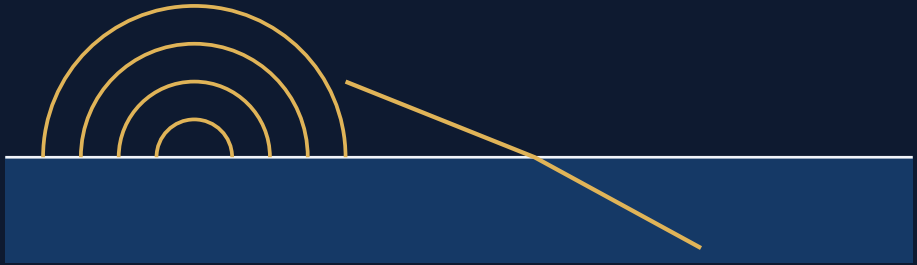
Princípios de Fermat e de Huygens

De onde vêm as leis da reflexão e da refracção

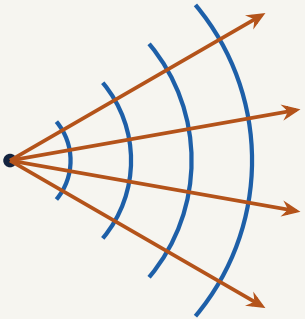


Três perguntas

- Porque é que um nadador-salvador não corre em linha recta até ao banhista?
- Porque é que, num dia quente, a estrada parece molhada ao longe?
- Porque é que ainda vemos o Sol quando ele já se pôs?

O que vamos precisar
Da óptica

- Num meio de índice n, a luz tem velocidade $v = c/n$.
- Uma **frente de onda** une pontos com a mesma fase.
- Os **raios** são perpendiculares às frentes e indicam a direcção de propagação.



frentes (azul) e raios

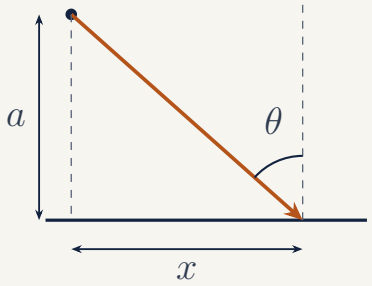
O que vamos precisar
Da matemática

Num mínimo, a derivada é nula.
Vamos derivar distâncias:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+a^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Na figura, esta fracção é um seno:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin\theta$$



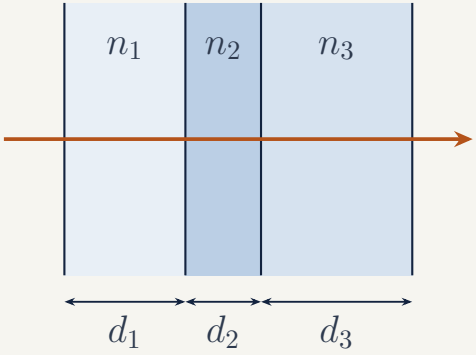
Caminho óptico

Meios em camadas

A luz atravessa camadas de espessura d_i e índice n_i. Em cada uma, $v_i = c/n_i$:

$$t = \sum_i \frac{d_i}{v_i} = \frac{1}{c} \sum_i n_i d_i$$

$$L = \sum_i n_i d_i, \qquad t = \frac{L}{c}$$



Caminho óptico

O que significa

L é a distância que a luz percorreria no vazio no mesmo tempo.

Exemplo: $1{,}0$ cm de vidro ($n = 1{,}52$) e $2{,}0$ cm de água ($n = 1{,}33$):

$$L = 1{,}52 \times 1{,}0 + 1{,}33 \times 2{,}0 = 4{,}18 \text{ cm}$$

Se n varia, a soma passa a integral ao longo do raio:

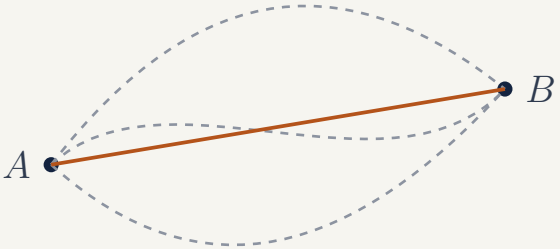
$$L = \int n \, \mathrm{d}s$$

FERMAT

Princípio de Fermat

De todos os caminhos de A para B, a luz segue aquele em que L, e portanto o tempo, é **estacionário**: não muda para pequenos desvios.

Quase sempre é um mínimo. Num meio homogéneo, $L = n\times$ comprimento: o mínimo é a recta.



Laranja: o caminho real; tracejado: caminhos vizinhos, mais longos.

Reflexão por Fermat

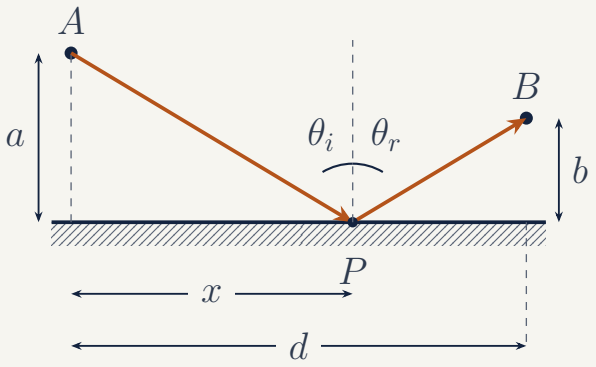
O caminho

A luz vai de A a B passando pelo espelho num ponto P:

$$L(x) = n\,(AP + PB)$$

com $AP = \sqrt{x^2 + a^2}$ e $PB = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$.

Procuramos o x que torna L mínimo.



Reflexão por Fermat

O mínimo

Derivando cada raiz:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = n\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}\right] = 0$$

Como vimos no início, cada fracção é o seno de um ângulo com a normal:

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r \;\Rightarrow\; \theta_i = \theta_r$$

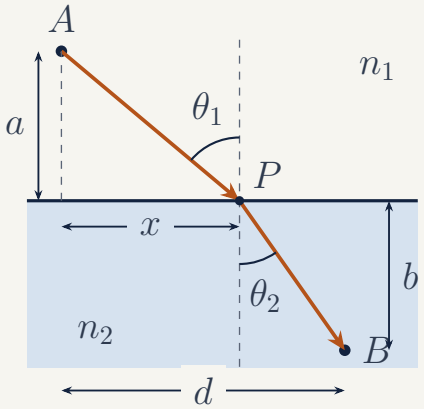
Sair do plano de incidência só alonga o caminho.

Refracção por Fermat
O tempo

A está no meio 1 e B no meio 2, com $n_2 > n_1$. Cada troço tem a sua velocidade:

$$t(x) = \frac{AP}{v_1} + \frac{PB}{v_2}$$

com $AP = \sqrt{x^2 + a^2}$ e $PB = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$, como na reflexão.



Refracção por Fermat

A lei de Snell

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2} = 0$$

Multiplicando por c e usando $c/v = n$:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

É a **lei de Snell**. Passando para um meio de n maior, o raio aproxima-se da normal, como na figura anterior.

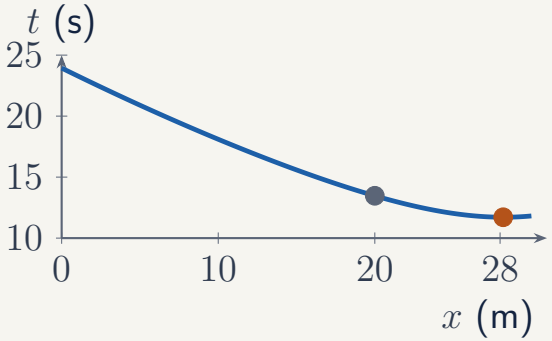
FERMAT

O nadador-salvador

Porque é que um nadador-salvador não corre em linha recta até ao banhista?

Corre a $7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e nada a $1{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Está a $20\,\mathrm{m}$ da água; o banhista, a $10\,\mathrm{m}$ da margem e $30\,\mathrm{m}$ ao lado.

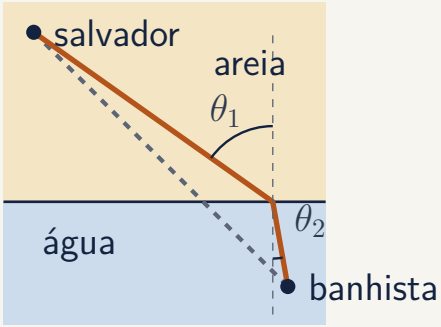
O tempo é mínimo entrando na água em $x = 28\,\mathrm{m}$.



RESPOSTA

Porque não em linha recta

Porque é que um nadador-salvador não corre em linha recta até ao banhista?



Linha recta: $13{,}5\,\text{s}$.
Melhor caminho: $11{,}7\,\text{s}$. Corre mais na areia e nada menos.

Onde entra na água, é a lei de Snell:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{0{,}816}{7} = \frac{0{,}175}{1{,}5} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

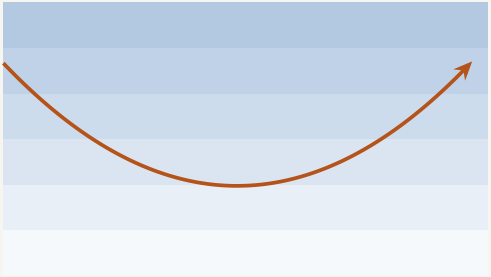
FERMAT

Quando n varia aos poucos

Divide-se o meio em camadas finas. Em cada fronteira, a lei de Snell desvia um pouco o raio.

O raio vai encurvando: a curva é côncava para o lado de n maior.

Pelo lado de n menor, a luz é mais rápida: o caminho de menor tempo passa por lá.



Mais escuro: n maior.

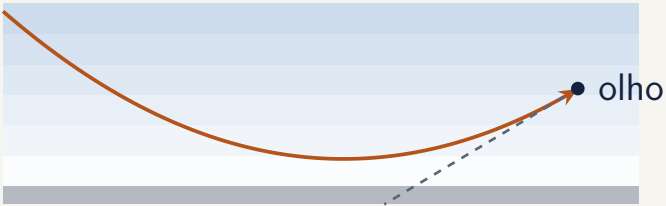
FERMAT

A miragem

Porque é que, num dia quente, a estrada parece molhada ao longe?

Junto ao asfalto quente o ar é menos denso: n é menor.

Um raio do céu desce, curva-se para cima e chega ao olho vindo de baixo.



Tracejado: de onde o olho julga que vem a luz.

RESPOSTA

A estrada molhada

Porque é que, num dia quente, a estrada parece molhada ao longe?

- O ar junto ao asfalto é mais quente, menos denso, e tem n um pouco menor.
- A luz do céu, a descer quase rasante, encurva-se para cima nessa camada.
- O olho prolonga o raio em linha recta: vê no chão uma imagem do céu, a tremer. Parece água.

Só funciona com raios quase rasantes: por isso só se vê ao longe.

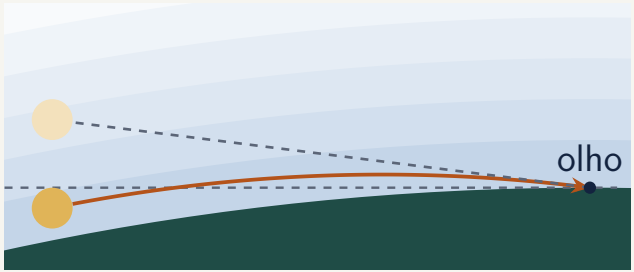
FERMAT

O pôr do Sol

Porque é que ainda vemos o Sol quando ele já se pôs?

Perto do chão, o ar é mais denso: n é maior em baixo.

O raio do Sol encurva-se para baixo, para o lado de n maior, e chega ao olho vindo de mais alto.



Tracejado horizontal: o horizonte. Claro: onde o Sol parece estar.

RESPOSTA

O Sol depois de se pôr

Porque é que ainda vemos o Sol quando ele já se pôs?

- A atmosfera desvia a luz do Sol para baixo: vemo-lo mais alto do que está.
- No horizonte, o desvio é de cerca de $0{,}6°$, mais do que o diâmetro do Sol, $0{,}5°$.
- Quando o Sol parece tocar no horizonte, já está todo abaixo dele.

O dia fica alguns minutos mais longo, de manhã e ao fim da tarde.

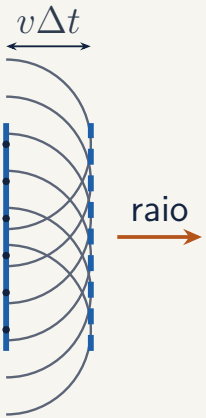
HUYGENS

Princípio de Huygens

Cada ponto de uma frente de onda é fonte de uma **onda secundária**, que se propaga com a velocidade v do meio.

Ao fim de Δt, cada onda secundária tem raio $v\,\Delta t$.

A nova frente (tracejado) é a linha que toca todas as ondas secundárias.



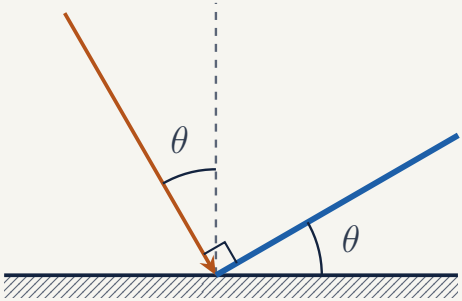
HUYGENS

Frente e raio: o mesmo ângulo

O raio (laranja) é perpendicular à frente (azul). A normal (tracejado) é perpendicular à superfície.

Rodando o raio e a normal de $90°$, obtêm-se a frente e a superfície. Por isso:

o ângulo da frente com a superfície é igual ao ângulo do raio com a normal.

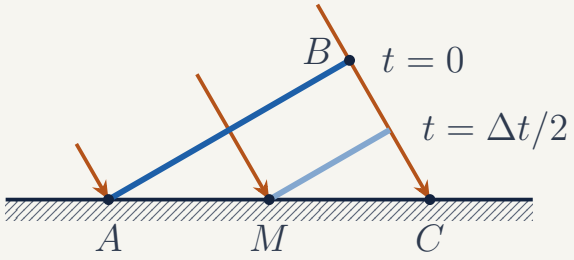


Reflexão segundo Huygens

A frente chega ao espelho

A frente AB chega inclinada: os seus pontos tocam o espelho em instantes diferentes.

Primeiro A, em $t = 0$; depois M, em $\Delta t/2$; por fim C, em Δt, quando chega o ponto que estava em B.



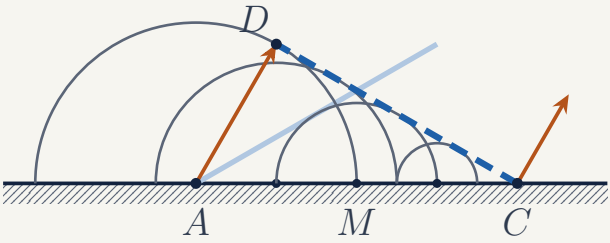
Reflexão segundo Huygens

A frente reflectida

Cada ponto, ao tocar o espelho, emite uma onda secundária.

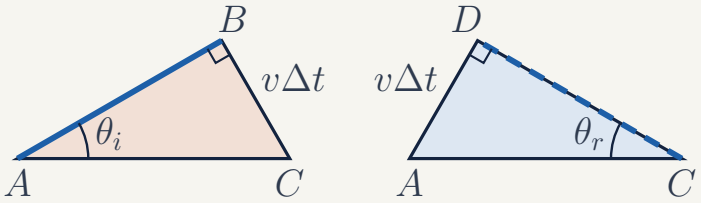
Em $t = \Delta t$, a de A tem raio $v\Delta t$, a de M só $v\Delta t/2$ e a de C ainda não começou.

A recta que toca todas, CD, é a frente reflectida.



Reflexão segundo Huygens

Os ângulos



Os triângulos ABC e CDA são rectângulos, partilham a hipotenusa AC e têm um cateto igual, $v\Delta t$: são iguais.

As frentes fazem com o espelho o mesmo ângulo: $\theta_i = \theta_r$. São também os ângulos dos raios com a normal.

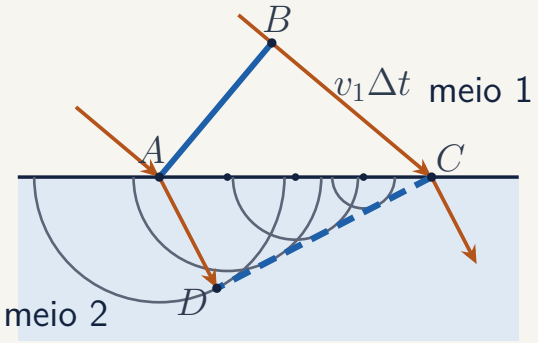
Refracção segundo Huygens

A frente refractada

A mesma construção, mas as ondas secundárias entram no meio 2, onde $v_2 < v_1$.

Enquanto B avança $v_1 \Delta t$ até C, a onda de A só cresce $v_2 \Delta t$.

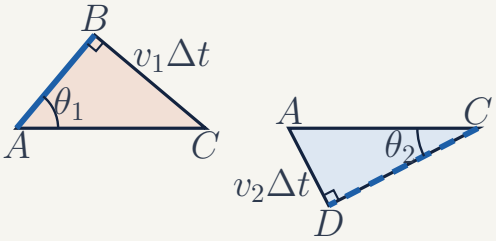
A frente CD fica mais inclinada: o raio aproxima-se da normal.



Refracção segundo Huygens
A lei de Snell

$$\sin\theta_1 = \frac{v_1 \Delta t}{AC}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{v_2 \Delta t}{AC}$$



Dividindo, AC e Δt desaparecem:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \Rightarrow n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

SÍNTESE

Fermat e Huygens

	Fermat	**Huygens**
olha para	o caminho, raio a raio	a frente de onda
princípio	L estacionário	ondas secundárias
dá	reflexão e Snell	reflexão e Snell
índice variável	raio curvo	frente que roda

Duas descrições da mesma física: os raios são perpendiculares às frentes.

Fermat e a mecânica

O mesmo princípio

Uma partícula de energia E num potencial V tem momento

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m\,(E - V)}$$

A trajectória torna $\int p \, \mathrm{d}s$ estacionário (**Maupertuis**): é a mecânica de Lagrange com E fixa.

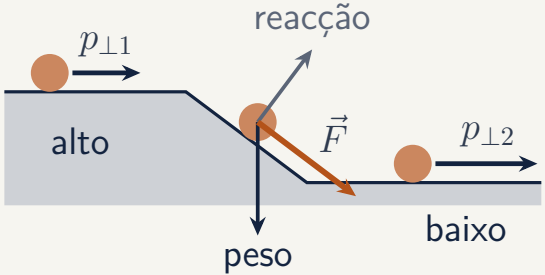
$$\delta \int n \, \mathrm{d}s = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \delta \int p \, \mathrm{d}s = 0, \qquad n \leftrightarrow p$$

Fermat e a mecânica
Uma bola numa rampa

Uma bola rola de um patamar alto para um baixo, por uma rampa.

Na rampa, o peso e a reacção somam-se numa força $\vec{F}$ ao longo da descida.

De lado só se vê $p_\perp$, a componente perpendicular à borda: a rampa aumenta-a.



Vista de lado, perpendicular à borda.

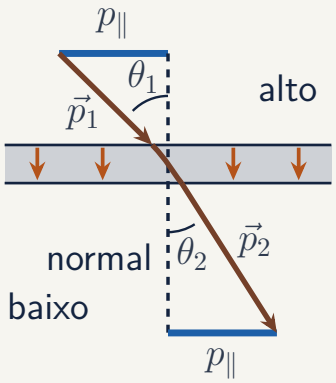
Fermat e a mecânica
Snell e o momento

θ: ângulo entre a bola e a normal à borda (tracejado). Então $p_\parallel = p \sin\theta$.

$\vec{F}$ é perpendicular à borda: $p_\parallel$ conserva-se.

$$p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2$$

Lei de Snell, com p no lugar de n.



Vista de cima.

Fermat e a mecânica

A acção mínima

- 1662, Fermat: a luz torna $\int n \, \mathrm{d}s$ estacionário.
- 1744, Maupertuis e Euler: as partículas tornam $\int p \, \mathrm{d}s$ estacionário.
- 1788, Lagrange, *Mecânica Analítica*: toda a mecânica a partir de um princípio.
- 1834, Hamilton, que começou pela óptica: a **acção** S é estacionária.

$$S = \int (T - V) \, \mathrm{d}t, \qquad \delta S = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

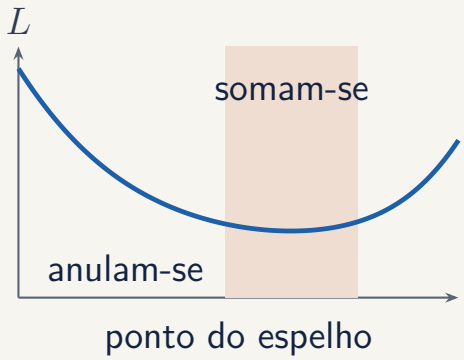
As leis de Newton saem de um princípio como o de Fermat.

Fermat e a mecânica
A soma sobre histórias

Feynman (1948): a luz segue **todos** os caminhos, cada um com fase $2\pi L/\lambda$.

Longe do mínimo, L varia depressa: as contribuições anulam-se. Junto ao mínimo, quase não varia: somam-se.

Com $\lambda \to 0$, só resta o caminho de Fermat. Para partículas, a fase é $S/\hbar$.



De A a B, reflectido no espelho.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma lâmpada está $1{,}0\,\mathrm{m}$ acima da água de um aquário ($n = 1{,}333$); um peixe está $0{,}50\,\mathrm{m}$ abaixo da superfície e $2{,}0\,\mathrm{m}$ ao lado.

(a) Escreva o caminho óptico $L(x)$ em função do ponto de travessia.

(b) Mostre que a condição de mínimo é a lei de Snell.

(c) Verifique que a luz cruza a superfície em $x = 1{,}59\,\mathrm{m}$.

(d) Porque não segue a luz a linha recta, que cruza em $x = 1{,}33\,\mathrm{m}$?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) Com x medido a partir da vertical da lâmpada:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 1{,}0^2} + 1{,}333\sqrt{(2{,}0 - x)^2 + 0{,}50^2}$$

(b) Derivando, como na refracção:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \sin\theta_1 - 1{,}333\,\sin\theta_2 = 0$$

O mínimo de L é o ponto onde se verifica a lei de Snell.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(c) Em $x = 1{,}59\,\text{m}$:

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}59}{\sqrt{1{,}59^2 + 1{,}0^2}} = 0{,}846$$

$$1{,}333\,\sin\theta_2 = \frac{1{,}333 \times 0{,}41}{\sqrt{0{,}41^2 + 0{,}50^2}} = 0{,}846$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) A recta é mais curta, mas tem $0{,}83\,\text{m}$ de água, contra $0{,}65\,\text{m}$. Na água, cada metro conta $1{,}333$: compensa andar mais no ar.

$$L_{\text{recta}} = 2{,}778\,\text{m} > L_{\text{real}} = 2{,}740\,\text{m}$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Um feixe laser de $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$ atravessa, na perpendicular, uma janela de vidro com $4{,}0\,\text{mm}$ de espessura e $n = 1{,}52$.

(a) Qual é o caminho óptico dentro do vidro?

(b) Atraso em relação ao ar, em caminho óptico e em tempo.

(c) Esse atraso em comprimentos de onda.

(d) Espessura para um atraso de meio comprimento de onda.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $L = n\,e = 1{,}52 \times 4{,}0\,\text{mm} = 6{,}08\,\text{mm}$

(b) Sem vidro, o mesmo troço teria $L = 4{,}0\,\text{mm}$:

$$\Delta L = (n-1)\,e = 0{,}52 \times 4{,}0 = 2{,}08\,\text{mm}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{c} = \frac{2{,}08 \times 10^{-3}}{3{,}0 \times 10^{8}} = 6{,}9\,\text{ps}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) Em comprimentos de onda no vazio:

$$\frac{\Delta L}{\lambda_0} = \frac{2{,}08 \times 10^{-3}}{550 \times 10^{-9}} \approx 3780$$

(d) Queremos $(n-1)\,e = \lambda_0/2$:

$$e = \frac{\lambda_0}{2(n-1)} = \frac{550}{2 \times 0{,}52} = 529\,\text{nm}$$

Meio micrómetro de vidro já atrasa a onda meio período.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

O índice do cristalino diminui do centro ($1{,}406$) para a periferia ($1{,}386$). Espessura: $4{,}0\,\text{mm}$ no centro, $2{,}0\,\text{mm}$ perto da borda. À volta: humor aquoso, $n = 1{,}336$.

(a) Caminho óptico pelo centro, com $n \approx 1{,}40$ em média.

(b) Caminho óptico perto da borda, nos mesmos $4{,}0\,\text{mm}$.

(c) Repita (a) se o cristalino tivesse todo $n = 1{,}386$.

(d) O que ganha o olho com o índice variável?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $L_c = 1{,}40 \times 4{,}0\,\text{mm} = 5{,}600\,\text{mm}$

(b) $2{,}0$ mm de cristalino e $2{,}0$ mm de humor aquoso:

$$L_b = 1{,}386 \times 2{,}0 + 1{,}336 \times 2{,}0 = 5{,}444\,\text{mm}$$

(c) Com índice uniforme:

$$L_c' = 1{,}386 \times 4{,}0 = 5{,}544\,\text{mm}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) O cristalino atrasa mais a parte central da frente do que a borda: a frente encurva-se e converge.

$$L_c - L_b = 0{,}156\,\text{mm} \quad \text{em vez de} \quad L_c' - L_b = 0{,}100\,\text{mm}$$

$$\frac{0{,}156}{0{,}100} = 1{,}56$$

Com o mesmo formato, o índice variável dá mais $56\,\%$ de atraso no centro: o cristalino converge mais sem ser mais curvo.