

Oscilações e Ondas

Aulas 7–11: exercícios

Âmbito. Ondas planas, cilíndricas e esféricas; energia, fluxo e intensidade; condições de fronteira, ondas estacionárias e interferência; ondas mecânicas e som; propagação em diferentes meios.

Convenções. Use unidades SI e apresente os resultados numéricos com três algarismos significativos, sem arredondamentos intermédios. Os dados são nominais. k é o número de onda, ω a frequência angular, λ o comprimento de onda e v a velocidade de propagação. T é a tensão de uma corda; o período escreve-se $1/f$. $\langle \cdot \rangle$ indica a média temporal. Nas ondas sonoras, s é o deslocamento das partículas, p' a pressão acústica e ρ' a variação de densidade.

Os modelos biológicos são idealizações lineares de pequenas perturbações. Não é necessário recorrer a impedância acústica, reflexão de ondas sonoras, absorção, decibéis ou outros conteúdos posteriores.

Exercício 1 — Leitura de uma onda plana

Uma onda plana harmónica é descrita por

$$\psi(x,y,t) = (1,50 \text{ mm}) \cos \left[(3,00 \text{ rad m}^{-1}) x - (4,00 \text{ rad m}^{-1}) y - (1500 \text{ rad s}^{-1}) t \right].$$

- Determine o vector de onda, o seu módulo, o comprimento de onda e a velocidade de propagação. Indique a direcção e o sentido de propagação pelo ângulo com o eixo x .
- Calcule a velocidade com que a fase avança ao longo do eixo x e ao longo do eixo y . Explique por que razão os módulos de ambas são maiores do que v .
- Escreva a equação da frente de onda que passa pela origem em $t = 0$ e determine o instante em que essa frente atinge o ponto $(1,00 \text{ m}, -1,00 \text{ m}, 0)$.

Exercício 2 — Um conjunto de microfones

Um conjunto linear de microfones tem comprimento $\ell = 0,500 \text{ m}$ e capta um som de $2,00 \text{ kHz}$ vindo de uma fonte pontual. No ar, $v = 343 \text{ m s}^{-1}$.

- Com a fonte a $R = 10,0 \text{ m}$, à frente do centro do conjunto, calcule o afastamento s entre a frente de onda e um plano, nas pontas do conjunto, e o erro de fase correspondente.
- A partir de que distância R o erro de fase nas pontas é inferior a $\pi/8$?
- Dois microfones do conjunto estão a $d = 0,500 \text{ m}$ um do outro. Para uma onda plana que chega a $30,0^\circ$ da normal ao conjunto, calcule o atraso entre eles. Se o atraso for medido com uma incerteza de $10,0 \mu\text{s}$, com que incerteza se determina o ângulo?

Exercício 3 — Uma pequena fonte esférica num tecido

Num modelo homogéneo e sem perdas de um tecido, uma pequena fonte emite ondas esféricas harmónicas de $50,0 \text{ kHz}$, com $v = 1540 \text{ m s}^{-1}$. A $2,00 \text{ cm}$ da fonte, a amplitude é $30,0 \text{ nm}$. Use um modelo escalar idealizado: ψ é uma grandeza escalar que obedece à equação de onda, sem correcções de campo próximo.

- Calcule λ , k e a amplitude a $5,00 \text{ cm}$ da fonte.

- b) Calcule a diferença de fase e o atraso de propagação entre esses dois pontos, situados no mesmo raio.
- c) Escreva $\psi(r,t) = (C/r) \cos(kr - \omega t)$, determine C e verifique por substituição que $r\psi$ satisfaz $\partial^2(r\psi)/\partial t^2 = v^2 \partial^2(r\psi)/\partial r^2$. A que distância a amplitude é 10 % da que existe a 2,00 cm?

Exercício 4 — Energia numa corda

Uma corda com $\mu = 4,00 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ e tensão $T = 64,0 \text{ N}$ transporta uma onda harmónica progressiva de 100 Hz e amplitude 3,00 mm.

- a) Calcule v , ω , k e a densidade média de energia $\langle u \rangle$.
- b) Calcule a potência média transportada e a energia que passa por um ponto da corda em 10,0 s. Por que factor mudaria a potência média se a tensão duplicasse, mantendo a amplitude e a frequência?
- c) Mostre que, num dado ponto e instante, a densidade de energia cinética é igual à potencial. Onde é máxima a densidade de energia, e quanto vale aí?

Exercício 5 — Medir a potência de uma fonte

Um sensor de área $2,00 \text{ cm}^2$, a 3,00 m de uma fonte que emite igualmente em todas as direcções, com a normal virada para a fonte, mede uma potência de $4,00 \mu\text{W}$. Despreze perdas.

- a) Calcule a intensidade no sensor e a potência da fonte.
- b) Que potência mede o sensor se a sua normal fizer $60,0^\circ$ com a direcção da fonte?
- c) A que distância, com a normal virada para a fonte, mediria $1,00 \mu\text{W}$? Qual é aí a razão entre a amplitude da onda e a amplitude a 3,00 m?

Exercício 6 — Ondas de corte geradas por uma agulha

Em elastografia, uma agulha vibrante gera ondas de corte cilíndricas num tecido com $\rho = 1050 \text{ kg m}^{-3}$ e módulo de corte $G = 4,20 \text{ kPa}$, com $v = \sqrt{G/\rho}$. A frequência é 200 Hz e, a 5,00 mm do eixo da agulha, a amplitude é $20,0 \mu\text{m}$. Por analogia com a corda, tome $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ por unidade de volume e $I = v \langle u \rangle$, admitindo propagação localmente plana e desprezando correcções de campo próximo.

- a) Calcule v , $\langle u \rangle$ e I a 5,00 mm do eixo.
- b) Com a potência conservada através de cilindros coaxiais, calcule a amplitude e a intensidade a 20,0 mm do eixo.
- c) Que energia atravessa, em 0,100 s, uma área de $1,00 \text{ cm}^2$ perpendicular à propagação, a 5,00 mm do eixo? Quanto tempo demora a perturbação a percorrer 3,00 cm?

Exercício 7 — Junção de duas cordas

Duas cordas, com a mesma tensão $T = 50,0 \text{ N}$, estão unidas em $x = 0$. A da esquerda tem $\mu_1 = 2,00 \text{ g m}^{-1}$. Uma onda de 60,0 Hz e amplitude 4,00 mm chega pela esquerda; a onda reflectida

tem amplitude 1,60 mm e está invertida.

- a) Determine o coeficiente de reflexão, a razão Z_2/Z_1 e a densidade linear μ_2 .
- b) Calcule a amplitude transmitida e os comprimentos de onda nas duas cordas.
- c) Calcule as fracções de potência reflectida e transmitida, verifique a conservação da energia e calcule a potência média transmitida. Se a onda viesse pela corda da direita, o que mudaria no coeficiente de reflexão, no de transmissão e na fracção de potência transmitida?

Exercício 8 — Um sensor de corda vibrante

Um extensómetro de corda vibrante usa um fio de aço com $L = 0,150$ m e $\mu = 3,50 \times 10^{-4}$ kg m⁻¹, fixo nas duas extremidades. A frequência fundamental medida é 800 Hz.

- a) Determine a velocidade das ondas no fio e a tensão.
- b) Calcule as frequências do segundo e do terceiro modos e as posições dos nós do terceiro modo.
- c) Uma carga aumenta a tensão em 2,00 %, mantendo-se L e μ . Calcule a nova fundamental e a sua variação. Mostre que, para variações pequenas, $\Delta f/f \approx \frac{1}{2} \Delta T/T$.

Exercício 9 — Dois transdutores coerentes

Dois pequenos transdutores, em fase, emitem ultrassons de 1,50 MHz num tecido com $v = 1540$ m s⁻¹. Um ponto P está a $r_1 = 30,00$ mm do primeiro e a $r_2 = 31,54$ mm do segundo. Considere transdutores com a mesma constante de emissão, mantida ao variar a frequência, e ondas com a mesma direcção de oscilação em P . A amplitude de cada onda diminui como $1/r$; a do primeiro, em P , é 10,0 nm.

- a) Calcule λ , k e a diferença de fase entre as duas ondas em P . Que tipo de interferência ocorre?
- b) Calcule a amplitude de cada onda e a amplitude resultante em P , com $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi$.
- c) Que frequências, mais próximas de 1,50 MHz, dão interferência construtiva em P ? Qual seria então a amplitude resultante?

Exercício 10 — O som no dióxido de carbono

Considere o dióxido de carbono como um gás ideal, com $\gamma = 1,30$ e $M = 44,0$ g mol⁻¹, a $p_0 = 1,013 \times 10^5$ Pa e 273,15 K. Tome $R = 8,314$ J mol⁻¹ K⁻¹.

- a) Calcule a densidade do gás e os módulos de compressibilidade isotérmico e adiabático.
- b) Calcule a velocidade do som com as duas hipóteses. Qual está correcta, e porquê?
- c) A que temperatura teria o som no dióxido de carbono a velocidade que tem no ar a 273,15 K, 331 m s⁻¹?

Exercício 11 — Um pistão numa conduta

Um pistão, numa extremidade de uma conduta longa, oscila com amplitude de deslocamento $2,00\text{ }\mu\text{m}$ a 250 Hz e gera uma onda plana que avança no sentido $+x$. Ar: $\rho_0 = 1,20\text{ kg m}^{-3}$, $v = 343\text{ m s}^{-1}$, $p_0 = 1,013 \times 10^5\text{ Pa}$.

- Calcule a amplitude da velocidade das partículas e a amplitude da pressão acústica.
- Calcule a amplitude da variação de densidade e compare ρ'_m/ρ_0 e p_m/p_0 com 1.
- Num ponto fixo, o máximo de p' acontece antes ou depois do máximo de s , e com que diferença de tempo? Num instante fixo, a que distância de um máximo de s está o máximo de p' mais próximo, e de que lado?

Exercício 12 — A compressibilidade de um tecido

Num tecido mole, com $\rho = 1060\text{ kg m}^{-3}$, mede-se a velocidade do som $v = 1580\text{ m s}^{-1}$.

- Desprezando a rigidez ao corte, determine o módulo de compressibilidade do tecido.
- Que aumento de pressão reduziria o volume de uma porção de tecido em $0,100\%$? Exprima-o em atmosferas.
- Um ultrassom de $3,00\text{ MHz}$ tem amplitude de pressão $0,500\text{ MPa}$. Calcule as amplitudes do deslocamento e da velocidade das partículas, e ρ'_m/ρ .

Exercício 13 — Constantes elásticas a partir das ondas P e S

Numa amostra de granito com $\rho = 2650\text{ kg m}^{-3}$, medem-se $c_P = 5800\text{ m s}^{-1}$ e $c_S = 3350\text{ m s}^{-1}$.

- A partir de $c_S/c_P = \sqrt{(1 - 2\nu)/(2(1 + \nu))}$, determine o coeficiente de Poisson.
- Determine G , K e o módulo de Young $E = 2G(1 + \nu)$.
- Calcule a velocidade de uma onda longitudinal numa barra fina do mesmo granito e explique por que razão é menor do que c_P . Numa camada mais profunda detectam-se ondas P mas nunca ondas S. O que se conclui sobre essa camada?

Exercício 14 — Hidrofonos e o canal SOFAR

Uma explosão à superfície do mar é registada por um navio através da água ($v = 1500\text{ m s}^{-1}$) e, $9,00\text{ s}$ depois, através do ar ($v = 343\text{ m s}^{-1}$).

- A que distância está o navio?
- Quanto tempo demora cada sinal?
- Uma explosão no eixo do canal SOFAR é registada a 1000 km . Com $I_{\text{canal}} = P/(2\pi rh)$, $h = 1,00\text{ km}$, e $I_{\text{esfera}} = P/(4\pi r^2)$, sem perdas, calcule a razão das intensidades e a razão das amplitudes.

Exercício 15 — Ondas P e S num tecido mole

Num modelo de tecido mole, $\rho = 1050 \text{ kg m}^{-3}$, $K = 2,40 \text{ GPa}$ e $G = 3,00 \text{ kPa}$.

- a) Calcule $c_P = \sqrt{(K + \frac{4}{3}G)/\rho}$, $c_S = \sqrt{G/\rho}$ e a razão c_S/c_P .
- b) A partir de $K = E/(3(1 - 2\nu))$ e $G = E/(2(1 + \nu))$, mostre que $\nu = (3K - 2G)/(2(3K + G))$ e calcule ν . Comente.
- c) Uma lesão tem G quatro vezes maior, com os mesmos K e ρ . Calcule c_S na lesão e os tempos que uma onda S demora a atravessar $2,00 \text{ cm}$ no tecido e na lesão. Em que fracção muda c_P ? Por que razão a elastografia usa ondas S?