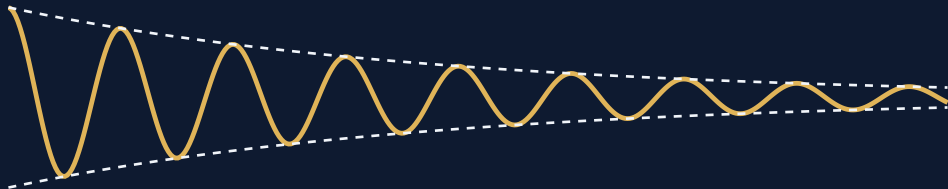


Absorção acústica e impedância

Atenuação, materiais, salas e paredes



Três perguntas

- Porque é que um trovão, ao longe, só ribomba e, perto, estala?
- Porque é que uma sala vazia faz eco e a mesma sala mobilada não?
- Porque é que da festa do vizinho só nos chegam os graves?

CONCEITOS

O que vamos usar

- Som audível (limites convencionais): **graves**, 20 Hz a 250 Hz; **médios**, 250 Hz a 2 kHz; **agudos**, 2 kHz a 20 kHz.
- Intensidade de uma onda harmónica: $I = p_m^2 / 2Z$.
- Fracção de energia reflectida numa fronteira: $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$.
- Módulo de compressibilidade: $\Delta p = -K \Delta V / V$, com $v = \sqrt{K / \rho}$.
- Oscilador forçado com atrito: amplitude máxima em $\omega_0 = \sqrt{k / m}$.
- Para x pequeno, $\ln(1 - x) \approx -x$.

ATENUAÇÃO

Uma onda que perde energia

Num meio real, parte da energia passa a calor. Cada camada fina dx tira a mesma *fracção* da amplitude:

$$dp_m = -\alpha p_m dx \Rightarrow \frac{dp_m}{p_m} = -\alpha dx$$

$$p_m(x) = p_m(0) e^{-\alpha x} \quad (\text{integrando})$$

α : **coeficiente de atenuação**, em m^{-1} .

ATENUAÇÃO

A intensidade cai duas vezes mais depressa

Como $I \propto p_m^2$:

$$I(x) = I(0) (e^{-\alpha x})^2 = I(0) e^{-2\alpha x}$$

Exemplo, $\alpha = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, ao fim de 1 km:

$$\frac{p_m}{p_m(0)} = e^{-1} = 0,37, \quad \frac{I}{I(0)} = e^{-2} = 0,14$$

$1/\alpha$ é a distância em que a amplitude cai para $1/e$.

PERGUNTA: O TROVÃO

De onde vem a absorção

Porque é que um trovão, ao longe, só ribomba e, perto, estala?

Para responder: de onde vem α , e como depende de f ?

- **Viscosidade:** camadas de fluido com velocidades diferentes roçam umas nas outras.
- **Condução de calor:** as zonas comprimidas aquecem e perdem calor para as rarefeitas.
- **Relaxação molecular:** a compressão excita vibrações das moléculas, que devolvem a energia atrasada, fora de fase; parte fica como calor.

PERGUNTA: O TROVÃO

Porque é que os agudos se perdem mais

O atrito viscoso depende de quanto u muda de ponto para ponto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim k u_m = \frac{2\pi f}{v} u_m$$

Potência perdida por volume $\propto (\partial u / \partial x)^2 \propto f^2 u_m^2$; intensidade transportada $\propto u_m^2$. A fracção perdida por metro:

$$\alpha \propto f^2$$

Dobrar f quadruplica α . A condução de calor dá a mesma lei.

PERGUNTA: O TROVÃO

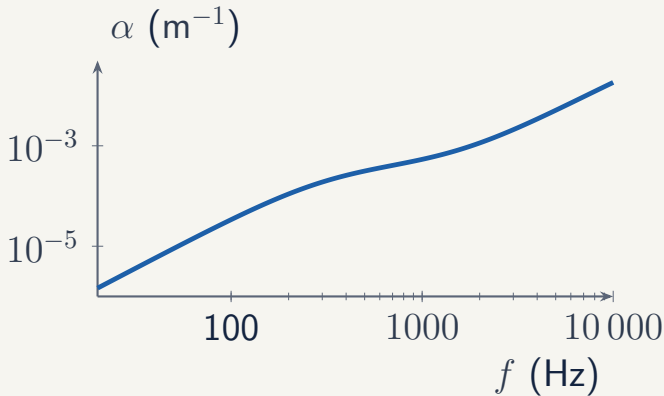
A atenuação no ar

Ar a 20 °C, 50 % de humidade.

Distância $1/\alpha$:

- 100 Hz: 30 km
- 1 kHz: 1,9 km
- 10 kHz: 55 m

Fora da «barriga» (relaxação do O₂ e do N₂), $\alpha \propto f^2$.



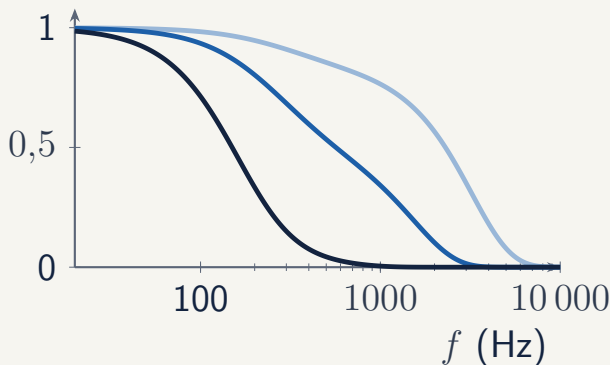
RESPOSTA

O trovão ao longe

O estalo é feito de frequências altas; o ribombar, de baixas.

A 10 km (curva escura), o ar já absorveu quase tudo acima de 1 kHz.

Amplitude que resta a 0,5, 2 e 10 km.

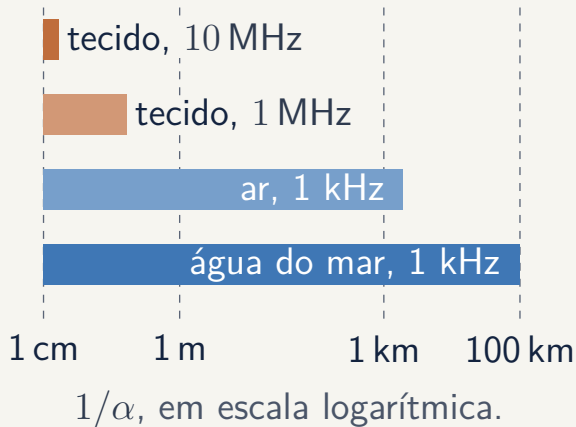


ATENUAÇÃO

Até onde chega o som

$1/\alpha$: distância em que a amplitude cai para $1/e$ (valores medidos).

- Água do mar: os graves atravessam oceanos.
- Tecidos: $\alpha \approx 0,06 \text{ cm}^{-1}$ por MHz. Frequência alta vê menos fundo.



SUPERFÍCIES

Absorção numa superfície

Uma onda bate numa superfície. A fracção R da energia volta; o resto, $1 - R$, não volta: passa a calor ou atravessa.

$$a = 1 - R \quad (\text{coeficiente de absorção})$$

- $a = 0$: reflecte tudo.
- $a = 1$: nada volta, como uma janela aberta.

SUPERFÍCIES

O coeficiente a partir da impedância

$Z_s = p/u$ à entrada da superfície é a sua impedância. Com R da fronteira ar (Z_0)–superfície:

$$a = 1 - \frac{(Z_s - Z_0)^2}{(Z_s + Z_0)^2} = \frac{(Z_s + Z_0)^2 - (Z_s - Z_0)^2}{(Z_s + Z_0)^2}$$

$$a = \frac{4Z_0Z_s}{(Z_0 + Z_s)^2}$$

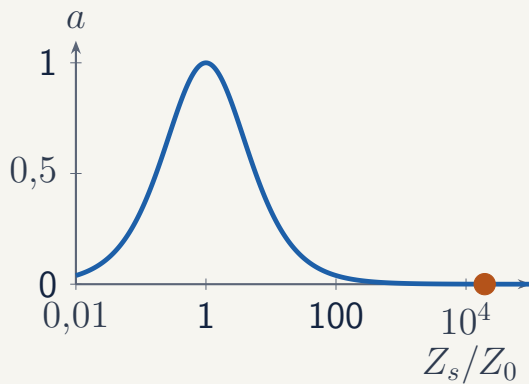
$a = 1$ só para $Z_s = Z_0$: o som entra todo na superfície.

SUPERFÍCIES

O que faz um bom absorvedor

Paredes, chão e tecto rígidos têm Z_s milhares de vezes maior do que o ar (ponto): $a \approx 0$, reflectem quase tudo.

Um bom absorvedor deixa o som entrar ($Z_s \approx Z_0$) e dissipa-o lá dentro, como os materiais porosos.



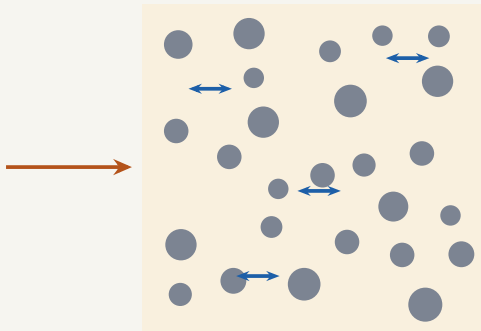
SUPERFÍCIES

Materiais porosos

Espumas, lãs, tecidos: fibras com ar entre elas.

- São quase só ar: Z_s perto de Z_0 , o som entra.
- Lá dentro, o ar que oscila roça nas fibras: o atrito viscoso passa a energia a calor.

Só absorvem se o ar dentro deles se mover.



Fibras (cinzento) e ar a oscilar entre elas (azul).

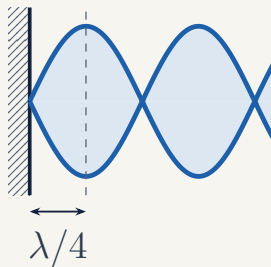
SUPERFÍCIES

A parede obriga o ar a parar

A espuma está colada a uma parede rígida: aí o ar não se pode mover. Com x a distância à parede, incidente e reflectida somam-se:

$$\begin{aligned} u &= u_m \cos(\omega t + kx) - u_m \cos(\omega t - kx) \\ &= -2u_m \sin kx \sin \omega t \end{aligned}$$

Amplitude $2u_m |\sin kx|$: nula na parede, máxima a $x = \lambda/4$.



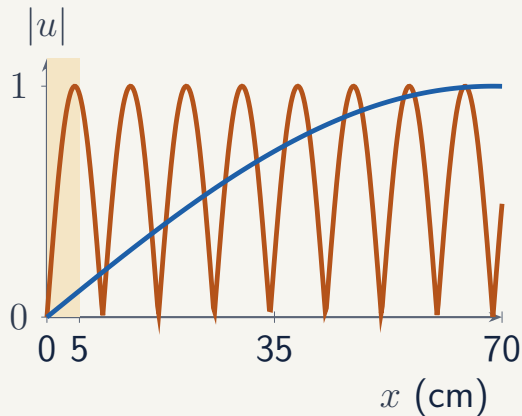
Amplitude de u em frente à parede.

SUPERFÍCIES

Porque é que a espuma não absorve graves

A espuma de 5 cm (amarelo) só absorve onde o ar se move.

- 2 kHz: $\lambda/4 = 4,3$ cm, o máximo fica dentro da espuma.
- 125 Hz: $\lambda/4 = 69$ cm; na espuma, $|u|$ não passa de 11 % do máximo.

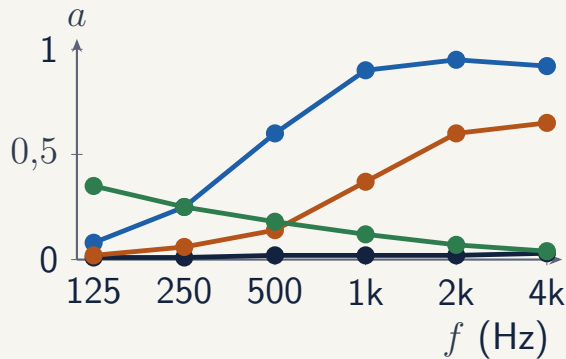


SUPERFÍCIES

Coeficientes de absorção

Medidos, junto a uma parede:

- espuma de 5 cm (**azul**): a partir de 500 Hz; mais espessa, mais abaixo;
- alcatifa de 1 cm (**laranja**): só agudos;
- betão (escuro): quase nada;
- vidro (**verde**): vibra, deixa passar graves.



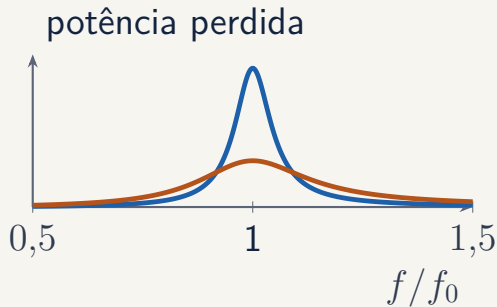
SUPERFÍCIES

Absorver os graves

Para absorver, o ar tem de se mover e perder energia por atrito. Nos graves, a espuma teria de ter quase 70 cm.

Outra via: um oscilador forçado à sua frequência própria oscila muito, e é aí que perde mais energia.

Ideia: um oscilador feito de ar, sintonizado nos graves.



Pouco atrito (azul) e mais atrito (laranja).

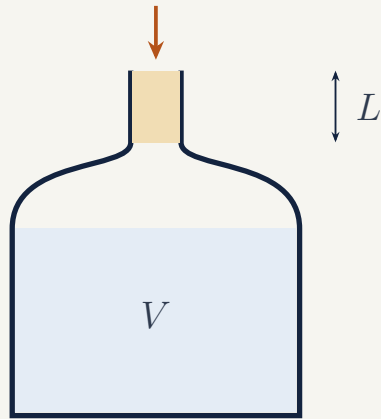
SUPERFÍCIES

O ressoador de Helmholtz

Cavidade de volume V , ligada ao exterior por um gargalo de área S e comprimento L .

Se as dimensões forem muito menores do que λ (a 170 Hz, $\lambda = 2$ m):

- o ar do gargalo move-se todo junto, como um êmbolo: é a **massa**;
- a pressão na cavidade é uniforme: o ar lá dentro é a **mola**.



Amarelo: o ar do gargalo.

SUPERFÍCIES

A massa e a mola

Massa: o ar do gargalo

$$m = \rho SL$$

Mola: o ar da cavidade

O êmbolo entra x : $\Delta V = -Sx$, e $\Delta p = -K \Delta V/V = KSx/V$, com $K = \rho v^2$. A força sobre o êmbolo é $-S \Delta p$:

$$F = -\frac{\rho v^2 S^2}{V} x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\rho v^2 S^2}{V}$$

SUPERFÍCIES

A equação do movimento

Sobre o ar do gargalo actuam:

- a mola, $-kx$;
- o som que chega à boca, com pressão $p_e \cos \omega t$: força $S p_e \cos \omega t$;
- o atrito do ar nas paredes do gargalo, $-b \dot{x}$.

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = S p_e \cos \omega t$$

É o oscilador forçado com amortecimento, de frequência própria $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

SUPERFÍCIES

A frequência própria

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\rho v^2 S^2 / V}{\rho S L}} = v \sqrt{\frac{S}{V L}}$$

$$f_0 = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V L}}$$

A densidade cancela-se. Mais grave: cavidade maior, gargalo mais estreito ou mais comprido.

$$V = 1 \text{ L}, S = 2 \text{ cm}^2, L = 2 \text{ cm}: f_0 = 54,6 \times \sqrt{10} = 173 \text{ Hz.}$$

SUPERFÍCIES

Porque é que absorve

Em ω_0 , $m\ddot{x} + kx = 0$: a inércia e a mola compensam-se e sobra $b\dot{x} = S p_e \cos \omega t$. Amplitude da velocidade:

$$u_0 = \frac{S p_e}{b}$$

Com pouco atrito, o ar no gargalo move-se muito mais depressa do que o ar à volta, e perde a potência $\frac{1}{2} b u_0^2$.

Fora de f_0 , a amplitude cai: só se absorve numa banda de largura $\Delta\omega \approx b/m$. Material poroso no gargalo aumenta b e alarga a banda.

SUPERFÍCIES

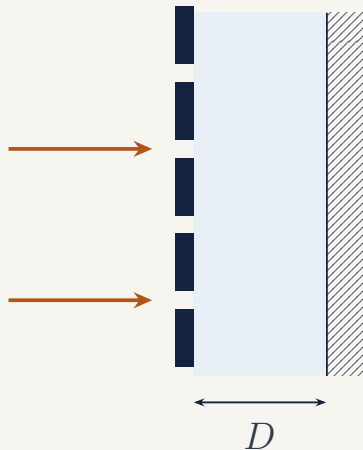
Painéis perfurados

Muitos ressoadores lado a lado: cada furo é um gargalo, o ar atrás dele a cavidade. Espessura L , fracção furada σ , distância D : $S/V = \sigma/D$.

$$f_0 = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{LD}}$$

$\sigma = 2\%$, $L = 1\text{ cm}$, $D = 10\text{ cm}$:

$f_0 = 54,6 \times \sqrt{20} = 244\text{ Hz}$.



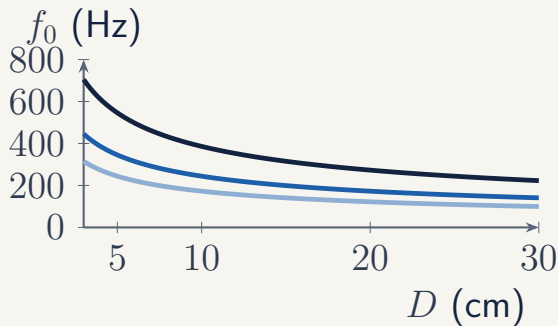
SUPERFÍCIES

Sintonizar o painel

O painel absorve numa banda à volta de f_0 . Escolhe-se f_0 onde a sala tem excesso de graves.

f_0 fixa-se ao construir: furos (σ), placa (L) ou caixa de ar (D).

Banda mais larga: lã na caixa de ar, ou painéis com f_0 diferentes.



$L = 1$ cm; $\sigma = 1, 2$ e 5% , de baixo para cima.

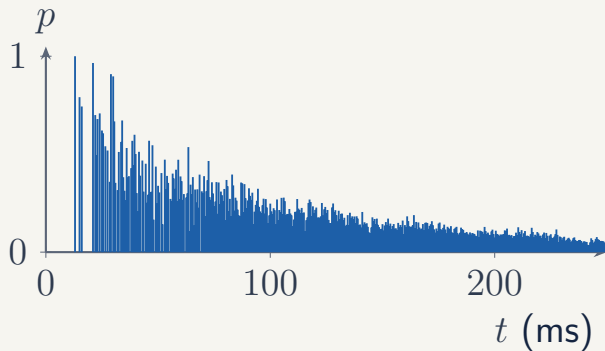
PERGUNTA: A SALA VAZIA

O som numa sala

Porque é que uma sala vazia faz eco e a mesma sala mobilada não?

Ao ouvinte chega primeiro o som directo, depois uma multidão de reflexões.

Sala de $8 \times 6 \times 3$ m com $a = 0,15$: em cada reflexão perde-se 15 % da energia.



PERGUNTA: A SALA VAZIA

Quantas reflexões por segundo

Fazendo a média sobre todas as direcções, entre duas reflexões o som percorre (resultado de geometria, que não deduzimos)

$$\ell = \frac{4V}{S}$$

O som percorre v metros por segundo:

$$n = \frac{v}{\ell} = \frac{vS}{4V}$$

Sala de $8 \times 6 \times 3$ m: $\ell = 4 \times 144/180 = 3,2$ m, $n = 107 \text{ s}^{-1}$.

PERGUNTA: A SALA VAZIA

O som decai exponencialmente

Em cada reflexão, a energia é multiplicada por $1 - \bar{a}$ ($\bar{a}$: média das superfícies). Ao fim de t , houve nt reflexões; com $\bar{a}$ pequeno:

$$E(t) = E_0 (1 - \bar{a})^{nt} = E_0 e^{nt \ln(1 - \bar{a})} \approx E_0 e^{-\bar{a} nt}$$

$$n = \frac{vS}{4V} : \quad E(t) = E_0 e^{-Avt/4V}, \quad A = \bar{a}S = \sum_i a_i S_i$$

A é a **área de absorção equivalente**: a área de janela aberta que absorveria o mesmo.

PERGUNTA: A SALA VAZIA

Tempo de reverberação

T_{60} : tempo para a energia cair para um milionésimo (o 60 vem da escala em decibéis, que veremos adiante).

$$\frac{A v T_{60}}{4V} = \ln 10^6 = 13,8 \Rightarrow T_{60} = \frac{4 \times 13,8}{343} \frac{V}{A}$$

$$T_{60} = 0,161 \frac{V}{A} \quad (V \text{ em m}^3, A \text{ em m}^2)$$

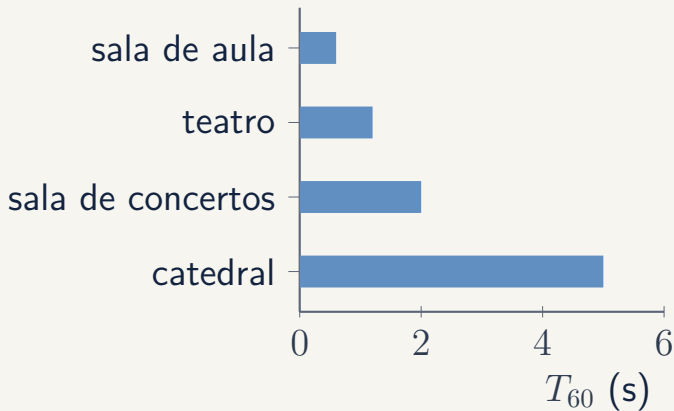
É a **fórmula de Sabine**. Sala de $8 \times 6 \times 3$ com $\bar{a} = 0,15$:

$$T_{60} = 0,161 \times 144/27 = 0,86 \text{ s.}$$

PERGUNTA: A SALA VAZIA

Que reverberação queremos

- Fala: T_{60} curto, para as sílabas não se misturarem.
- Música: T_{60} mais longo, para o som se fundir.
- Igrejas: vários segundos.



RESPOSTA

A sala vazia

Sala de $5 \times 4 \times 3 \text{ m}$: $V = 60 \text{ m}^3$, $S = 94 \text{ m}^2$.

Vazia, paredes de estuque: $\bar{a} = 0,04$

$$A = 0,04 \times 94 = 3,8 \text{ m}^2, \quad T_{60} = 0,161 \times \frac{60}{3,8} = 2,6 \text{ s}$$

Mobilada: sofá, cortinas e tapete juntos 12 m^2

$$A = 3,8 + 12 = 16 \text{ m}^2, \quad T_{60} = 0,161 \times \frac{60}{16} = 0,6 \text{ s}$$

Vazia, cada sílaba ainda soa quando chega a seguinte: é o «eco».

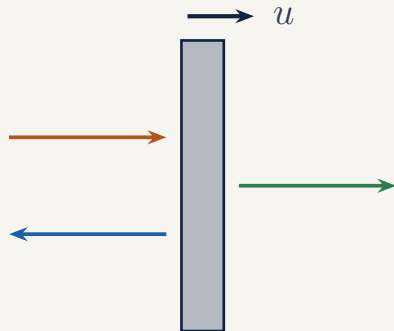
PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

Uma parede é uma massa

Porque é que da festa do vizinho só nos chegam os graves?

O som do vizinho empurra a parede; a parede vibra e, do nosso lado, empurra o ar. É esse movimento que ouvimos.

Modelo: parede fina, de massa m_s por unidade de área, que se move em bloco com velocidade u . Ar (Z_0) dos dois lados.



PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

As pressões dos dois lados

O ar encostado à parede move-se com ela, com velocidade u .

Do nosso lado: só a onda que a parede emite (verde)

$$p_t = Z_0 u$$

Do lado do vizinho: incidente (laranja) e reflectida (azul)

$$u = u_i + u_r = (p_i - p_r)/Z_0, \text{ logo } p_r = p_i - Z_0 u \text{ e}$$

$$p_i + p_r = 2p_i - Z_0 u$$

PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

A equação do movimento

Segunda lei de Newton, por unidade de área: pressão do lado do vizinho menos pressão do nosso lado.

$$m_s \frac{du}{dt} = (2p_i - Z_0 u) - Z_0 u = 2p_i - 2Z_0 u$$

- $2p_i$: a força que empurra a parede, o dobro da pressão incidente.
- $-2Z_0 u$: a parede perde energia ao emitir som para os dois lados; trava-a como um atrito.

PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

A inércia domina

Com $p_i = p_m \cos \omega t$, $m_s du/dt$ tem amplitude $\omega m_s u_m$ e $2Z_0 u$ tem amplitude $2Z_0 u_m$. Tijolo a 100 Hz:

$$\frac{\omega m_s}{2Z_0} = \frac{628 \times 200}{826} = 150 \gg 1$$

Fica $m_s du/dt \approx 2p_m \cos \omega t$; integrando:

$$u_m = \frac{2p_m}{\omega m_s}$$

Força que muda depressa de sentido mal acelera a parede.

PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

A lei da massa

Do nosso lado, a pressão é a que a parede cria ao mover-se:

$$p_{t,m} = Z_0 u_m = \frac{2Z_0}{\omega m_s} p_m$$

Os dois lados têm o mesmo Z_0 : a fracção de energia transmitida é a razão dos quadrados das pressões.

$$\tau = \left(\frac{p_{t,m}}{p_m} \right)^2 = \left(\frac{2Z_0}{\omega m_s} \right)^2$$

Dobrar a frequência ou a massa divide τ por quatro.

PERGUNTA: A FESTA DO VIZINHO

Uma parede de tijolo

$m_s = 200 \text{ kg m}^{-2}$, $2Z_0 = 826 \text{ Rayl}$. Verifica-se $\omega m_s \gg 826$.

$$100 \text{ Hz} : \tau = \left(\frac{826}{628 \times 200} \right)^2 = (6,6 \times 10^{-3})^2 = 4 \times 10^{-5}$$

$$2 \text{ kHz} : \tau = \left(\frac{826}{12\,570 \times 200} \right)^2 = (3,3 \times 10^{-4})^2 = 1 \times 10^{-7}$$

A frequência é 20 vezes maior: τ é $20^2 = 400$ vezes menor.

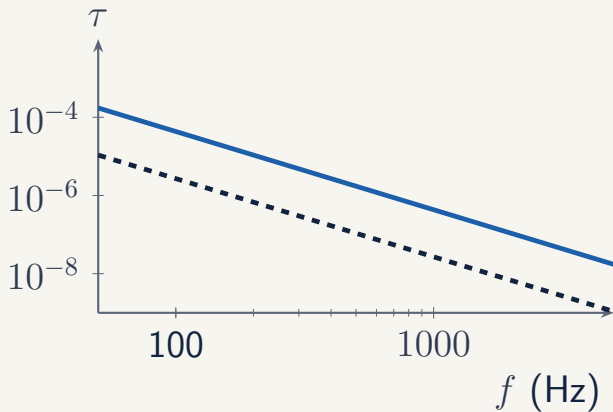
RESPOSTA

A festa do vizinho

A lei da massa dá $\tau \propto 1/f^2$:
de 100 Hz a 2 kHz, τ cai 400
vezes.

Os graves da música
passam; os agudos e a voz
ficam do lado de lá.

Tracejado: 800 kg m^{-2} , τ 16
vezes menor.



ATRAVÉS DE UMA PAREDE

Absorver não é isolar

- Espuma na parede reduz a reverberação *dentro* da sala.
- Quase não muda a massa da parede: o vizinho continua a ouvir.
- Para isolar é precisa massa, ou duas paredes separadas por ar e material poroso.

Absorver controla o som que fica; isolar controla o som que passa.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

No ar, $\alpha = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ a 200 Hz e $\alpha = 3,4 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ a 4 kHz. Ignore o espalhamento geométrico.

- (a) Que fracção da amplitude resta a 1 km, em cada frequência?
- (b) E que fracção da intensidade?
- (c) A que distância cai para metade a amplitude a 4 kHz?
- (d) A que distância a razão entre as intensidades a 4 kHz e a 200 Hz cai 100 vezes?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $e^{-\alpha x}$: $e^{-0,1} = 0,90$ e $e^{-3,4} = 0,033$.

(b) $e^{-2\alpha x}$: $e^{-0,2} = 0,82$ e $e^{-6,8} = 1,1 \times 10^{-3}$.

(c)

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{0,693}{3,4 \times 10^{-3}} = 204 \text{ m}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) A razão entre as intensidades varia como

$$\frac{I_{4 \text{ kHz}}}{I_{200 \text{ Hz}}} \propto e^{-2(\alpha_2 - \alpha_1)x}$$

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)x = \ln 100 \Rightarrow x = \frac{4,61}{2 \times 3,3 \times 10^{-3}} \approx 700 \text{ m}$$

A menos de um quilómetro, o timbre do trovão já mudou muito.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma sala de aula tem $10 \times 8 \times 3,5$ m. Todas as superfícies têm $a = 0,05$.

- (a) Calcule V , S e T_{60} .
- (b) Reveste-se o tecto com um material de $a = 0,70$. Qual o novo T_{60} ?
- (c) Entram 40 alunos, cada um com $0,45 \text{ m}^2$ de absorção. E agora?
- (d) Que a deveria ter o tecto para obter $0,6$ s com a sala vazia?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $V = 280 \text{ m}^3$, $S = 2(80 + 35 + 28) = 286 \text{ m}^2$, $A = 14,3 \text{ m}^2$:

$$T_{60} = 0,161 \times \frac{280}{14,3} = 3,2 \text{ s}$$

(b) O tecto, 80 m^2 , passa de $a = 0,05$ a $0,70$:

$$A = 14,3 + 80 \times 0,65 = 66,3 \text{ m}^2, \quad T_{60} = 0,68 \text{ s}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) $A = 66,3 + 40 \times 0,45 = 84,3 \text{ m}^2$, $T_{60} = 0,53 \text{ s}$.

(d) Para $T_{60} = 0,6 \text{ s}$:

$$A = \frac{0,161 \times 280}{0,6} = 75,1 \text{ m}^2$$

Sem o tecto, $A = 14,3 - 80 \times 0,05 = 10,3 \text{ m}^2$:

$$10,3 + 80 a = 75,1 \Rightarrow a = 0,81$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Nos tecidos moles, $\alpha = 0,06 \text{ cm}^{-1}$ por MHz. Numa ecografia, o som vai e volta.

- (a) A 3 MHz, que fracção da amplitude volta de 10 cm?
- (b) E a 10 MHz?
- (c) A 3 MHz, que fracção de I fica no primeiro centímetro?
- (d) O eco é útil até a amplitude cair para 10^{-3} . Até que profundidade?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $\alpha = 0,18 \text{ cm}^{-1}$ e o caminho é 20 cm: $e^{-3,6} = 0,027$.

(b) $\alpha = 0,60 \text{ cm}^{-1}$: $e^{-12} = 6 \times 10^{-6}$.

(c)

$$1 - e^{-2 \times 0,18 \times 1} = 1 - e^{-0,36} = 0,30$$

Cerca de 30 % da intensidade fica no primeiro centímetro, como calor.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) Ida e volta: $e^{-2\alpha d} = 10^{-3}$.

$$d = \frac{\ln 1000}{2\alpha} = \frac{6,9}{2 \times 0,06 f} = \frac{58 \text{ cm}}{f/1 \text{ MHz}}$$

$$3 \text{ MHz} : d = 19 \text{ cm}, \quad 10 \text{ MHz} : d = 5,8 \text{ cm}$$

Órgãos profundos exigem frequências baixas.