área:

$$I = \langle p' u \rangle = \frac{\langle p'^2 \rangle}{Z} = Z \langle u^2 \rangle$$

Numa onda harmónica, $p' = p_m \cos(kx - \omega t)$ e $u = u_m \cos(kx - \omega t)$, com amplitudes p_m e u_m . Como $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$:

$$I = \frac{p_m^2}{2Z} = \frac{Z u_m^2}{2}$$

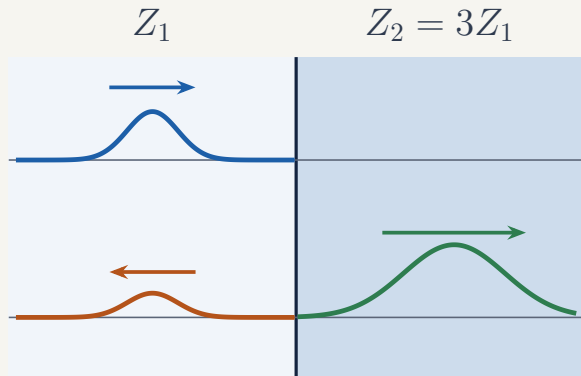
Com a mesma pressão, Z grande transporta menos energia.

FRONTEIRA ENTRE FLUIDOS

O que acontece numa fronteira

Duas condições na fronteira:

- **mesma pressão:** uma película fina não tem massa, as forças nas duas faces têm de ser iguais;
- **mesma velocidade:** os meios não se separam nem se interpenetram.



Antes e depois da fronteira.

FRONTEIRA ENTRE FLUIDOS

Três ondas na fronteira

Uma onda só não satisfaz as duas condições: aparece uma reflectida.

Onda	pressão	velocidade
incidente, para $+x$	p_i	$u_i = p_i/Z_1$
reflectida, para $-x$	p_r	$u_r = -p_r/Z_1$
transmitida, para $+x$	p_t	$u_t = p_t/Z_2$

O sinal menos vem de $p' = -Zu$ na onda que volta.

FRONTEIRA ENTRE FLUIDOS

Resolver as duas condições

$$p_i + p_r = p_t, \quad \frac{p_i - p_r}{Z_1} = \frac{p_t}{Z_2}$$

Substituindo p_t na segunda: $Z_2(p_i - p_r) = Z_1(p_i + p_r)$.

$$r_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$t_p = 1 + r_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

r_p e t_p são razões de amplitudes de pressão, não de energia: t_p pode passar de 1.

FRONTEIRA ENTRE FLUIDOS

Fracções de energia

Dividindo as intensidades, com $I = p_m^2/2Z$ em cada meio:

$$R = \frac{p_r^2/2Z_1}{p_i^2/2Z_1} = r_p^2, \quad T = \frac{p_t^2/2Z_2}{p_i^2/2Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} t_p^2$$

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2, \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$R + T = 1$: a energia conserva-se. T não muda se trocarmos Z_1 com Z_2 .

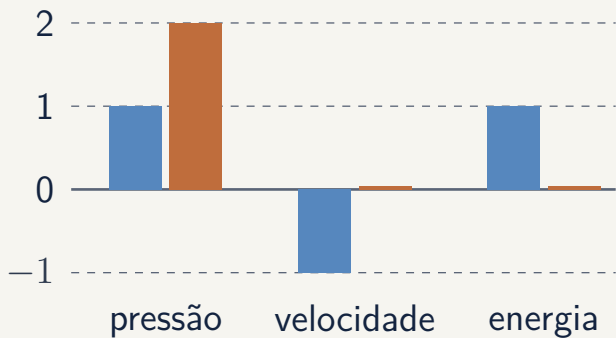
FRONTEIRA ENTRE FLUIDOS

Reflexão ou transmissão?

Para a velocidade, $u = \pm p/Z$:

$$\frac{u_r}{u_i} = -r_p, \quad \frac{u_t}{u_i} = \frac{Z_1}{Z_2} t_p$$

Com $Z_2 \gg Z_1$, a velocidade e a energia dão a imagem habitual: tudo reflectido, nada transmitido. Só a pressão duplica.



$Z_2 \gg Z_1$: reflectida (azul) e transmitida (laranja).

CASOS LIMITE

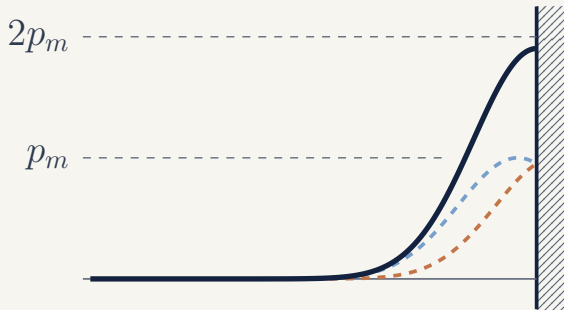
Parede rígida: a pressão duplica

Ar contra betão: $Z_2 \gg Z_1$,
 $r_p \approx +1$.

A parede não se move:
 $u_i + u_r = 0$, logo

$$\frac{p_i - p_r}{Z_1} = 0 \Rightarrow p_r = p_i$$

Junto à parede, as duas pressões somam-se.



Tracejado: incidente e reflectida;
cheio: soma.

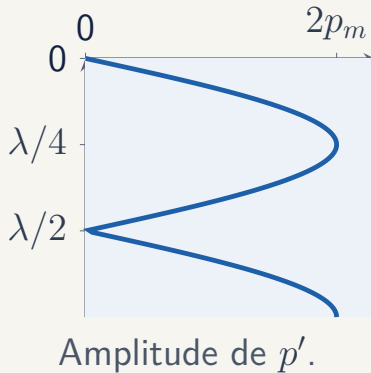
CASOS LIMITE

Superfície da água: a pressão anula-se

Da água para o ar, $Z_2 \ll Z_1$:

$$r_p = \frac{413 - 1,48 \times 10^6}{413 + 1,48 \times 10^6} = -0,9994$$

O ar quase não resiste: a superfície move-se livremente e $p_i + p_r \approx 0$. A onda volta invertida.



PERGUNTA: DEBAIXO DE ÁGUA

Do ar para a água

Porque é que, debaixo de água, quase não se ouve quem fala fora dela?

$Z_1 = 413 \text{ Rayl}$, $Z_2 = 1,48 \times 10^6 \text{ Rayl}$:

$$t_p = \frac{2 \times 1,48 \times 10^6}{413 + 1,48 \times 10^6} = 1,9994$$

$$T = \frac{4 \times 413 \times 1,48 \times 10^6}{(1,4804 \times 10^6)^2} = 1,1 \times 10^{-3}$$

Como $Z_1 \ll Z_2$, basta $T \approx 4Z_1/Z_2$: passa cerca de uma parte em 900.

PERGUNTA: DEBAIXO DE ÁGUA

Pressão dupla, energia quase nula

A pressão na água é o dobro da incidente, mas a água mal se mexe:

$$\frac{u_t}{u_i} = \frac{p_t/Z_2}{p_i/Z_1} = t_p \frac{Z_1}{Z_2} = 2 \times \frac{413}{1,48 \times 10^6} = 5,6 \times 10^{-4}$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{p_t u_t}{p_i u_i} = 2 \times 5,6 \times 10^{-4} = 1,1 \times 10^{-3}$$

É o mesmo T : a energia é o produto de pressão e velocidade.

RESPOSTA

Debaixo de água

Quem fala fora de água:

- só passa para a água 0,1 % da energia;
- os outros 99,9 % são reflectidos pela superfície.

A voz chega ao mergulhador cerca de mil vezes mais fraca.

Como T é igual nos dois sentidos, o som de um motor de barco também fica quase todo dentro de água.

PERGUNTA: O GEL DA ECOGRAFIA

Impedâncias iguais: passa tudo

Porque é que se põe gel na pele antes de uma ecografia?

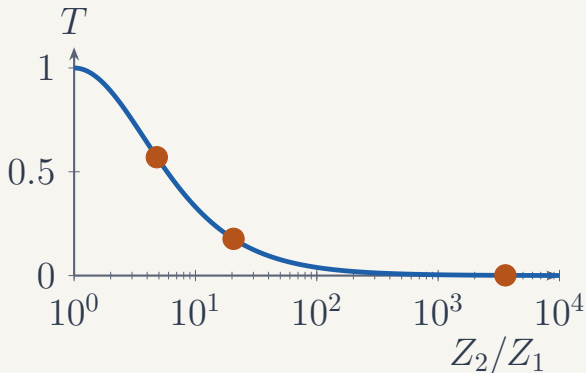
T só depende da razão

$x = Z_2/Z_1$:

$$T = \frac{4x}{(1+x)^2}$$

$T = 1$ só para $x = 1$.

Pontos: tecido-osso,
sonda-tecido, ar-água.



PERGUNTA: O GEL DA ECOGRAFIA

Adaptar impedâncias

Na ecografia, o som tem de passar da sonda para o corpo. No ouvido, do ar para o ouvido interno.

Adaptar impedâncias: pôr entre os dois meios algo que faça o segundo «parecer», visto do primeiro, ter a mesma impedância.

Três maneiras:

- tirar o meio que estraga: o gel da ecografia;
- uma camada intermédia: a sonda de ultrassons;
- um transformador mecânico: o ouvido médio.

PERGUNTA: O GEL DA ECOGRAFIA

Uma camada de ar fina

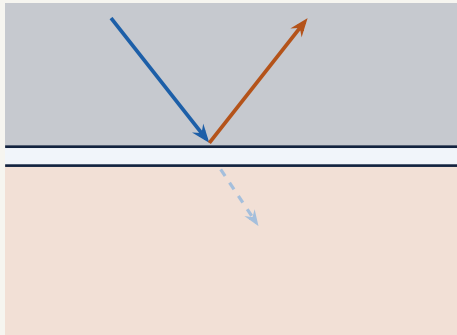
Sem gel, o som vai sonda $\rightarrow$ ar $\rightarrow$ pele: duas fronteiras com o ar. Em cada uma, $T \approx 4Z_{\text{ar}}/Z$:

$$T \approx \frac{4 \times 413}{1,6 \times 10^6} = 10^{-3}$$

Duas fronteiras: $10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6}$.

O eco volta pelo mesmo caminho:

$$10^{-6} \times 10^{-6} = 10^{-12}.$$



Cinzeno: sonda; laranja: pele. A camada de ar está aumentada.

RESPOSTA

O gel da ecografia

O gel é quase só água: expulsa o ar e tem Z próximo do dos tecidos.

$$R = \left(\frac{1,63 - 1,50}{1,63 + 1,50} \right)^2 = \left(\frac{0,13}{3,13} \right)^2 = 1,7 \times 10^{-3}$$

$$T = 1 - R = 0,998$$

Em vez de passar uma parte num milhão, passa quase tudo.

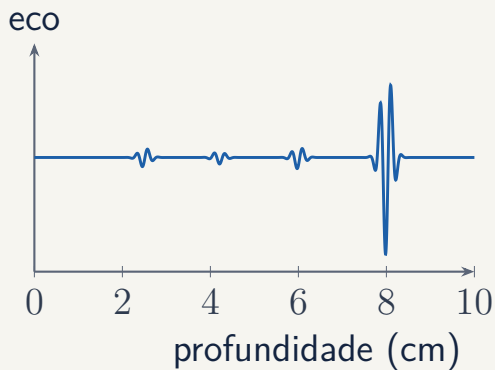
CAMADA INTERMÉDIA

Que ecos queremos?

A imagem é feita com os ecos das fronteiras **dentro** do corpo. Entre tecidos moles, Z quase não muda:

$$R = \left(\frac{1,65 - 1,60}{1,65 + 1,60} \right)^2 \approx 2 \times 10^{-4}$$

Estes ecos fracos atravessam a entrada da sonda duas vezes. Aí, queremos que passe tudo.



Tecidos moles e, a 8 cm, um osso.

CAMADA INTERMÉDIA

A sonda também tem um problema

Com gel, já não há ar. Mas o som nasce numa cerâmica muito rígida, e o gel tem a impedância do tecido:

$$Z_1 = 33 \times 10^6 \text{ Rayl}, \quad Z_2 = Z_{\text{gel}} \approx Z_{\text{tecido}} = 1,6 \times 10^6 \text{ Rayl}$$

$$T = \frac{4 \times 33 \times 1,6}{(34,6)^2} = 0,18$$

Na ida e na volta, só fica $0,18^2 = 0,03$: perdem-se 97 %.

CAMADA INTERMÉDIA

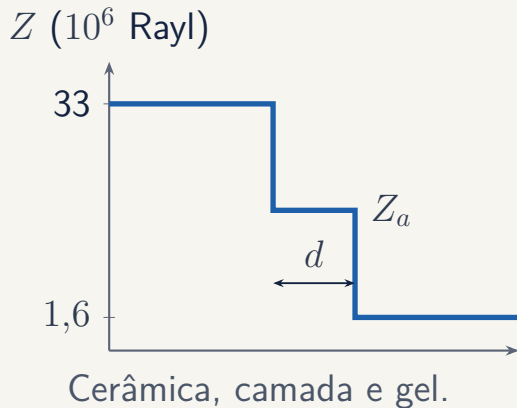
Uma camada entre os dois

Dentro da própria sonda, cola-se à cerâmica uma camada sólida de adaptação (índice a), de espessura d . Não é o gel: o gel fica cá fora.

$$Z_a = \rho_a v_a$$

Escolhe-se Z_a escolhendo o material.

Falta saber que Z_a e que d .



CAMADA INTERMÉDIA

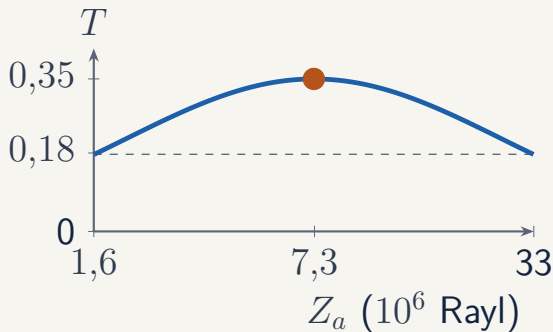
Que impedância para a camada?

Sem contar, por agora, os ecos na camada (tracejado: sem camada):

$$T \approx T(Z_1 \rightarrow Z_a) T(Z_a \rightarrow Z_2)$$

O melhor é dividir o salto em dois iguais, $Z_1/Z_a = Z_a/Z_2$:

$$Z_a = \sqrt{Z_1 Z_2}$$



CAMADA INTERMÉDIA

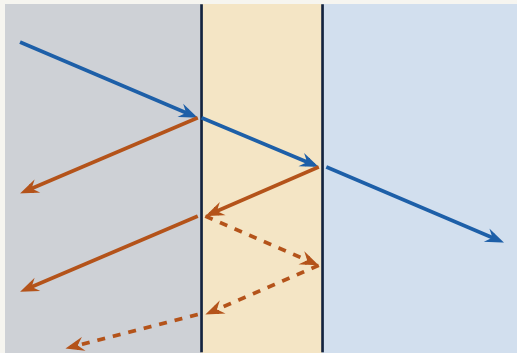
Os ecos dentro da camada

Com $Z_a = \sqrt{Z_1 Z_2}$, as duas faces reflectem igual:

$$r = \frac{Z_a - Z_1}{Z_a + Z_1} = \frac{Z_2 - Z_a}{Z_2 + Z_a} = -0,64$$

O som vai e vem na camada; cada ida e volta acrescenta a fase

$$\varphi = 2k_a d.$$



Cerâmica, camada e gel. Os ecos foram afastados na vertical.

CAMADA INTERMÉDIA

Somar todos os ecos

Eco da primeira face: r . Os de dentro entram com $1 + r$, reflectem com r , saem com $1 - r$; cada volta extra dá $-r^2 e^{i\varphi}$:

$$r_{\text{tot}} = r + (1 - r^2) r e^{i\varphi} [1 - r^2 e^{i\varphi} + r^4 e^{2i\varphi} - \dots] = r + \frac{(1 - r^2) r e^{i\varphi}}{1 + r^2 e^{i\varphi}}$$

Se $e^{i\varphi} = -1$:

$$r_{\text{tot}} = r - \frac{(1 - r^2) r}{1 - r^2} = 0$$

Não volta nada: $T = 1$.

CAMADA INTERMÉDIA

A espessura: um quarto de onda

$e^{i\varphi} = -1$ quer dizer $\varphi = 2k_a d = \pi$:

$$2 \frac{2\pi}{\lambda_a} d = \pi \Rightarrow d = \frac{\lambda_a}{4}$$

$$Z_a = \sqrt{Z_1 Z_2}, \quad d = \frac{\lambda_a}{4}$$

Por exemplo, a 3 MHz, numa resina com $v_a = 2500 \text{ m s}^{-1}$:
 $\lambda_a = 0,83 \text{ mm}$ e $d = 0,21 \text{ mm}$.

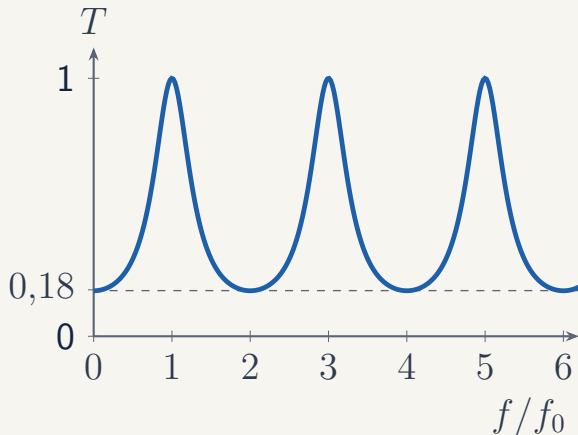
CAMADA INTERMÉDIA

Cada sonda tem a sua frequência

$d = \lambda_a/4$ só vale a uma frequência f_0 . A camada é feita para a frequência de trabalho da sonda.

Longe de f_0 deixa de ajudar: a $2f_0$, $\varphi = 2\pi$, os ecos somam-se e volta $T = 0,18$.

Por isso, mudar de frequência é mudar de sonda.



PERGUNTA: O OUVIDO MÉDIO

Do ar para o ouvido interno

Para que servem os ossículos, se o tímpano já vibra?

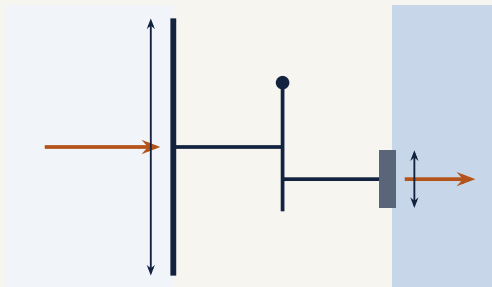
A cóclea está cheia de líquido:

$$Z_c \approx 1,5 \times 10^6 \text{ Rayl.}$$

Se o som batesse directamente na janela oval:

$$T \approx \frac{4 \times 413}{1,5 \times 10^6} = 1,1 \times 10^{-3}$$

Entre os dois está o ouvido médio.



Tímpano, ossículos e janela oval.

PERGUNTA: O OUVIDO MÉDIO

Trocar velocidade por pressão

Para a mesma intensidade, $I = p_m^2/2Z = Z u_m^2/2$:

$$\frac{p_{\text{líquido}}}{p_{\text{ar}}} = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_{\text{ar}}}} = \sqrt{\frac{1,5 \times 10^6}{413}} = 60, \quad \frac{u_{\text{líquido}}}{u_{\text{ar}}} = \frac{1}{60}$$

No ar, o som é pressão pequena e velocidade grande; no líquido tem de ser o contrário.

O ouvido médio é uma máquina que aumenta a pressão e diminui a velocidade, sem perder energia. Faz isso de duas maneiras.

PERGUNTA: O OUVIDO MÉDIO

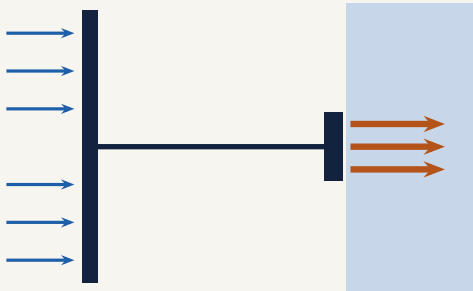
Primeira maneira: as áreas

A força no tímpano (área A_t) passa para a janela oval (área A_j):

$$p_j A_j = p_t A_t \Rightarrow p_j = N p_t, \quad N = \frac{A_t}{A_j}$$

As duas membranas movem-se juntas: $u_j = u_t$.

Com 55 mm^2 e $3,2 \text{ mm}^2$: $N = 17$.



A mesma força: espalhada no tímpano, concentrada na janela oval.

PERGUNTA: O OUVIDO MÉDIO

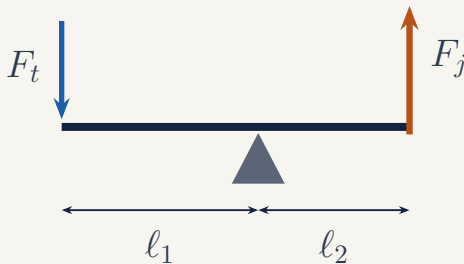
Segunda maneira: a alavanca

Os ossículos rodam em torno de um eixo, com braços ℓ_1 e ℓ_2 , $L = \ell_1/\ell_2$:

$$F_j = L F_t, \quad u_j = \frac{u_t}{L}$$

O produto $F u$, a potência, não muda.

No ouvido humano, $L \approx 1,3$.



PERGUNTA: O OUVIDO MÉDIO

As duas juntas

Áreas e alavanca juntas: $p_j = NL p_t$ e $u_j = u_t/L$.

Na janela oval, o líquido impõe $p_j = Z_c u_j$. Do lado do tímpano:

$$\frac{p_t}{u_t} = \frac{p_j/NL}{L u_j} = \frac{1}{NL^2} \frac{p_j}{u_j}$$

$$Z_{\text{vista}} = \frac{Z_c}{NL^2}$$

RESPOSTA

O ganho do ouvido médio

Com $N = 17$ e $L = 1,3$:

$$NL^2 = 17 \times 1,69 = 29, \quad Z_{\text{vista}} = \frac{1,5 \times 10^6}{29} = 5,2 \times 10^4 \text{ Rayl}$$

$$T \approx \frac{4 \times 413}{5,2 \times 10^4} = 3,2 \times 10^{-2}$$

Entra 29 vezes mais energia. Para $T = 1$, seria preciso $NL^2 = 60^2 = 3600$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma onda sonora com $p_i = 0,20 \text{ Pa}$ incide na vertical sobre a água de uma piscina ($Z_{\text{ar}} = 413 \text{ Rayl}$, $Z_{\text{água}} = 1,48 \times 10^6 \text{ Rayl}$).

- (a) Calcule a amplitude de pressão transmitida.
- (b) Compare a velocidade u das partículas no ar e na água.
- (c) Que fracção da intensidade entra na água?
- (d) Uma fonte submersa produz $p_i = 0,20 \text{ Pa}$ na superfície, na vertical. Que pressão passa para o ar, e que fracção da energia?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $t_p = 2Z_2/(Z_1 + Z_2) \approx 2$: $p_t = 0,40 \text{ Pa}$.

(b) Com $u = p/Z$:

$$u_i = \frac{0,20}{413} = 4,8 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}, \quad u_t = \frac{0,40}{1,48 \times 10^6} = 2,7 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$$

(c) $T \approx 4Z_1/Z_2 = 4 \times 413/1,48 \times 10^6 = 1,1 \times 10^{-3}$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Agora $Z_1 = Z_{\text{água}}$ e $Z_2 = Z_{\text{ar}}$:

$$t_p = \frac{2 \times 413}{413 + 1,48 \times 10^6} = 5,6 \times 10^{-4}, \quad p_t = 1,1 \times 10^{-4} \text{ Pa}$$

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1,1 \times 10^{-3}$$

A pressão no ar é minúscula, mas a fracção de energia é a mesma do outro sentido: T não depende do sentido.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma sonda de ultrassons tem uma cerâmica com $Z_1 = 33 \times 10^6 \text{ Rayl}$ e trabalha a 2,0 MHz em água ($Z_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ Rayl}$). Na camada de adaptação, o som tem velocidade 3000 m s^{-1} .

- (a) Que fracção da energia passa sem camada?
- (b) Que impedância deve ter a camada?
- (c) Que espessura deve ter?
- (d) O que acontece a 4,0 MHz? E a 6,0 MHz?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $T = 4 \times 33 \times 1,5 / 34,5^2 = 0,17$

(b) $Z_a = \sqrt{33 \times 1,5} \times 10^6 = 7,0 \times 10^6 \text{ Rayl}$

(c) $\lambda_a = 3000 / 2,0 \times 10^6 = 1,5 \text{ mm:}$

$$d = \frac{\lambda_a}{4} = 0,375 \text{ mm}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) A 4,0 MHz, $\lambda_a = 0,75$ mm e $d = \lambda_a/2$.

A onda reflectida na segunda face atrasa-se λ_a : chega em fase e não anula nada.

$$T = 0,17, \text{ como sem camada}$$

A 6,0 MHz, $d = 3\lambda_a/4$: o atraso é $3\lambda_a/2$ e a anulação volta.

$$T = 1$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Num ouvido médio idealizado, $A_t = 42 \text{ mm}^2$, $A_j = 1,2 \text{ mm}^2$ e a alavanca dos ossículos vale $L = 2,5$. O líquido da cóclea tem $Z_c = 1,5 \times 10^6 \text{ Rayl}$ e o ar $Z_{\text{ar}} = 413 \text{ Rayl}$.

- (a) Calcule o ganho de pressão p_j/p_t .
- (b) Calcule a impedância vista do ar.
- (c) Calcule T , com e sem ouvido médio.
- (d) Que alavanca daria $T = 1$, com as mesmas áreas?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $N = 42/1,2 = 35$: $p_j/p_t = NL = 35 \times 2,5 = 88$

(b) $NL^2 = 35 \times 6,25 = 219$:

$$Z_{\text{vista}} = \frac{1,5 \times 10^6}{219} = 6,9 \times 10^3 \text{ Rayl}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(c) Sem ouvido médio, $T = 4 \times 413 / 1,5 \times 10^6 = 1,1 \times 10^{-3}$. Com ele:

$$T = \frac{4 \times 413 \times 6900}{(413 + 6900)^2} = 0,21$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) $T = 1$ quando o líquido parece ter a impedância do ar:

$$\frac{Z_c}{NL^2} = Z_{\text{ar}} \Rightarrow L^2 = \frac{1,5 \times 10^6}{35 \times 413} = 104$$

$$L = 10$$

Este ouvido fica a meio caminho: com $L = 2,5$, passa 21 %, quase 200 vezes mais do que sem ouvido médio.