

Oscilações e Ondas

Aulas 7–11: exercícios — resoluções

Âmbito. Ondas planas, cilíndricas e esféricas; energia, fluxo e intensidade; condições de fronteira, ondas estacionárias e interferência; ondas mecânicas e som; propagação em diferentes meios.

Convenções. Use unidades SI e apresente os resultados numéricos com três algarismos significativos, sem arredondamentos intermédios. Os dados são nominais. k é o número de onda, ω a frequência angular, λ o comprimento de onda e v a velocidade de propagação. T é a tensão de uma corda; o período escreve-se $1/f$. $\langle \cdot \rangle$ indica a média temporal. Nas ondas sonoras, s é o deslocamento das partículas, p' a pressão acústica e ρ' a variação de densidade.

Os modelos biológicos são idealizações lineares de pequenas perturbações. Não é necessário recorrer a impedância acústica, reflexão de ondas sonoras, absorção, decibéis ou outros conteúdos posteriores.

Exercício 1 — Leitura de uma onda plana

Uma onda plana harmónica é descrita por

$$\psi(x, y, t) = (1,50 \text{ mm}) \cos [(3,00 \text{ rad m}^{-1}) x - (4,00 \text{ rad m}^{-1}) y - (1500 \text{ rad s}^{-1}) t].$$

- Determine o vector de onda, o seu módulo, o comprimento de onda e a velocidade de propagação. Indique a direcção e o sentido de propagação pelo ângulo com o eixo x .
- Calcule a velocidade com que a fase avança ao longo do eixo x e ao longo do eixo y . Explique por que razão os módulos de ambas são maiores do que v .
- Escreva a equação da frente de onda que passa pela origem em $t = 0$ e determine o instante em que essa frente atinge o ponto $(1,00 \text{ m}, -1,00 \text{ m}, 0)$.

Resolução.

a) $\vec{k} = (3,00, -4,00, 0) \text{ rad m}^{-1}$, $k = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,00 \text{ rad m}^{-1}$, $\lambda = 2\pi/k = 1,26 \text{ m}$, $v = \omega/k = 1500/5 = 300 \text{ m s}^{-1}$. A onda propaga-se segundo $\hat{n} = \vec{k}/k = (0,600, -0,800, 0)$, a $-53,1^\circ$ do eixo x (no sentido de $+x$ e de $-y$).

b) Ao longo de x ($y = 0$), a fase constante exige $3x = 1500t$: $dx/dt = \omega/k_x = 500 \text{ m s}^{-1}$. Ao longo de y ($x = 0$), $-4y = 1500t$: $dy/dt = \omega/k_y = -375 \text{ m s}^{-1}$, no sentido de $-y$. A frente avança $v \Delta t$ segundo $\hat{n}$; ao longo de um eixo que faz um ângulo α com $\hat{n}$, o ponto de intersecção desloca-se $v \Delta t / |\cos \alpha| > v \Delta t$. Não há nada a mover-se mais depressa do que v : é só a intersecção de um plano com uma recta.

c) A fase é nula na origem em $t = 0$; essa frente é o plano $3,00x - 4,00y = 1500t$ (SI). No ponto $(1, -1, 0)$, $3 + 4 = 7 = 1500t$, logo $t = 4,67 \text{ ms}$. (Confirmação: a distância do ponto ao plano inicial é $7/5 = 1,40 \text{ m}$ e $1,40/300 = 4,67 \text{ ms}$.)

Exercício 2 — Um conjunto de microfones

Um conjunto linear de microfones tem comprimento $\ell = 0,500 \text{ m}$ e capta um som de $2,00 \text{ kHz}$ vindo de uma fonte pontual. No ar, $v = 343 \text{ m s}^{-1}$.

- Com a fonte a $R = 10,0 \text{ m}$, à frente do centro do conjunto, calcule o afastamento s entre a frente de onda e um plano, nas pontas do conjunto, e o erro de fase correspondente.

- b) A partir de que distância R o erro de fase nas pontas é inferior a $\pi/8$?
- c) Dois microfones do conjunto estão a $d = 0,500$ m um do outro. Para uma onda plana que chega a $30,0^\circ$ da normal ao conjunto, calcule o atraso entre eles. Se o atraso for medido com uma incerteza de $10,0 \mu\text{s}$, com que incerteza se determina o ângulo?

Resolução.

a) $\lambda = \frac{343}{2000} = 0,172$ m, $k = 2\pi/\lambda = 36,6 \text{ rad m}^{-1}$. $s \approx \ell^2/(8R) = 0,25/80 = 3,13$ mm; $\Delta\Phi = ks = 0,115$ rad.

b) $\Delta\Phi = k\ell^2/(8R) < \pi/8 \Rightarrow R > k\ell^2/\pi = 36,6 \times 0,25/\pi = 2,92$ m.

c) $\Delta t = d \sin \theta / v = 0,5 \times 0,5 / 343 = 729 \mu\text{s}$. Derivando, $\delta t = (d \cos \theta / v) \delta \theta$: $\delta \theta = v \delta t / (d \cos \theta) = 343 \times 10^{-5} / (0,5 \times 0,866) = 7,92 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0,454^\circ$.

Exercício 3 — Uma pequena fonte esférica num tecido

Num modelo homogêneo e sem perdas de um tecido, uma pequena fonte emite ondas esféricas harmónicas de $50,0$ kHz, com $v = 1540 \text{ m s}^{-1}$. A $2,00$ cm da fonte, a amplitude é $30,0$ nm. Use um modelo escalar idealizado: ψ é uma grandeza escalar que obedece à equação de onda, sem correcções de campo próximo.

- a) Calcule λ , k e a amplitude a $5,00$ cm da fonte.
- b) Calcule a diferença de fase e o atraso de propagação entre esses dois pontos, situados no mesmo raio.
- c) Escreva $\psi(r, t) = (C/r) \cos(kr - \omega t)$, determine C e verifique por substituição que $r\psi$ satisfaz $\partial^2(r\psi)/\partial t^2 = v^2 \partial^2(r\psi)/\partial r^2$. A que distância a amplitude é 10 % da que existe a $2,00$ cm?

Resolução.

a) $\lambda = \frac{1540}{5,00 \times 10^4} = 30,8$ mm, $k = 204 \text{ rad m}^{-1}$. Numa onda esférica, $A \propto 1/r$: $A(5 \text{ cm}) = 30,0 \times 2/5 = 12,0$ nm.

b) $\Delta\phi = k \Delta r = 204 \times 0,0300 = 6,12$ rad (cerca de 0,974 períodos espaciais). $\Delta t = \Delta r / v = 19,5 \mu\text{s}$.

c) $C = A_1 r_1 = 30,0 \times 10^{-9} \times 0,0200 = 6,00 \times 10^{-10} \text{ m}^2$. Com $r\psi = C \cos(kr - \omega t)$: $\partial^2(r\psi)/\partial t^2 = -\omega^2 C \cos(\cdot)$ e $v^2 \partial^2(r\psi)/\partial r^2 = -v^2 k^2 C \cos(\cdot)$; são iguais porque $\omega = vk$. A amplitude cai para 10 % a $r = 10 r_1 = 20,0$ cm.

Exercício 4 — Energia numa corda

Uma corda com $\mu = 4,00 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ e tensão $T = 64,0$ N transporta uma onda harmónica progressiva de 100 Hz e amplitude $3,00$ mm.

- a) Calcule v , ω , k e a densidade média de energia $\langle u \rangle$.
- b) Calcule a potência média transportada e a energia que passa por um ponto da corda em $10,0$ s. Por que factor mudaria a potência média se a tensão duplicasse, mantendo a amplitude e a frequência?

- c) Mostre que, num dado ponto e instante, a densidade de energia cinética é igual à potencial. Onde é máxima a densidade de energia, e quanto vale aí?

Resolução.

a) $v = \sqrt{T/\mu} = \sqrt{64/0,004} = 126 \text{ m s}^{-1}$, $\omega = 2\pi \times 100 = 628 \text{ rad s}^{-1}$, $k = \omega/v = 4,97 \text{ rad m}^{-1}$.
 $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 0,004 \times 628^2 \times (3 \times 10^{-3})^2 = 7,11 \times 10^{-3} \text{ J m}^{-1}$.

b) $\langle P \rangle = v \langle u \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 = 0,899 \text{ W}$; em 10 s passam 8,99 J. Com A e ω fixos, $\langle P \rangle \propto \mu v = \sqrt{T\mu}$: duplicar a tensão multiplica a potência por $\sqrt{2} = 1,41$.

c) Para $y = f(x - vt)$, $\partial y / \partial t = -v \partial y / \partial x$, logo $\frac{1}{2} \mu (\partial_t y)^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 (\partial_x y)^2 = \frac{1}{2} T (\partial_x y)^2$, porque $\mu v^2 = T$. Então $u = \mu (\partial_t y)^2 = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$: é máxima onde $y = 0$ (velocidade e declive máximos), com $u_{\max} = \mu \omega^2 A^2 = 2 \langle u \rangle = 1,42 \times 10^{-2} \text{ J m}^{-1}$, e nula nas cristas.

Exercício 5 — Medir a potência de uma fonte

Um sensor de área $2,00 \text{ cm}^2$, a $3,00 \text{ m}$ de uma fonte que emite igualmente em todas as direcções, com a normal virada para a fonte, mede uma potência de $4,00 \mu\text{W}$. Despreze perdas.

- Calcule a intensidade no sensor e a potência da fonte.
- Que potência mede o sensor se a sua normal fizer $60,0^\circ$ com a direcção da fonte?
- A que distância, com a normal virada para a fonte, mediria $1,00 \mu\text{W}$? Qual é aí a razão entre a amplitude da onda e a amplitude a $3,00 \text{ m}$?

Resolução.

a) $I = \frac{P_s}{A_s} = \frac{4,00 \times 10^{-6}}{2,00 \times 10^{-4}} = 0,0200 \text{ W m}^{-2}$; $P = 4\pi r^2 I = 4\pi \times 9 \times 0,02 = 2,26 \text{ W}$.

b) $P = I A_s \cos \theta = 0,02 \times 2 \times 10^{-4} \times 0,5 = 2,00 \mu\text{W}$.

c) $I \propto 1/r^2$: para um quarto da potência, r duplica: $6,00 \text{ m}$. Como $I \propto A^2$, a amplitude cai para metade: a razão é $0,500$.

Exercício 6 — Ondas de corte geradas por uma agulha

Em elastografia, uma agulha vibrante gera ondas de corte cilíndricas num tecido com $\rho = 1050 \text{ kg m}^{-3}$ e módulo de corte $G = 4,20 \text{ kPa}$, com $v = \sqrt{G/\rho}$. A frequência é 200 Hz e, a $5,00 \text{ mm}$ do eixo da agulha, a amplitude é $20,0 \mu\text{m}$. Por analogia com a corda, tome $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ por unidade de volume e $I = v \langle u \rangle$, admitindo propagação localmente plana e desprezando correcções de campo próximo.

- Calcule v , $\langle u \rangle$ e I a $5,00 \text{ mm}$ do eixo.
- Com a potência conservada através de cilindros coaxiais, calcule a amplitude e a intensidade a $20,0 \text{ mm}$ do eixo.
- Que energia atravessa, em $0,100 \text{ s}$, uma área de $1,00 \text{ cm}^2$ perpendicular à propagação, a $5,00 \text{ mm}$ do eixo? Quanto tempo demora a perturbação a percorrer $3,00 \text{ cm}$?

Resolução.

a) $v = \sqrt{4200/1050} = 2,00 \text{ m s}^{-1}$, $\omega = 1,26 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$. $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \times 1050 \times (1257)^2 \times (20 \times 10^{-6})^2 = 0,332 \text{ J m}^{-3}$; $I = v \langle u \rangle = 0,663 \text{ W m}^{-2}$.

b) Com r a distância ao eixo, a potência atravessa cilindros de área $2\pi rL$: $I \propto 1/r$ e $A \propto 1/\sqrt{r}$ (aproximação localmente plana; aqui $\lambda = v/f = 10,0 \text{ mm}$, comparável às distâncias, pelo que é só uma estimativa). A 20 mm , $A = 20\sqrt{5/20} = 10,0 \mu\text{m}$ e $I = 0,663/4 = 0,166 \text{ W m}^{-2}$.

c) $E = I A \Delta t = 0,663 \times 1 \times 10^{-4} \times 0,1 = 6,63 \times 10^{-6} \text{ J}$. Tempo: $0,03/2 = 15,0 \text{ ms}$.

Exercício 7 — Junção de duas cordas

Duas cordas, com a mesma tensão $T = 50,0 \text{ N}$, estão unidas em $x = 0$. A da esquerda tem $\mu_1 = 2,00 \text{ g m}^{-1}$. Uma onda de $60,0 \text{ Hz}$ e amplitude $4,00 \text{ mm}$ chega pela esquerda; a onda reflectida tem amplitude $1,60 \text{ mm}$ e está invertida.

- Determine o coeficiente de reflexão, a razão Z_2/Z_1 e a densidade linear μ_2 .
- Calcule a amplitude transmitida e os comprimentos de onda nas duas cordas.
- Calcule as fracções de potência reflectida e transmitida, verifique a conservação da energia e calcule a potência média transmitida. Se a onda viesse pela corda da direita, o que mudaria no coeficiente de reflexão, no de transmissão e na fracção de potência transmitida?

Resolução.

a) $r = A_r/A_i = -1,60/4,00 = -0,400$. De $r = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2)$: $Z_2/Z_1 = (1 - r)/(1 + r) = 1,4/0,6 = 2,33$. Com a mesma tensão, $Z = \sqrt{T\mu}$, logo $\mu_2 = \mu_1(Z_2/Z_1)^2 = 2,00 \times 5,44 = 10,9 \text{ g m}^{-1}$.

b) $t = 2Z_1/(Z_1 + Z_2) = 1 + r = 0,600$: $A_t = 2,40 \text{ mm}$, sem inversão. $v_1 = \sqrt{50/0,002} = 158 \text{ m s}^{-1}$, $\lambda_1 = v_1/f = 2,64 \text{ m}$; $v_2 = v_1/2,33 = 67,8 \text{ m s}^{-1}$, $\lambda_2 = 1,13 \text{ m}$.

c) $R = r^2 = 0,160$, $T = (Z_2/Z_1)t^2 = 2,33 \times 0,36 = 0,840$, e $R + T = 1$. $Z_1 = \mu_1 v_1 = 0,316 \text{ kg s}^{-1}$; $\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_i^2 = \frac{1}{2} \times 0,316 \times (377)^2 \times (4 \times 10^{-3})^2 = 0,360 \text{ W}$; transmitida, $0,84 \times 0,360 = 0,302 \text{ W}$. Vindo da direita, Z_1 e Z_2 trocam de papel: $r' = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1) = +0,400$ (sem inversão) e $t' = 1 + r' = 1,40$; a fracção transmitida, $(Z_1/Z_2)t'^2 = 1,96/2,33 = 0,840$, é a mesma: não depende do sentido.

Exercício 8 — Um sensor de corda vibrante

Um extensómetro de corda vibrante usa um fio de aço com $L = 0,150 \text{ m}$ e $\mu = 3,50 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-1}$, fixo nas duas extremidades. A frequência fundamental medida é 800 Hz .

- Determine a velocidade das ondas no fio e a tensão.
- Calcule as frequências do segundo e do terceiro modos e as posições dos nós do terceiro modo.
- Uma carga aumenta a tensão em $2,00\%$, mantendo-se L e μ . Calcule a nova fundamental e a sua variação. Mostre que, para variações pequenas, $\Delta f/f \approx \frac{1}{2} \Delta T/T$.

Resolução.

- a) Fundamental de uma corda fixa: $\lambda_1 = 2L$, $v = 2Lf_1 = 2 \times 0,15 \times 800 = 240 \text{ m s}^{-1}$; $T = \mu v^2 = 3,5 \times 10^{-4} \times 240^2 = 20,2 \text{ N}$.
- b) $f_n = nf_1$: $f_2 = 1600 \text{ Hz}$, $f_3 = 2400 \text{ Hz}$. O terceiro modo tem $\lambda_3 = 2L/3 = 0,100 \text{ m}$; nós a $x = 0, 5,00 \text{ cm}, 10,0 \text{ cm}$ e $15,0 \text{ cm}$.
- c) Com L e μ fixos, $f \propto \sqrt{T}$: $f' = 800\sqrt{1,02} = 808 \text{ Hz}$, $\Delta f = 7,96 \text{ Hz}$. Com $f = \frac{1}{2L}\sqrt{T/\mu}$, $\ln f = \frac{1}{2} \ln T + \text{const}$, logo $\Delta f/f \approx \frac{1}{2} \Delta T/T$: 1,00 % (exacto: 0,995 %).

Exercício 9 — Dois transdutores coerentes

Dois pequenos transdutores, em fase, emitem ultrassons de 1,50 MHz num tecido com $v = 1540 \text{ m s}^{-1}$. Um ponto P está a $r_1 = 30,00 \text{ mm}$ do primeiro e a $r_2 = 31,54 \text{ mm}$ do segundo. Considere transdutores com a mesma constante de emissão, mantida ao variar a frequência, e ondas com a mesma direcção de oscilação em P . A amplitude de cada onda diminui como $1/r$; a do primeiro, em P , é 10,0 nm.

- a) Calcule λ , k e a diferença de fase entre as duas ondas em P . Que tipo de interferência ocorre?
- b) Calcule a amplitude de cada onda e a amplitude resultante em P , com $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi$.
- c) Que frequências, mais próximas de 1,50 MHz, dão interferência construtiva em P ? Qual seria então a amplitude resultante?

Resolução.

- a) $\lambda = \frac{1540}{1,50 \times 10^6} = 1,03 \text{ mm}$, $k = 6,12 \times 10^3 \text{ rad m}^{-1}$. $\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = 6,12 \times 10^3 \times 1,54 \times 10^{-3} = 9,42 \text{ rad} = 3\pi$: interferência destrutiva ($\Delta r = \frac{3}{2}\lambda$).
- b) $A_2 = A_1 r_1 / r_2 = 10,0 \times 30,00 / 31,54 = 9,51 \text{ nm}$. Com $\cos \Delta\phi = -1$: $A = A_1 - A_2 = 0,488 \text{ nm}$. A anulação não é completa porque as amplitudes não são iguais.
- c) Construtiva quando $\Delta r = n\lambda$, ou seja, $f = nv/\Delta r = n \times 1,00 \text{ MHz}$: as mais próximas são 1,00 MHz e 2,00 MHz. Com a mesma constante de emissão a qualquer frequência, as amplitudes mantêm-se: $A = A_1 + A_2 = 19,5 \text{ nm}$.

Exercício 10 — O som no dióxido de carbono

Considere o dióxido de carbono como um gás ideal, com $\gamma = 1,30$ e $M = 44,0 \text{ g mol}^{-1}$, a $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $273,15 \text{ K}$. Tome $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

- a) Calcule a densidade do gás e os módulos de compressibilidade isotérmico e adiabático.
- b) Calcule a velocidade do som com as duas hipóteses. Qual está correcta, e porquê?
- c) A que temperatura teria o som no dióxido de carbono a velocidade que tem no ar a $273,15 \text{ K}$, 331 m s^{-1} ?

Resolução.

- a) $\rho_0 = p_0 M / (RT) = 1,013 \times 10^5 \times 0,044 / (8,314 \times 273,15) = 1,96 \text{ kg m}^{-3}$. $K_T = p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$; $K_S = \gamma p_0 = 1,32 \times 10^5 \text{ Pa}$.
- b) $v_N = \sqrt{K_T / \rho_0} = 227 \text{ m s}^{-1}$; $v = \sqrt{K_S / \rho_0} = \sqrt{\gamma} v_N = 259 \text{ m s}^{-1}$. A correcta é a adiabática: num período, o calor não tem tempo de passar das compressões para as rarefacções.
- c) $v \propto \sqrt{T}$: $T = 273,15 \times (331/259)^2 = 446 \text{ K}$, cerca de 173°C .

Exercício 11 — Um pistão numa conduta

Um pistão, numa extremidade de uma conduta longa, oscila com amplitude de deslocamento $2,00 \mu\text{m}$ a 250 Hz e gera uma onda plana que avança no sentido $+x$. Ar: $\rho_0 = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$, $v = 343 \text{ m s}^{-1}$, $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

- a) Calcule a amplitude da velocidade das partículas e a amplitude da pressão acústica.
- b) Calcule a amplitude da variação de densidade e compare ρ'_m / ρ_0 e p_m / p_0 com 1.
- c) Num ponto fixo, o máximo de p' acontece antes ou depois do máximo de s , e com que diferença de tempo? Num instante fixo, a que distância de um máximo de s está o máximo de p' mais próximo, e de que lado?

Resolução.

- a) $\omega = 2\pi \times 250 = 1,57 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$; $(\partial s / \partial t)_m = \omega s_m = 3,14 \text{ mm s}^{-1}$. $p_m = \rho_0 v \omega s_m = 1,20 \times 343 \times 3,14 \times 10^{-3} = 1,29 \text{ Pa}$.
- b) $\rho'_m = p_m / v^2 = 1,10 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-3}$; $\rho'_m / \rho_0 = 9,16 \times 10^{-6}$ e $p_m / p_0 = 1,28 \times 10^{-5}$: ambos muito menores do que 1, a aproximação linear é excelente.
- c) Com $s = s_m \cos(kx - \omega t)$, $p' = \rho_0 v \omega s_m \sin(kx - \omega t)$: p' é máxima quando a fase é $\pi/2$ e s quando é 0. Num ponto fixo, a fase diminui com o tempo, por isso o máximo de p' acontece primeiro, um quarto de período antes: $1,00 \text{ ms}$. Num instante fixo, o máximo de p' está $\lambda/4 = 0,343 \text{ m}$ à frente (no sentido $+x$) do máximo de s .

Exercício 12 — A compressibilidade de um tecido

Num tecido mole, com $\rho = 1060 \text{ kg m}^{-3}$, mede-se a velocidade do som $v = 1580 \text{ m s}^{-1}$.

- a) Desprezando a rigidez ao corte, determine o módulo de compressibilidade do tecido.
- b) Que aumento de pressão reduziria o volume de uma porção de tecido em $0,100 \%$? Exprima-o em atmosferas.
- c) Um ultrassom de $3,00 \text{ MHz}$ tem amplitude de pressão $0,500 \text{ MPa}$. Calcule as amplitudes do deslocamento e da velocidade das partículas, e ρ'_m / ρ .

Resolução.

- a) Sem rigidez ao corte, $v = \sqrt{K/\rho}$: $K = \rho v^2 = 1060 \times 1580^2 = 2,65 \times 10^9 \text{ Pa}$. (Num sólido, seria $\rho v^2 = K + \frac{4}{3}G$.)
- b) $\Delta p = K |\Delta V|/V = 2,65 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-3} = 2,65 \times 10^6 \text{ Pa} \approx 26,1 \text{ atm}$.
- c) $\omega = 1,88 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1}$. $s_m = p_m/(\rho v \omega) = 5 \times 10^5/(1060 \times 1580 \times 1,885 \times 10^7) = 15,8 \text{ nm}$; $(\partial s/\partial t)_m = p_m/(\rho v) = 0,299 \text{ m s}^{-1}$; $\rho'_m/\rho = p_m/(\rho v^2) = p_m/K = 1,89 \times 10^{-4}$.

Exercício 13 — Constantes elásticas a partir das ondas P e S

Numa amostra de granito com $\rho = 2650 \text{ kg m}^{-3}$, medem-se $c_P = 5800 \text{ m s}^{-1}$ e $c_S = 3350 \text{ m s}^{-1}$.

- a) A partir de $c_S/c_P = \sqrt{(1-2\nu)/(2(1-\nu))}$, determine o coeficiente de Poisson.
- b) Determine G , K e o módulo de Young $E = 2G(1+\nu)$.
- c) Calcule a velocidade de uma onda longitudinal numa barra fina do mesmo granito e explique por que razão é menor do que c_P . Numa camada mais profunda detectam-se ondas P mas nunca ondas S. O que se conclui sobre essa camada?

Resolução.

- a) $c_S/c_P = 0,578$, $(c_S/c_P)^2 = 0,334$. De $r^2(2-2\nu) = 1-2\nu$: $\nu = (1-2r^2)/(2-2r^2) = 0,250$.
- b) $G = \rho c_S^2 = 2,97 \times 10^{10} \text{ Pa}$. Como $c_P^2 = (K + \frac{4}{3}G)/\rho$: $K = \rho c_P^2 - \frac{4}{3}G = 8,91 \times 10^{10} - 3,97 \times 10^{10} = 4,95 \times 10^{10} \text{ Pa}$. $E = 2G(1+\nu) = 7,43 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- c) $v_{\text{barra}} = \sqrt{E/\rho} = 5300 \text{ m s}^{-1} < c_P$. Numa barra fina, a secção pode contrair-se e dilatar lateralmente, o que torna o meio mais «mole»; num bloco grande, a deformação lateral está impedida pelo material à volta, e a rigidez efectiva é $K + \frac{4}{3}G > E$. Se as ondas S não passam, $c_S = \sqrt{G/\rho} = 0$: a camada não resiste ao corte, $G = 0$, é líquida. As ondas P passam porque dependem também de K . (É assim que se sabe que o núcleo externo da Terra é líquido.)

Exercício 14 — Hidrofonos e o canal SOFAR

Uma explosão à superfície do mar é registada por um navio através da água ($v = 1500 \text{ m s}^{-1}$) e, 9,00 s depois, através do ar ($v = 343 \text{ m s}^{-1}$).

- a) A que distância está o navio?
- b) Quanto tempo demora cada sinal?
- c) Uma explosão no eixo do canal SOFAR é registada a 1000 km. Com $I_{\text{canal}} = P/(2\pi r h)$, $h = 1,00 \text{ km}$, e $I_{\text{esfera}} = P/(4\pi r^2)$, sem perdas, calcule a razão das intensidades e a razão das amplitudes.

Resolução.

- a) $d/v_{\text{ar}} - d/v_{\text{água}} = \Delta t \Rightarrow d = 9,00/(1/343 - 1/1500) = 4,00 \text{ km}$.
- b) Pela água, $4002/1500 = 2,67 \text{ s}$; pelo ar, $4002/343 = 11,7 \text{ s}$.
- c) $I_{\text{canal}}/I_{\text{esfera}} = 2r/h = 2 \times 1 \times 10^6/1 \times 10^3 = 2,00 \times 10^3$. Como $I \propto A^2$, a razão das amplitudes é $\sqrt{2000} = 44,7$.

Exercício 15 — Ondas P e S num tecido mole

Num modelo de tecido mole, $\rho = 1050 \text{ kg m}^{-3}$, $K = 2,40 \text{ GPa}$ e $G = 3,00 \text{ kPa}$.

- a) Calcule $c_P = \sqrt{(K + \frac{4}{3}G)/\rho}$, $c_S = \sqrt{G/\rho}$ e a razão c_S/c_P .
- b) A partir de $K = E/(3(1-2\nu))$ e $G = E/(2(1+\nu))$, mostre que $\nu = (3K - 2G)/(2(3K + G))$ e calcule ν . Comente.
- c) Uma lesão tem G quatro vezes maior, com os mesmos K e ρ . Calcule c_S na lesão e os tempos que uma onda S demora a atravessar 2,00 cm no tecido e na lesão. Em que fracção muda c_P ? Por que razão a elastografia usa ondas S?

Resolução.

- a) $c_P = \sqrt{(2,4 \times 10^9 + 4000)/1050} = 1510 \text{ m s}^{-1}$; $c_S = \sqrt{3000/1050} = 1,69 \text{ m s}^{-1}$; $c_S/c_P = 1,12 \times 10^{-3}$.
- b) Eliminando E : $3K(1-2\nu) = 2G(1+\nu)$, logo $3K - 2G = \nu(6K + 2G)$ e $\nu = (3K - 2G)/(2(3K + G))$. Numericamente, $\nu = 0,499\,999\,4$: o tecido é quase incompressível em comparação com a sua rigidez ao corte ($K/G \approx 8 \times 10^5$), como um líquido com uma pequena rigidez.
- c) Com K e ρ iguais e $4G$, c_S duplica: $3,38 \text{ m s}^{-1}$. Tempos em 2 cm: 11,8 ms no tecido e 5,92 ms na lesão. c_P quase não muda: $\sqrt{(K + \frac{16}{3}G)/(K + \frac{4}{3}G)} - 1 = 2,5 \times 10^{-6}$. A elastografia usa ondas S porque c_S depende só de G , que muda muito com a doença, enquanto c_P é dominada por K , quase igual em todos os tecidos moles.